ARMAMA モデルによるスペクトル解析と振動モード同定

ARMAMA MODEL FOR SPECTRAL ANALYSIS AND MODAL IDENTIFICATION

金澤 健司*¹, 松井 徹哉*²
Kenji KANAZAWA and Tetsuya MATSUI

A new spectrum analysis scheme and its application of modal identification are presented to identify accurate modal properties from ambient vibration measurements. In the scheme, the observable time sequences are modeled as ARMAMA model where the MA terms are added to an ordinary ARMA model. The modal properties are identified from the cross- and auto-power spectrum density estimates represented in ARMAMA models. In the paper, we derive the theory of the present procedure and demonstrate the modal properties estimation of a large coal silo from real ambient vibration records.

Keywords: cross power spectral density, auto power spectral density, ARMAMA model, system identification, ambient vibration

クロススペクトル, パワースペクトル, ARMAMA モデル, システム同定, 常時微動

1 まえがき

常時微動計測、地震観測ならびに起振実験等の振動計測に基づく建築物の振動特性評価は、構造健全性を評価するためのヘルスマニタリング手法として広範囲の応用が期待されている¹⁾。近年、このためのシステム同定手法に関する研究が活発に行われている²⁾³⁾⁴⁾。著者らは、常時微動応答のように振動源(入力時系列)が計測できずに建物応答(出力時系列)のみが得られる場合を想定し、建物応答のみから地盤-建物系振動システムの振動特性を精度良く推定するための一手法として、クロススペクトルに基づく評価手法を提案し⁵⁾、実測記録を用いてその有効性を確認した⁶⁾。その評価手法の中で、振動特性を精度良く推定する上で最も重要な部分は、観測時系列から応答点の間のクロススペクトルを算定する方法である。

前論文⁵⁾では、クロススペクトルの推定手法を導出する際に、建物応答の時系列モデルとして ARMA モデル (Autoregressive Moving-Average model) を採用し、さらに建物上の全ての応答点で AR 係数が等しいという仮定を導入した。この仮定は、ARMA モデルの AR 係数は振動系の固有値 (固有振動数、モード減衰比) に係わる特性のみを含み、かつ建物上の応答点では振動系の固有値は全て等しく表れるという意味で、妥当であるといえる。しかしながら、建物上の観測時系列には振動系全体に係わる振動成分だけでなく、機械振動や部材振動などの局所的な振動成分が含まれ

ることがあり、このような局所的な振動成分が無視できない場合、この仮定は妥当であるとはいえない。また、クロススペクトルと相互相関関数は Wiener-Khinchine の関係よりスペクトル理論の上で対の関係にある⁷⁾が、前論文で示したスペクトルの解析法ではクロススペクトルを推定する際に自己相関関数を用いており、スペクトル理論との整合性を欠いた部分があった。

本論文では、これらの問題点を改善するため、新たに定義する ARMAMA モデル (Autoregressive Moving-Average and Moving-Average model) によるスペクトル解析法を提案し、さらに構造物の振動モード同定への適用法を示す。ここで、ARMAMA モデルとは通常の ARMA モデルに移動平均項 (MA 項) を付加したモデル⁸⁾であり、前論文⁵⁾の ARMA モデルとは異なり複数の時系列波形の相関成分と無相関成分を分離することができる。このため、観測波形に特有の振動成分が含まれる場合にも、これらを除去して複数の観測波形に共通する成分を抽出することができる。

なお、複数の時系列波形に関する相関性を解析する場合には、ベクトル型の AR モデル⁹⁾や ARMA モデル¹⁰⁾を用いることも考えられる。しかしながら、ベクトル型時系列モデルの AR 係数および MA 係数は行列表現で与えられるため、これら係数からの物理的な解釈は必ずしも容易ではない。これに対し、本論文の方法によれば、同定結果はスカラー型のスペクトル表示で与えられる

*¹ 電力中央研究所地盤耐震部 主任研究員・工修

*² 名古屋大学環境学研究所都市環境学専攻 教授・工博

Research Engineer, Dept. of Geotechnical & Earthquake Eng., CRIEPI, M. Eng.
Prof., Dept. of Environmental Eng. and Architecture, Graduate School of Environmental Studies, Nagoya Univ., Dr. Eng.

