Sinc ウェーブレットを用いた非定常性を有する模擬地震動作成手法の研究

ARTIFICIAL GROUND MOTION WITH NON-STATIONARITY GENERATED BY THE SINC WAVELET

前田 寿朗*, 佐々木 文夫**, 山本 佳史***

Toshiro MAEDA, Fumio SASAKI and Yoshifumi YAMAMOTO

We have proposed a new method of constructing artificial ground motion with non-stationarity, which is necessary to evaluate the frequency selective resonance of non-linear structures. The wavelet transform with the Sinc wavelet is used to decompose signal into band-limited wavelets with temporal shifts, thus expressing the non-stationarity. Squared wavelet coefficients are modeled by the normal distribution along time axis, with the acceleration power, the temporal centroid, and the temporal variance evaluated for magnitudes and epicentral distances. Artificial ground motion is generated by the inverse wavelet transform to show the non-stationarity inferred from wave propagation and statistically anticipated attenuation relations.

Keywords : Wavelet Analysis, Sinc Wavelet, Group Delay Time, Artificial Ground Motion, Non-stationarity, Regression Analysis
ウェーブレット解析, Sinc ウェーブレット, 群遅延時間, 模擬地震動, 非定常性, 回帰分析

1. 研究の目的

大地震動を受ける構造物が弾塑性応答する場合、地震動に対する応答によって構造物の振動特性が時々刻々変化すると同時に、応答に寄与する振動数成分が構造物の振動特性により選択される¹⁾。したがって、構造物の応答や損傷を評価する上で、入力地震動の振動数成分に関する非定常性は振幅同様に重要である^{2), 3)}。設計用入力地震動の作成手法には理論的な方法と経験的な方法があり、経験的な方法の多くはマグニチュードと震源距離等の数少ないパラメータで地震動の応答スペクトルを表現する。応答スペクトルに適合した模擬地震動の時刻歴を生成するには、一般に一樣乱數位相と包絡形を用いた正弦波重ね合わせ法が用いられているが、同手法の包絡形が振幅の非定常性をモデル化するのに対して、一樣乱数で表される位相は振動数成分に関する非定常性を表現できない⁴⁾。したがって、振動数成分に関する非定常性を表現できる、模擬地震動作成手法の開発が望まれている。

和泉・勝倉²⁾は、時刻歴データの自乗の時間軸に沿った積分値、1次モーメント t_0 、ならびに2次モーメント σ_t^2 により、地震動の非定常性を特徴づけている。これらの振動数領域での表現より、時刻歴自乗の重心は群遅延時間にフーリエスペクトル振幅自乗で重みをつけた積分値 μ_w で表され、時刻歴自乗の分散はフーリエスペクトル振幅の微分の自乗積分 $\sigma_{\dot{u}}^2$ と、群遅延時間と重心の差の自乗にフーリエスペクトル振幅自乗の重みをつけた積分 $\sigma_{w'}^2$ の和で表される。佐藤ほか⁵⁾は、1990年伊豆大島近海地震のデータを用いた検討により、以上のパラメータ評価における重みつき積分の必要性を示して

いる。同時に σ_t^2 における $\sigma_{\dot{u}}^2$ の寄与にも言及しているが、その後の日本全国での回帰分析検討では $\sigma_{\dot{u}}^2$ の寄与を考慮の外におき、 μ_w と $\sigma_{w'}^2$ のモデル化により位相で非定常性を表した模擬地震動作成手法を論じた⁶⁾。しかしながら、佐藤ほか⁵⁾の伊豆大島近海地震での $\sigma_{\dot{u}}^2$ の寄与が約20%であったのに対し、和泉・勝倉²⁾の宮城県沖地震の検討では約50%の寄与であったことを考慮すると、 $\sigma_{\dot{u}}^2$ の寄与を評価する必要性が考えられる。

以上の手法がフーリエ解析のみを用いるのに対し、1980年代初めに考案されたウェーブレット解析は時刻歴をウェーブレット特有の振動数帯域に分離でき、その分離された信号はウェーブレットの時間移動による重ね合わせで表現できるので、振動数帯域ごとの非定常性の検討に最適なツールと考えられる⁷⁾。佐藤ほか⁸⁾は、ウェーブレット変換で分離した振動数帯域ごとに群遅延時間をモデル化し、佐藤ほか⁹⁾と同様な方法により模擬地震動を合成する方法を示しており、そこでのウェーブレット変換は一種のバンドパスフィルタとしての役割を果たしているように思われる。

他方、佐藤・室野⁹⁾は単に振動数帯域ごとの地震動の位相特性をモデル化するのみならず、位相特性と加速度パワーより対応するウェーブレット係数を求める方法も示している。同論文では、複数の地震の観測記録を回帰分析して μ_w 、 $\sigma_{w'}^2$ ならびに加速度パワーをモデル化し、乱数を用いて発生した群遅延時間より位相スペクトルを求め、非定常性をウェーブレット係数列を用いて表現している。しかしながら、それらは群遅延時間のみから求められており上述の $\sigma_{\dot{u}}^2$ の影響には言及していない。また、モデル化パラメータがウェーブレット変換で分離した振動数帯域ごとの群遅延時間の平均と分散ならび

本論文は、文献11)に新たな考察を加えて加筆したものである。

* 早稲田大学理工学部建築学科 博士(工学)
** 鹿島 I.T.ソリューション部 博士(数理科学)
*** 鹿島 I.T.ソリューション部 修士(工学)

Dept. of Architecture, Waseda University, Dr. Eng.
Kajima Corporation, Ph. D. (Mathematical Sciences)
Kajima Corporation, M. Eng.

に加速度パワーの3つの量に限られているが、その後の処理に最小自乗法によるウェーブレット係数列の評価という高振動数帯域では大きな行列の演算が必要となり、実用性を損なうおそれがある。以上の論文が群遅延時間を主要なモデル化対象としたのに対し、伊山・桑村¹⁰⁾はウェーブレット係数の自乗和が振動数帯域でのエネルギーに対応することを用いて、累積エネルギー入力、エネルギー入力卓越時刻ならびにエネルギー入力率のモデル化によりウェーブレット係数列を発生する方法を示している。そこでは、時間領域での分解能を重視した Daubechies のウェーブレットを使用している。

模擬地震動の非定常性のモデル化を群遅延時間のみから行う⁸⁾とすると、フーリエスペクトル振幅の情報の欠落による影響を避けることができない。ウェーブレット解析を用いると群遅延時間に依存せずに非定常性をモデル化することができるが、現状においては群遅延時間を介在せずに観測記録からウェーブレット係数を直接モデル化する試みは行われていない。本論文では、地震動記録の回帰分析によりウェーブレット係数を直接的にモデル化し、非定常性を有する模擬地震動を作成する手法を提案する¹¹⁾。まず、ここでは、ウェーブレット変換により分離された振動数帯域ごとの波形に対して計算を行なうため、振動数帯域の重なりが極小の Sinc ウェーブレットをマザーウェーブレットに採用し、このウェーブレットを用いたウェーブレット変換の効率的な計算方法を示す。つぎに、時刻歴データのエネルギーならびに経時特性パラメータ t_0 および σ_t^2 と同ウェーブレット係数の自乗の関係を明らかにする。最後に、例題として複数の地震の観測記録よりウェーブレット係数の自乗の時間軸上の分布を回帰し、その回帰結果に基づいて作成した想定地震の模擬地震動を例示する。

2. Sinc ウェーブレット

直交ウェーブレットを構成する一つの手法である多重解像度解析(MRA)^{12), 13)}では、スケーリング関数をあらかじめ決める必要があるが、Sinc 関数^{14), 15)}

$$\text{Sinc}(t) = \sin \pi t / \pi t \quad (1)$$

$$\hat{\text{Sinc}}(\omega) = 1 \quad (-\pi \leq \omega < \pi), 0 \quad (\text{otherwise}) \quad (2)$$

は、その正規直交性からスケーリング関数となり得る関数である。ここで $\hat{\cdot}$ はフーリエ領域を表わすものとする。Sinc 関数を用いると任意の π 帯域制限関数 $f(t)$ に対して Shannon の標準化定理

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \text{Sinc}(t-k) \quad (3)$$

が成立することから、Sinc 関数は Shannon のスケーリング関数とも呼ばれる¹⁶⁾。本研究では、データを離散量としたときに、ウェーブレット変換・逆変換において、再構成を可能にするため、フーリエ領域における Sinc 関数を

$$\hat{\text{Sinc}}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < \pi) \\ 1/\sqrt{2} & (|\omega| = \pi) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4)$$

と定義する。この関数をスケーリング関数として、通常の MRA による正規直交基底を構成する操作を行うことにより得られるマザーウェーブレット $\psi(t)$ は、結果のみを記すと以下のような形で表現される。

$$\psi(t) = \frac{\sin \pi(t-1/2)}{\pi(t-1/2)} - 2 \frac{\sin 2\pi(t-1/2)}{2\pi(t-1/2)} \quad (5)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = -\exp(-i\omega/2) \hat{\Psi}(\omega) \quad (6)$$

$$\text{但し } \hat{\Psi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \pi < |\omega| < 2\pi \\ 1/\sqrt{2} & |\omega| = \pi, 2\pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

本研究ではこのマザーウェーブレットを Sinc ウェーブレットと呼ぶことにする。尚、このマザーウェーブレットを原点方向に1/2だけ移動させた関数によ

図1 時間領域と振動数領域での Sinc ウェーブレット

って作られる基底は Littlewood-Paley 基底と呼ばれている¹²⁾。

Sinc ウェーブレットの特徴は、時間領域においては非常に滑らかな関数で無限回微分可能であること、また、そのフーリエ変換(6), (7)式から明らかなように振動数領域においてコンパクトサポートを持つことであり、しかも Sinc ウェーブレットによる族(wavelets),

$$\{\psi_{j,\ell}(t) : \psi_{j,\ell}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - \ell), j, \ell \in \mathbb{Z}\} \quad (8)$$

を考えると、添字 j (レベル j) を固定した時の振動数領域 ω でのサポート区間は $[2^{j-1}\pi, 2^{j+1}\pi]$ となることから(一般に T を時刻歴データの継続時間としたとき、振動数領域 Hz におけるサポート区間は $[2^{j-1}/T, 2^j/T]$ となる)、 $\hat{\psi}_{j,\ell}(\omega)$ と $\hat{\psi}_{j+1,\ell}(\omega)$ とのサポートの重なりは端の点だけであるということである。サポート区間から判るように、ウェーブレットの添字 j を変化させることは振動数帯が変化することに対応する。また、添字 ℓ を変化させることは、時間軸上での移動(シフト)に対応している。本研究では、上述したようにサポートの重なりが端の点のみである事、および関数形状が解析的に非常に単純な形で表現できる事から Sinc ウェーブレットをウェーブレット解析の核関数として採用する。図1には参考のために Sinc ウェーブレットの時間、振動数両領域での形を示してある。