ため、物理的な解釈を容易に行うことができる。

以下では、まず、ARMAMA モデルを定義し、このモデルによるスペクトル解析法を示す。次に、このスペクトル解析法の振動モード同定への適用法を述べる。その後、大型貯炭サイロの常時微動計測データに本手法を適用した例を示す。

2 ARMAMA モデルの定義

弱定常過程に基づく 2 つの出力時系列（観測波形）を $x(t)$ および $y(t)$ とするとき、それぞれの時系列モデルを次式で定義する。

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{B_x(z^{-1})}{A_x(z^{-1})}e(t) + \frac{D_x(z^{-1})}{C_x(z^{-1})}e_x(t) \\ &= \frac{\sum_{j=0}^n b_x(j)z^{-j}}{\sum_{j=0}^n a_x(j)z^{-j}}e(t) + \frac{\sum_{j=0}^m d_x(j)z^{-j}}{\sum_{j=0}^m c_x(j)z^{-j}}e_x(t) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{B_y(z^{-1})}{A_y(z^{-1})}e(t) + \frac{D_y(z^{-1})}{C_y(z^{-1})}e_y(t) \\ &= \frac{\sum_{j=0}^n b_y(j)z^{-j}}{\sum_{j=0}^n a_y(j)z^{-j}}e(t) + \frac{\sum_{j=0}^m d_y(j)z^{-j}}{\sum_{j=0}^m c_y(j)z^{-j}}e_y(t) \quad (2) \end{aligned}$$

$$a_x(0) = 1; \quad a_y(0) = 1; \quad c_x(0) = 1; \quad c_y(0) = 1 \quad (3)$$

ここで、 $e(t)$ 、 $e_x(t)$ および $e_y(t)$ は互いに無相関な定常ホワイトノイズ（平均値 0、分散 1）、 $a_x(j)$ 、 $a_y(j)$ 、 $c_x(j)$ および $c_y(j)$ は AR 係数、 $b_x(j)$ 、 $b_y(j)$ 、 $d_x(j)$ および $d_y(j)$ は MA 係数、 z^{-1} は遅延演算子である。

式 (1) および (2) によれば、出力時系列 $x(t)$ および $y(t)$ は、同じホワイトノイズ $e(t)$ と互いに異なるホワイトノイズ $e_x(t)$ および $e_y(t)$ の 2 種類の入力時系列に駆動されるモデルとなっている。すなわち、2 つの時系列モデルの右辺第一項は 2 つの出力時系列間の相関成分、右辺第二項は無相関の成分を表しているといえる。次章に示すように、クロススペクトルを算定する際には右辺第一項の相関成分のみが残り、これらの項からクロススペクトルが算定される。一方で、パワースペクトルを算定する際には右辺第一項の相関成分と第二項の無相関の成分の両方を考慮する必要がある。

式 (1) および (2) を差分表示すると、次式で表される。

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n c_x(j)a_x(k)x(t-j-k) &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n c_x(j)b_x(k)e(t-j-k) \\ &+ \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n d_x(j)a_x(k)e_x(t-j-k) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n c_y(j)a_y(k)y(t-j-k) &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n c_y(j)b_y(k)e(t-j-k) \\ &+ \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n d_y(j)a_y(k)e_y(t-j-k) \quad (5) \end{aligned}$$

式 (4) および (5) において、適当な変数変換により二重の総和は一重の総和に置換できるので、これらのモデルは 1 つの AR 項（左辺）と 2 つの MA 項（右辺）から構成されているといえる。よって、本論文ではこの時系列モデルを ARMAMA モデルと称する。

3 ARMAMA モデルによるクロススペクトルの計算法

本章では、ARMAMA モデルを用いたクロススペクトルの計算法を示す。まず、インパルス応答を用いて、ARMAMA モデルによるクロススペクトルの一般的な表示式を導出する。この表示式は、AR 係数と MA 係数の有理関数で表される。しかし、観測される出力時系列のみから MA 係数を推定することは実用上は困難である¹¹⁾。そこで、クロススペクトルの表示式を MA 係数を用いない形式で与える。最後に、AR 係数の推定方法を示す。

3.1 クロススペクトルの導出

AR 次数 n および m が十分に大きいとき、式 (1) および (2) は近似的に次式で表すことができる。

$$x(t) = H_{bx}(z^{-1})e(t) + H_{dx}(z^{-1})e_x(t) \quad (6)$$

$$y(t) = H_{by}(z^{-1})e(t) + H_{dy}(z^{-1})e_y(t) \quad (7)$$

ただし、

$$H_{bx}(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{bx}(j)z^{-j} \equiv \frac{B_x(z^{-1})}{A_x(z^{-1})} \quad (8)$$

$$H_{by}(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{by}(j)z^{-j} \equiv \frac{B_y(z^{-1})}{A_y(z^{-1})} \quad (9)$$

$$H_{dx}(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{dx}(j)z^{-j} \equiv \frac{D_x(z^{-1})}{C_x(z^{-1})} \quad (10)$$

$$H_{dy}(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{dy}(j)z^{-j} \equiv \frac{D_y(z^{-1})}{C_y(z^{-1})} \quad (11)$$