ところで一般に、時刻歴波形 $f(t)$ の直交ウェーブレット変換・逆変換は

$$\alpha_{j,\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{j,\ell}(t)} dt \quad (9)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{2^j-1} \alpha_{j,\ell} \psi_{j,\ell}(t) \quad (10)$$

で定義される^{12), 17)}。ここで $\overline{\cdot}$ は複素共役を表わす。(9)式を直接数値計算することももちろん理論的には可能である。しかし、Sinc ウェーブレットは振動数領域において不連続性を有していることから、時間領域において $t \rightarrow \pm\infty$ としたときの減衰の早さは $1/t$ と二乗可積分関数としては非常に遅いため、(9)式の直接数値計算は収束性や打ち切り誤差の問題により数値計算上困難となることが多い。ここでは時刻歴波形に周期性(便宜的にここでは周期1として定式化を行う)を仮定し、フーリエ変換を用いて効率的に計算する方法について述べる。

まず時刻歴波形はフーリエ級数展開により、

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(2i\pi kt) \quad (11)$$

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - 2\pi k) \quad (12)$$

と表わせる。ここで a_k はフーリエ係数であり、 δ は Dirac のデルタ関数である。

(8)式の Sinc ウェーブレットは

$$\hat{\psi}_{j,\ell}(\omega) = -2^{-j/2} \exp(-i\omega\ell/2^j) \exp(-i\omega/2^{j+1}) \hat{\Psi}(\omega/2^j) \quad (13)$$

とフーリエ変換されることを考慮に入ると、

$$\begin{aligned} \alpha_{j,\ell} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}_{j,\ell}(\omega)} d\omega \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - 2\pi k) \right\} 2^{-j/2} \\ &\quad \cdot \exp(i\omega\ell/2^j) \exp(i\omega/2^{j+1}) \hat{\Psi}(\omega/2^j) d\omega \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-j/2} a_k \exp(2\pi i k \ell / 2^j) \exp(i\pi k / 2^j) \hat{\Psi}(2\pi k / 2^j) \end{aligned} \quad (14)$$

と表される。上式を Sinc ウェーブレットのサポートを考慮に入れ、 k の正の部分と負の部分に分ける。

$$\alpha_{j,t} = -2^{-j/2} \sum_{k=0}^{2^j-1} \{a_k \exp(i\pi k/2^j) \hat{\Psi}(2\pi k/2^j)\} \exp(2\pi i k \ell/2^j) \\ - 2^{-j/2} \sum_{k=0}^{2^j-1} \{a_{-k} \exp(-i\pi k/2^j) \hat{\Psi}(-2\pi k/2^j)\} \exp(-2\pi i k \ell/2^j) \quad (15) \\ + 2^{-j/2} 2^{-1/2} a_{2^j} + 2^{-j/2} 2^{-1/2} a_{-2^j}$$

さらに時刻歴波形 $f(t)$ を実数値関数と仮定することにより、フーリエ係数の複素共役性が考慮でき、

$$\alpha_{j,t} = -2^{-(j-2)/2} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{2^j-1} \{a_k \exp(i\pi k/2^j) \hat{\Psi}(2\pi k/2^j)\} \exp(2\pi i k \ell/2^j) \right] \\ + 2^{-(j-1)/2} \operatorname{Re}[a_{2^j}] \quad (16)$$

となる。ここで時刻歴波形が離散的に得られているとしたときには、最大のレベルを計算するときの a_{2^j} は Nyquist 振動数を計算する際のフーリエ係数になる。このとき式(16)での右辺第2項は $1/\sqrt{2}$ 倍する必要がある。また時刻歴波形の周期が T のときは上式の $\alpha_{j,t}$ を単に $T^{1/2} \alpha_{j,t}$ とするだけでよい。

式(16)で右辺第一項は高速フーリエ逆変換を用いて計算が可能であり、こうすると計算効率が良い。ウェーブレット逆変換に関してはデータ関数のフーリエ係数を効率よく求めることができる。ここでは結果のみを記す。

$$a_k = -\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/2} \exp(-i\pi k \ell/2^j) \hat{\Psi}(2\pi k/2^j) \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{j,k} \exp(-2\pi i k \ell/2^j) \quad (17)$$

上式で k に関する和は高速フーリエ変換で求まる。 j に関してはサポートの特徴から意味のあるものは高々2個である。

3. 時間軸上の拡がりやウェーブレット係数

3.1 ウェーブレット係数による表現

和泉・勝倉²⁾および佐藤ほか⁵⁾によると、時刻歴波形 $f(t)$ の complex envelope $\tilde{f}(t)$ の全エネルギー $\bar{E}$ 、時間軸上の重心 $t_0 = \mu_{gr}$ および分散 σ_t^2 は、 ω_n を Nyquist 振動数、 $f(t)$ および $\tilde{f}(t)$ のフーリエ変換を

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt = A(\omega) \exp[-i\varphi(\omega)] \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \exp(-i\omega t) dt = |\bar{F}(\omega)| \exp[-i\varphi(\omega)] \quad (19)$$

$$\text{但し、} |\bar{F}(\omega)| = \begin{cases} 2A(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (20)$$