である。ここで、 $\{h_{bx}(j)\}$ 、 $\{h_{by}(j)\}$ 、 $\{h_{dx}(j)\}$ および $\{h_{dy}(j)\}$ はインパルス応答列である。さらに、式 (6) および (7) は次の差分表示式で表される。

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{bx}(j)e(t-j) + \sum_{j=0}^{\infty} h_{dx}(j)e_x(t-j) \quad (12)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{by}(k)e(t-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_{dy}(k)e_y(t-k) \quad (13)$$

式 (12)、(13) を用いると、 $x(t)$ および $y(t)$ の相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t) \cdot y(t+\tau)] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h_{bx}(j)h_{by}(j+\tau) \quad (14) \end{aligned}$$

ここで、 $E[\cdot]$ は時刻 t に関する期待値操作を示す。また、上式の導出では、入力時系列 $e(t)$ 、 $e_x(t)$ および $e_y(t)$ が互いに無相関であることを用いている。

さて、Wiener-Khintchine の関係より、出力時系列 $x(t)$ と $y(t)$ のクロススペクトルは次式で与えられる。

$$S_{xy}(z^{-1}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)z^{-\tau} \quad (15)$$

$t < 0$ において $h_{bx}(t) = 0$ 、 $h_{by}(t) = 0$ であるから、式 (14) を (15) に代入すると次式が得られる。

$$S_{xy}(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\tau=-j}^{\infty} h_{bx}(j)h_{by}(j+\tau)z^{-\tau} \quad (16)$$

ここで、 $k = j + \tau$ として τ を消去し、式 (8) と (9) を (16) に代入すると、式 (1) および (2) で表される出力時系列 $x(t)$ および $y(t)$ のクロススペクトルとして次式が得られる。

$$S_{xy}(z^{-1}) = \frac{B_x(z)B_y(z^{-1})}{A_x(z)A_y(z^{-1})} \quad (17)$$

3.2 クロススペクトルの推定法

式 (17) によりクロススペクトルを推定するためには、AR 係数 $a_x(j)$ 、 $a_y(j)$ 、MA 係数 $b_x(j)$ 、 $b_y(j)$ を決定する必要がある。しかし、スペクトル推定のみを行うならば、必ずしもこれら全ての係数を決定する必要はない⁵⁾¹²⁾。本節では、式 (17) に示すクロススペクトルの表示式を MA 係数を含まない形式に書き換える。

式 (17) の分子は以下のように展開することができる。

$$\begin{aligned} B_x(z)B_y(z^{-1}) &= \sum_{k=0}^n b_x(k)z^k \sum_{j=0}^n b_y(j)z^{-j} \\ &= \sum_{l=-n}^n \sum_{k=0}^n b_x(k)b_y(k+l)z^{-l} \end{aligned} \quad (18)$$

上式の導出では、 $j = k + l$ の変数変換と、 $j < 0, n < j$ において $b_y(j) = 0$ が成り立つことを用いている。

ここで、以下の説明を明瞭にするため、新たに補助変数 $u(t)$ および $v(t)$ を導入し、式 (4) および (5) を書き直す。さらに、それら 2 式の等式に対して別の補助変数 $r(t)$ および $s(t)$ を導入する。すなわち、式 (4) と (5) は、次の 4 つの式で表すことができる。

$$r(t) \equiv \sum_{k=0}^n a_x(k)(x(t-k) - u(t-k)) = \sum_{k=0}^n b_x(k)e(t-k) \quad (19)$$

$$s(t) \equiv \sum_{k=0}^n a_y(k)(y(t-k) - v(t-k)) = \sum_{k=0}^n b_y(k)e(t-k) \quad (20)$$

$$\sum_{j=0}^n c_x(j)u(t-j) = \sum_{j=0}^n d_x(j)e_x(t-j) \quad (21)$$

$$\sum_{j=0}^m c_y(j)v(t-j) = \sum_{j=0}^n d_y(j)e_y(t-j) \quad (22)$$

式 (19) および (20) の左辺を用いて、 $r(t)$ および $s(t)$ の相互相関関数 $R_{rs}(\tau)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} R_{rs}(l) &= E[r(t) \cdot s(t+l)] \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_x(k)a_y(j)R_{xy}(l+k-j) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $R_{xy}(\tau)$ は出力時系列 $x(t)$ および $y(t)$ の相互相関関数であり、計測データから推定する。上式の導出では、 $x(t)$ と $v(t)$ の相互相関関数 $R_{xv}(\tau)$ 、 $y(t)$ と $u(t)$ の相互相関関数 $R_{yu}(\tau)$ および $u(t)$ と $v(t)$ の相互相関関数 $R_{uv}(\tau)$ がともに、全ての τ でゼロであることを用いている（付録の式 (A-3)、(A-4) および (A-5) を参照のこと）。同様に、式 (19) および (20) の右辺を用いて、 $r(t)$ および $s(t)$ の相互相関関数 $R_{rs}(\tau)$ は次式で表される。