群遅延時間を

$$tgr(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (21)$$

として以下のように表される。

$$\bar{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{F}(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_n} A(\omega)^2 d\omega \quad (22)$$

$$t_0 = \mu_{gr} = \frac{1}{\bar{E}} \int_{-\infty}^{\infty} t |\tilde{f}(t)|^2 dt \\ = \frac{1}{2\pi \bar{E}} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{F}(\omega)|^2 tgr(\omega) d\omega \\ = \frac{2}{\pi \bar{E}} \int_0^{\omega_n} A^2(\omega) tgr(\omega) d\omega \quad (23)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\bar{E}} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |\tilde{f}(t)|^2 dt = \sigma_{gr}^2 + \sigma_{\Delta}^2 \quad (24)$$

$$\sigma_{gr}^2 = \frac{1}{2\pi \bar{E}} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{F}(\omega)|^2 \{tgr(\omega) - t_0\}^2 d\omega \\ = \frac{2}{\pi \bar{E}} \int_0^{\omega_n} A^2(\omega) \{tgr(\omega) - \mu_{gr}\}^2 d\omega \quad (25)$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{1}{2\pi \bar{E}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d|\bar{F}(\omega)|}{d\omega} \right|^2 d\omega = \frac{2}{\pi \bar{E}} \int_0^{\omega_n} \left\{ \frac{dA(\omega)}{d\omega} \right\}^2 d\omega \quad (26)$$

ここで complex envelope $\tilde{f}(t)$ の重心と分散は時刻歴波形 $f(t)$ の重心と分散に一致し、エネルギーは2倍となっている。

和泉・勝倉²⁾の1978年宮城県沖地震の記録の分析において σ_{gr}^2 と σ_{Δ}^2 は同程度であり、佐藤ほか⁵⁾の伊豆大島近海地震の周期1~15秒の成分の検討において σ_{gr}^2 が σ_{Δ}^2 の4倍程度だった事例が報告されている。それらの文

献において、 σ_{gr}^2 と σ_{Δ}^2 の構成比の重要性が指摘されているが、以後の検討は行われていないようである。その理由として、従来型の模擬地震動作成法がターゲットスペクトルを仮定して始まる傾向にあり、付随した位相制御の観点から $tgr(\omega)$ が論じられること、ならびに表面波主体の検討であるため群速度との対応に注目が集まることが挙げられる。

ここでは、時刻歴波形 $f(t)$ をウェーブレット変換((16)式)し、各レベル j のウェーブレット係数から求まる帯域制限された逆変換波 $\hat{f}_j(t)$ の、加速度パワー E_j 、時間軸上の重心 μ_j 、ならびに分散 σ_j^2 を以下の式で定義する。

$$E_j = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_j(t) \overline{\hat{f}_j(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_j(\omega) \overline{\hat{f}_j(\omega)} d\omega \quad (27)$$

$$\mu_j = \frac{1}{E_j} \int_{-\infty}^{\infty} t \hat{f}_j(t) \overline{\hat{f}_j(t)} dt = \frac{i}{2\pi E_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{f}_j(\omega)}{d\omega} \overline{\hat{f}_j(\omega)} d\omega \quad (28)$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{E_j} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu_j)^2 \hat{f}_j(t) \overline{\hat{f}_j(t)} dt = \frac{1}{2\pi E_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{f}_j(\omega)}{d\omega} \overline{\frac{d\hat{f}_j(\omega)}{d\omega}} d\omega - \mu_j^2 \quad (29)$$

これらの式に(17)式の j を固定した連続スペクトルを代入し、Sinc ウェーブレットが正規直交系であり、特にレベルを固定したとき、(13)式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \overline{\psi_{j,l}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_{j,k}(\omega) \overline{\hat{\psi}_{j,l}(\omega)} d\omega \\ = \frac{2^{-j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(k-l)/2^j] \left| \hat{\Psi}(\omega/2^j) \right|^2 d\omega \\ = \delta_{k,l} \quad (30)$$

を満たすことを考慮すると、(27)~(29)式はウェーブレット係数により以下の(31)~(33)式で与えられる。

$$E_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} |\alpha_{j,k}|^2 \quad (31)$$

$$\mu_j = \frac{1}{E_j} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} \left(\frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \right) \alpha_{j,k} \alpha_{j,l} \\ \cdot \frac{2^{-j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(k-l)/2^j] \left| \hat{\Psi}(\omega/2^j) \right|^2 d\omega \\ = \sum_{l=0}^{2^j-1} \left\{ \left(\frac{l}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \right) |\alpha_{j,l}|^2 \right\} / E_j \quad (32)$$

$$\sigma_j^2 = \sum_{l=0}^{2^j-1} \left\{ \left(\frac{l}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \right)^2 |\alpha_{j,l}|^2 \right\} / E_j - \mu_j^2 \quad (33)$$

(31)式はウェーブレットが正規直交系ならいつでも成立する関係であり、広く知られている^{17), 18)}。また、(32)式は、ウェーブレットが正規直交系で、 $t=1/2$ での対称性が仮定できれば成立する。たとえば、Meyerのウェーブレット^{12), 17)}を用いても、(32)式は成立する。(33)式はSinc ウェーブレット固有の関係式である。

(31)~(33)式より、レベル j に対応した帯域制限波の加速度パワー、ならびに時間軸上の重心および拡がり、は、ウェーブレット変換によるレベル j のウェーブレット係数から直接的に求められる。

尚、(31)~(33)式では、誘導の過程での煩雑さを避けるため、 $f(t)$ を周期1秒の周期関数と仮定しているが、 $f(t)$ が周期 T 秒の周期関数であっても、結果は、 $E_j \rightarrow E_j \cdot T$ 、 $\mu_j \rightarrow \mu_j \cdot T$ 、 $\sigma_j^2 \rightarrow \sigma_j^2 \cdot T^2$ となるだけである。

3.2 観測記録に見られる関係

(31)~(33)式のウェーブレット係数から定義されるパラメータを、次章で使用するデータセットの一部について求めた。波形の原点は発震時刻である。なお、解析には原点から163.84秒分のデータを使用し、リンク効果による回り込みを避けるために163.84秒分の0をデータの前に加えている。図2に、例題に用いた兵庫県南部地震神戸海洋気象台(記録A)と北海道東方沖地震根室気象台(記録B)の各加速度EW成分を示す。図3~5に、加速度パワー、時刻歴重心、ならびに時刻歴標準偏差を示す。これらの図の縦軸はウェ

ウェーブレットのレベルであり、左右の図は図2の各加速度波形に対応する。また、各レベルのサポート区間は、表1中の振動数帯域と同じである。

ウェーブレット係数と時刻歴から求めたパワーは、伊山・桑村¹⁰⁾の方法においてもほぼ一致することが確認されているが、本報の Sinc ウェーブレットを用いた場合のウェーブレット係数と時刻歴から求めたパワーは、数値誤差を除き完全に一致する(図3参照)。記録Bが6.25Hz以下でほぼ一定のパワーを有するのに対し、記録Aは0.2~3Hzでパワーが卓越することが示されている。なお、同図中ではレベル毎の比較を容易にするために、レベル*j*に対応する振動数領域のサポート区間で正規化した規準化加速度パワーを比較した。ウェーブレット係数で表される規準化加速度パワーは、(34)式で定義する。

$$\tilde{E}_j = \frac{T}{2^j - 2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^j-1} |\alpha_{j,k}|^2 = \frac{T}{2^{j-1}} \sum_{k=0}^{2^j-1} |\alpha_{j,k}|^2 \quad (34)$$

図4に示す時刻歴重心の比較より、発震時刻から測った時間軸上の重心とウェーブレット係数から求めた重心はよく対応する。また、澤田¹⁹⁾に従って求めた群遅延時間に、スペクトル振幅自乗重み付き平均を施した結果も同程度の値を示している。

図5に示す時間軸上の標準偏差について、時刻歴とウェーブレット係数から求めた結果はレベルの小さい範囲を除いてほぼ一致する。一方群遅延時間の標準偏差 σ_{igr} は、 σ_{da} の寄与が含まれていない分だけ小さめである。

これらの図から、ウェーブレット係数から評価された加速度パワーおよび経時特性パラメータにより、地震動の非定常性が特徴づけられることがわかる。すなわち、記録Aは0.2~3Hzにパワーを有し、そのエネルギーは他の振動数帯域と同様な時点で重心を持つが、継続時間は他に比べて短いこと、また記録Bは約6Hz以下でほぼ同様なパワーを有するが、0.1~0.4Hzの成分が相対的に遅れ、0.4Hz以下の成分の継続時間が振動数の低下とともに漸増する様子を示すことができる。

図5に見られた σ_{da} の影響を検討するために、4.で使用するデータセットのうちの、兵庫県南部地震と北海道東方沖地震について、全観測点の加速度EW成分の σ_{da}^2/σ_i^2 と σ_w^2/σ_i^2 の平均値を図6に示す。同図より、これらの記録の σ_{da}^2 と σ_{igr}^2 は同等の寄与を示し、波の拡がりに関する σ_{da}^2 の寄与を評価する必要性を示唆している。

4. 模擬地震動の作成

前章で、帯域制限された逆変換波 $f_j(t)$ の規準化加速度パワー $\tilde{E}_j$ 、時間軸上の重心 μ_j および拡がり σ_j^2 が、各レベル*j*のウェーブレット係数により表現できる事を示した。ここでは、その特性を利用して、 μ_j 、 σ_j^2 、 $\tilde{E}_j$ からウェーブレット係数を作成する方法を示す。さらに、実際の観測記録に基づいて、 μ_j 、 σ_j^2 、 $\tilde{E}_j$ をマグニチュードMと震央距離Δで重回帰分析してこれらの諸量をモデル化し、設定されたMとΔに対して模擬地震動を作成する手法を提案する。なお、本章の解析に使用するデータは、リンク効果による回り込みを避けるために前章と同様の操作を加えている。

4.1 ウェーブレット係数の作成

各レベル*j*における μ_j 、 σ_j^2 、 $\tilde{E}_j$ が与えられた時、それらから、ウェーブレット係数の絶対値の自乗値を発生する必要がある。伊山・桑村¹⁰⁾はエネルギー入力時刻歴とウェーブレット係数の自乗累積値の関係から、包絡形状に関して、3角形分布を仮定しているが、本論文では、正規分布 $[\mu_j, \sigma_j^2]$ を仮定した。包絡形状の設定に関しては、経験的な継続時間等の観点から、今後さらに検討が必要であろうと思われる。次に、各サポート区間の加速度パワ