$$R_{rs}(l) = \sum_{k=0}^n b_x(k)b_y(k+l) \quad (24)$$

さて、式 (24) を (18) に代入すると、式 (17) に示されるクロススペクトルは次式で表すことができる。

$$S_{xy}(z^{-1}) = \frac{\sum_{l=-n}^n R_{rs}(l)z^{-l}}{A_x(z)A_y(z^{-1})} \quad (25)$$

式 (23) より $R_{rs}(l)$ は AR 係数 $a_x(j)$ 、 $a_y(j)$ と相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ から計算できるので、式 (25) によるクロススペクトルは MA 係数を含まない形式となっている。したがって、次節の方法で AR 係数 $a_x(j)$ および $a_y(j)$ を推定できれば、式 (25) を用いてクロススペクトルを推定することができる。

3.3 AR 係数の計算法

式 (19) の両辺に $y(t-l)$ を掛けて、時刻 t について期待値をとると、次式が得られる。

$$\sum_{k=0}^n a_x(k)R_{xy}(k-l) = \sum_{k=0}^n b_x(k)h_{by}(k-l) \quad (26)$$

ここで、上式の導出では、 $y(t)$ と $u(t)$ の相互相関関数 $R_{yu}(\tau)$ 、 $y(t)$ と $e(t)$ の相互相関関数 $R_{ye}(\tau)$ が $R_{yu}(\tau) = 0$ 、 $R_{ye}(\tau) = h_{by}(-\tau)$ を満足することを利用している（付録の式 (A-4) および (A-7) を参照のこと）。 $l > n$ のとき式 (26) の右辺はゼロとなり、AR 係数 $a_x(k)$ と相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ の関係式が得られる。

$$\sum_{k=0}^n a_x(k)R_{xy}(k-l) = 0 ; l \geq n+1. \quad (27)$$

式 (20) の両辺に $x(t-l)$ を掛けて、上記と同様の手順により、AR 係数 $a_y(k)$ と相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ の関係式も得られる。

$$\sum_{k=0}^n a_y(k)R_{xy}(l-k) = 0 ; l \geq n+1. \quad (28)$$

式 (27) および (28) は、ARMA モデルにおける拡張 Yule-Walker 方程式と同じ形式である⁵⁾。このため、計測データから推定した相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ を用いて、拡張 Yule-Walker 方程式と同様にしてこれらの式を解くことができる。後の適用例では、前論文⁵⁾と同様に特異値分解法¹³⁾を用いて AR 係数を算定した。

4 ARMAMA モデルによるパワースペクトルの計算法

前章では、ARMAMA モデルによるクロススペクトルの計算法について述べた。本章では、クロススペクトルの推定値を反映した上で、ARMAMA モデルのパワースペクトルを計算する方法を示す。出力時系列 $x(t)$ と $y(t)$ に関するパワースペクトルの計算法は同様であるため、ここでは $x(t)$ のみを扱うことにする。

4.1 パワースペクトルの導出

式 (12) より $x(t)$ の自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E[x(t) \cdot x(t+\tau)] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h_{bx}(j)h_{bx}(j+\tau) + \sum_{j=0}^{\infty} h_{dx}(j)h_{dx}(j+\tau) \end{aligned} \quad (29)$$

ただし、上式の導出では、 $e(t)$ および $e_x(t)$ が互いに無相関のホワイトノイズであることを用いた。

$x(t)$ のパワースペクトル $S_{xx}(z^{-1})$ は次式で与えられる。

$$S_{xx}(z^{-1}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)z^{-\tau} \quad (30)$$

$t < 0$ においてインパルス応答は $h_{bx}(t) = 0$ および $h_{dx}(t) = 0$ であるから、式 (29) を (30) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} S_{xx}(z^{-1}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\tau=-j}^{\infty} h_{bx}(j)h_{bx}(j+\tau)z^{-\tau} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\tau=-j}^{\infty} h_{dx}(j)h_{dx}(j+\tau)z^{-\tau} \end{aligned} \quad (31)$$