図2 観測記録の加速度波形 (左: 記録A, 右: 記録B)

図3 規準化加速度パワー (左: 記録A, 右: 記録B)

図4 時刻歴重心 (左: 記録A, 右: 記録B)

図5 時刻歴標準偏差 (左: 記録A, 右: 記録B)

図6 時刻歴分散平均値の比
(左: 兵庫県南部地震, 右: 北海道東方沖地震)

一が E_j と等値になるようにウェーブレット係数の自乗値を与え、伊山・桑村¹⁰⁾ にならって、一様乱数により符号を決定した。なお、ウェーブレット係数 α_{jj} は、(32)、(33)式に従って時刻 $(l/2^j + 1/2^{j+1}) \cdot T$ を代表するものとする。このようにして得られたウェーブレット係数をウェーブレット逆変換し、各レベルの逆変換波を合成して、非定常性を有する時刻歴波形を作成する。

ここでは、例として鹿児島県北西部地震(M=6.3)の K-NET 鹿児島県蒲生観測点($\Delta=31\text{km}$)の観測記録(NS 成分)から、各レベルの μ_j , σ_j^2 , $\tilde{E}_j$ を算出し(表 1)、合成波と観測記録の比較を行った。時刻歴波形、フーリエスペクトル振幅、ならびに連続ウェーブレット変換による時間-振動数領域でのウェーブレット係数の絶対値を図 7 に示す。なお、波形の原点は発震時刻である。また、連続ウェーブレット変換は原点から 80 秒までの波形に対して適用し、縦軸、横軸の値はおおよそ目安である。時刻歴波形の包絡形および継続時間、ならびに振動数特性とその非定常性は良く対応し、この例においては μ_j , σ_j^2 , $\tilde{E}_j$ から観測記録を概ね再現できた事がわかる。以上より、 μ_j , σ_j^2 , $\tilde{E}_j$ をマグニチュードと震央距離等に関して適切に設定することにより、非定常性を反映した模擬地震動を作成できることが示された。ただし、本研究では、ウェーブレット係数の絶対値の自乗の包絡形状を正規分布で表現しているため、その包絡形状が正規分布と大きく異なる場合には、分布形状をさらに検討する必要がある。

4.2 重回帰分析

本研究では、佐藤⁹⁾らの論文にならい、重回帰分析を行った。使用した地震波は、表 2 に示す地震のうち、最大加速度が 30gal を超えるデータで、その M と Δ の関係を図 8 に示す。

表 2 のデータに対して各々 μ_j , σ_j^2 , $\tilde{E}_j$ を求め、M と Δ を説明変数として次式により重回帰分析を行った。

$$\mu_j = \alpha_{\mu} \cdot 10^{\beta_{\mu} M} \cdot \Delta^{\gamma_{\mu}} \quad (35)$$

$$\sigma_j^2 = \alpha_{\sigma} \cdot 10^{\beta_{\sigma} M} \cdot \Delta^{\gamma_{\sigma}} \quad (36)$$

$$\tilde{E}_j = \alpha_{E} \cdot 10^{\beta_E M} \cdot \Delta^{\gamma_E} \quad (37)$$

各レベルの回帰係数 α_j , β_j , γ_j と相関係数を表 3 に示す。 μ_j , σ_j に関する相関係数はレベルの増大とともに大きくなるが、 $\tilde{E}_j$ に関する相関係数には、レベルとの関係はあまり見られない。参考に、佐藤⁹⁾の方法にならい、 $\text{tgr}(\omega)$ の平均、分散に関しても同様な重回帰分析を行った。表 3 の括弧内に示した $\text{tgr}(\omega)$ の平均に関する相関係数は μ_j の相関係数と同様な値を示したが、分散に関する相関係数は、ウェーブレット係数を用いた σ_j よりやや小さめになり、今回使用した地震波についてはウェーブレット係数による時間軸上の拡がりの評価がより安定した結果を示した。

μ_j , σ_j , $\tilde{E}_j$ と対応する回帰曲線の震央距離に関する比較を図 9 に示す。震央距離の増大に伴って、到達時刻が遅れるため μ_j が大きくなり、地震波が減衰することにより $\tilde{E}_j$ が小さくなる。また、地震波が散乱・分散するため震央距離とともに σ_j が大きくなる様子が見られるとともに、 $\tilde{E}_j$ と同様にマグニチュードとともに σ_j が大きくなる傾向が見られる。

4.3 模擬地震動作成例

表 4 の回帰係数を用い、震央距離に関する非定常性の変化を考察するために、データが豊富で信頼性の高い M=6.3 において、 $\Delta=10, 30, 100\text{km}$ とした場合の模擬地震動を作成した。作成した模擬地震動の $j=7\sim 13$ (約 0.20~25Hz) の帯域制限された逆変換波を図 10 に示す。 $\Delta=10\text{km}$ では各レベルの波形の重心はほぼ同じ時刻にあるが、震央距離が大きくなるに伴い、各レベルの波形の重心時刻に差が生じ、レベルが小さいほど遅くなる傾向が見られる。これは、各レベルを代表する地震波の伝播速度の違いを表して

表 1 鹿児島県北西部地震の

$$\mu_j, \sigma_j^2, \tilde{E}_j$$

j	μ_j	σ_j^2	$\tilde{E}_j$	振動数帯域(Hz)
4	13.29	42.19	2.37E-01	0.02~0.05
5	14.73	21.94	1.08E+00	0.05~0.10
6	10.82	20.93	9.09E+00	0.10~0.20
7	27.56	24.09	8.40E+01	0.20~0.39
8	28.84	15.51	4.52E+03	0.39~0.78
9	23.86	9.71	7.89E+03	0.78~1.56
10	16.24	5.10	2.63E+03	1.56~3.13
11	13.90	3.51	5.56E+02	3.13~6.25
12	12.50	3.02	3.39E+02	6.25~12.5
13	12.60	3.43	1.75E+02	12.5~25.0

図 7 鹿児島県北西部地震蒲生観測点の観測記録と解析結果
(上段：時刻歴、中段：スペクトル、下段：ウェーブレット変換)

表 2 使用地震波

発生日時	地震名	M	データ数	強震計
1993/7/12	北海道南西沖地震	7.8	2	87型
1994/10/7	北海道東方沖地震	8.1	18	87型
1994/12/28	三陸はるか沖地震	7.5	14	87型
1995/1/17	兵庫県南部地震	7.2	16	87型
1997/3/26	鹿児島県北西部地震	6.3	69	K-NET95

図 8 使用データの M と Δ の関係

表3 重回帰分析の結果(相関係数の括弧内は群遅延時間に対するもの)

j	α_μ	α_σ	$\alpha_{\tilde{E}}$	β_μ	β_σ	$\beta_{\tilde{E}}$	γ_μ	γ_σ	$\gamma_{\tilde{E}}$	相関係数		
										μ	σ	$\tilde{E}$
4	0.43	7.15	4.82E-13	0.06	0.08	2.08	0.77	0.06	-0.97	0.78 (0.80)	0.46 (0.38)	0.90
5	0.20	1.55	3.55E-10	0.10	0.14	1.85	0.79	0.15	-1.33	0.93 (0.92)	0.69 (0.71)	0.86
6	0.32	0.14	5.69E-07	0.09	0.29	1.61	0.76	0.06	-1.78	0.97 (0.97)	0.84 (0.82)	0.74
7	0.72	1.19	9.36E-08	0.06	0.12	1.91	0.70	0.18	-2.21	0.97 (0.96)	0.76 (0.76)	0.75
8	0.83	1.00	2.53E-04	0.06	0.13	1.50	0.68	0.11	-2.18	0.97 (0.96)	0.70 (0.61)	0.62
9	0.66	0.81	8.11E-04	0.05	0.10	1.51	0.73	0.18	-2.25	0.98 (0.98)	0.75 (0.63)	0.66
10	0.41	0.51	3.94E-04	0.08	0.09	1.44	0.72	0.27	-1.79	0.99 (0.99)	0.78 (0.73)	0.67
11	0.31	0.11	1.86E-04	0.09	0.19	1.46	0.72	0.22	-1.83	0.99 (0.99)	0.87 (0.81)	0.74
12	0.26	0.08	1.88E-02	0.10	0.19	1.16	0.71	0.29	-2.22	0.99 (0.99)	0.90 (0.85)	0.62
13	0.20	0.07	4.45E+00	0.11	0.19	0.67	0.74	0.33	-2.38	0.99 (0.99)	0.88 (0.83)	0.57

図9 $j=7\sim 12$ の重回帰分析結果(左: μ_j , 中央: σ_j , 右: $\tilde{E}_j$)

図 10 $j = 7 \sim 13$ (約 0.20~25Hz) の帯域制限された逆変換波 ($M=6.3$)

図 11 模擬地震動作成例 ($M=6.3$)

(上段：加速度，中段：加速度フーリエスペクトル，下段：速度)

おり、長周期成分ほど小さな伝播速度を示している。長周期成分が遅れて現れる傾向は、既に、伊山・桑村²⁰⁾が行なった1995年兵庫県南部地震のウェーブレット解析でもとらえられており、佐藤・室野・西村⁸⁾も同様の結果を得ている。

また、震央距離の増大に伴って、いずれのレベルの継続時間も増大する様子が見られる。これは、伝播距離の増大に伴って地震波の散乱および分散がより顕著になることを表現している。

図11にすべてのレベルを合成した模擬地震動の加速度時刻歴波形とフーリエスペクトル振幅、およびその速度時刻歴波形を示す。各レベルの重心時刻のずれ、ならびに継続時間の伸びが震央距離に伴い顕著になることを反映して、波形全体の継続時間が伸びている事がわかる。また、長周期成分が相対的に遅れる事により、地震波の後半では長周期成分が優勢となることが速度波形に顕著に見られ、振動数に関する非定常性が実現されていることがわかる。エネルギーの減衰による振幅の減少は、 $\Delta=10, 30, 100\text{km}$ でのFukushima and Tanaka²¹⁾の距離減衰式による最大加速度297, 126, 26galよりは小さめではあるが、振幅に関する既往の統計的な評価と整合的であることがわかる。

5. まとめ

本論文では、地震動記録の回帰分析によりウェーブレット係数を直接的にモデル化し、非定常性を有する模擬地震動を作成する手法を提案した。本手法を用いることにより、従来考慮の外に置かれてきたスペクトル振幅の変化に起因する時間軸上の分散への寄与も含めて、ウェーブレットのレベルに対応した振動数帯域ごとの継続時間を表現することができる。

本手法においては、振動数帯域の重なりが極小のSincウェーブレットをマザーウェーブレットに用いることにより、各パラメータ評価におけるレベル間の独立性を高め、レベルと振動数帯域のより直接的な対応づけを可能とした。それに伴って、Sincウェーブレットを用いたウェーブレット変換の効率的な計算方法を示し、時刻歴データから評価されるエネルギーおよび経時特性パラメータをウェーブレット逆変換を用いずに、ウェーブレット係数で定式化した。さらに、これらの定式化が観測データについて成立することを数値的にも確認し、限られたデータセットではあるが、作成した模擬地震動の非定常性が合理的であることを示した。

なお、本研究で用いたウェーブレットのレベルに対応した振動数帯域は、実際の各種波動の卓越振動数に対応するものでないが、統計的手法の範疇で使用する限りにおいて十分に実用的な非定常特性を付与すると考えられる。今後は、多くの観測記録を用いて、多重震源による地震動などをより合理的にモデル化するためのウェーブレット係数自乗の分布形状を検討し、地域、表層地質、震源メカニズム、震源深さ、震源距離等の各種パラメータを含む振動数帯域別の加速度パワー及び経時特性パラメータモデルを構築する予定である。

謝辞

本論文の作成に当たり、防災科学技術研究所の強震ネットワークK-NETならびに気象庁87型電磁式強震計のデータを利用しました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 田治見宏:建築振動学, コロナ社, 1965.
- 2) 和泉正哲, 勝倉裕:地震動の位相情報に関する基礎的研究, 日本建築学会論文報告集第327号, pp.20-27, 1983.5.
- 3) 伊山潤, 桑村仁:フェイルセーフ構造の耐震性に及ぼす地震動位相特性の影響, 日本建築学会構造系論文集, 第522号, pp.13-20, 1999.8.
- 4) 大崎順彦:原子力発電所設計用の基準地震動評価に関するガイドライン, 主として大崎スペクトルについて, ORI研究報告84-01, 1984.
- 5) 佐藤智美, 佐藤俊明, 植竹富一, 菅原良次:群遅延時間を用いたやや長周期地震動の経時特性評価のための基礎的研究, 日本建築学会構造系論文集, 第480号, pp.57-65, 1996.2.
- 6) 佐藤智美, 植竹富一, 菅原良次:群遅延時間を用いたやや長周期地震動の経験的経時特性モデルに関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第493号, pp.31-39, 1997.3.
- 7) 佐々木文夫, 前田達哉:データ解析におけるウェーブレット変換の基本的性状の検討, 日本建築学会構造系論文報告集, 第453号, pp.197-206, 1993.11.
- 8) 佐藤忠信, 室野剛隆, 西村昭彦:観測波に基づく地震動の位相スペクトルのモデル化, 土木学会論文集, No.640/I-50, pp.119-130, 2000.1.
- 9) 佐藤忠信, 室野剛隆:位相情報を用いた地震動のシミュレーション法, 土木学会論文集, No.675/I-55, pp.113-123, 2001.4.
- 10) 伊山潤, 桑村仁:ウェーブレット逆変換による模擬地震動の作成, 日本建築学会構造系論文集, 第502号, pp.47-54, 1997.12.
- 11) 佐々木文夫, 前田寿朗, 山本佳史:Sincウェーブレットを用いた模擬地震動作成手法の研究(その1〜その3), 日本建築学会学術講演梗概集, 構造II, 関東, pp.29-34, 2001.
- 12) I. Daubechies: Ten Lectures on Wavelets, SIAM, CBMS-NSF, 1992.
- 13) F. Sasaki and M. Yamada: Biorthogonal Wavelets Adapted to Integral Operators and Their Applications, JJIAM, Vol. 14, No. 2, pp.257-277, 1997.
- 14) 杉原正顕:二重指数関数型変数変換を用いたSinc関数近似, 京都大学数理解析研究所講義録, No.990, 1997.
- 15) 佐々木文夫:ウェーブレット変換とその数値処理について, 日本建築学会学術講演梗概集, 情報システム技術, 東北, pp.431-432, 2000.
- 16) G.G.Walter: Wavelets and other orthogonal systems with applications, CRC. Press Inc., 1994.(邦訳:榊原他:ウェーブレットと直交関数系, 東京電機大学出版局, 2001)
- 17) 佐々木文夫, 前田達哉, 山田道夫:ウェーブレット変換を用いた時系列データの解析, 構造工学論文集, 日本建築学会, Vol. 38B, pp.9-20, 1992.
- 18) 山口昌哉, 山田道夫:ウェーブレット解析, 科学, 岩波書店, Vol. 60, No. 6, pp.398-405, 1990.
- 19) 澤田純男, 盛川仁, 土岐憲三, 横山圭樹:地震動の位相スペクトルにおける伝播特性・サイト特性の分離, 第10回日本地震工学シンポジウム, pp.915-921, 1998.
- 20) 伊山潤, 桑村仁:ウェーブレット変換による地震動の時間一周波数解析, 日本建築学会構造系論文集, 第514号, pp.59-64, 1998.12.
- 21) Fukushima, Y. and T. Tanaka, A new attenuation relation for peak horizontal acceleration of strong earthquake ground motion in Japan, Bull. Seism. Soc. Am., 84, pp.757-783, 1990.

(2001年7月9日原稿受理, 2001年11月12日採用決定)