$k = j + \tau$ として τ を消去し、式 (8) と (10) を (31) に代入すると、式 (1) の $x(t)$ のパワースペクトルは次式のように導出される。

$$S_{xx}(z^{-1}) = \frac{N_x(z^{-1})}{A_x(z)A_x(z^{-1})C_x(z)C_x(z^{-1})} \quad (32)$$

ここで、 $N_x(z^{-1})$ は分子スペクトル (a numerator spectrum) であり、次式で表される。

$$N_x(z^{-1}) = C_x(z)C_x(z^{-1})B_x(z)B_x(z^{-1}) + D_x(z)D_x(z^{-1})A_x(z)A_x(z^{-1}) \quad (33)$$

4.2 パワースペクトルの推定法

前章と同様に、式 (32) を MA 係数を含まない形式で表す。式 (33) の分子スペクトルは次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} N_x(z^{-1}) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n (c_x(i)c_x(j)b_x(k)b_x(h) \\ &\quad + d_x(i)d_x(j)a_x(k)a_x(h))z^{-i+j+k-h} \\ &= \sum_{l=-(m+n)}^{m+n} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n (c_x(i)c_x(j)b_x(k)b_x(l-i+j+k) \\ &\quad + d_x(i)d_x(j)a_x(k)a_x(l-i+j+k))z^{-l} \quad (34) \end{aligned}$$

上式の導出では、 $h = l + i - j + k$ の変数変換と、 $j < 0, m < j$ において $c_x(j) = 0$ および $d_x(j) = 0$ であることを用いている。

ここで、式 (4) の等式に対し、両辺を補助変数 $w(t)$ で表示する。式 (4) の左辺、すなわち AR 係数に関する項を用いて、 $w(t)$ の自己相関関数 $R_{ww}(\tau)$ を計算すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} R_{ww}(l) &= E[w(t) \cdot w(t+l)] \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n c_x(i)c_x(j)a_x(k)a_x(h) \\ &\quad \times R_{xx}(l-i+j+k-h) \quad (35) \end{aligned}$$

次に、式 (4) の右辺、すなわち MA 係数に関する項を用いて、 $w(t)$ の自己相関関数 $R_{ww}(\tau)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} R_{ww}(l) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n (c_x(i)c_x(j)b_x(k)b_x(l-i+j+k) \\ &\quad + d_x(i)d_x(j)a_x(k)a_x(l-i+j+k)) \quad (36) \end{aligned}$$

式 (36) を (34) に代入すると、 $N_x(z^{-1})$ は次式で表される。

$$N_x(z^{-1}) = \sum_{l=-(m+n)}^{m+n} R_{ww}(l)z^{-l} \quad (37)$$

上式を用いて、式 (32) は次式のように書き直すことができる。

$$S_{xx}(z^{-1}) = \frac{\sum_{l=-(m+n)}^{m+n} R_{ww}(l)z^{-l}}{A_x(z)A_x(z^{-1})C_x(z)C_x(z^{-1})} \quad (38)$$

式 (35) より $w(t)$ の自己相関関数 $R_{ww}(l)$ は出力時系列 $x(t)$ の自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ と AR 係数 $a_x(j)$ と $c_x(j)$ を用いて決定することができるので、式 (38) によれば MA 係数を推定値を使用することなく $x(t)$ のパワースペクトルを決定することができる。

4.3 AR 係数の計算法

式 (4) の両辺に $x(t-l)$ を掛けて、時刻 t について期待値をとると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n c_x(j)a_x(k)R_{xx}(j+k-l) \\ = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n c_x(j)b_x(k)h_{bx}(j+k-l) \\ + \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n d_x(j)a_x(k)h_{dx}(j+k-l) \quad (39) \end{aligned}$$

上式の導出では、 $x(t)$ と $e(t)$ の相互相関関数 $R_{xe}(\tau)$ と $x(t)$ と $e_x(t)$ の相互相関関数 $R_{xe_x}(\tau)$ がそれぞれ、インパルス応答を用いて $R_{xe}(\tau) = h_{bx}(-\tau)$ と $R_{xe_x}(\tau) = h_{dx}(-\tau)$ で表されることを用いている (付録の式 (A-6) および (A-8) を参照のこと)。

特に、 $l > m+n$ となるように l を選べば、式 (39) の右辺はゼロとなる。すなわち、

$$\sum_{j=0}^m c_x(j) \left(\sum_{k=0}^n a_x(k)R_{xx}(j+k-l) \right) = 0; \quad l \geq m+n+1. \quad (40)$$

上式において、 $a_x(j)$ は式 (27) を用いて推定できる。また、自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ は観測される時系列 $x(t)$ から推定できる。したがって、式 (3) より $c_x(0) = 1$ であることに留意して、式 (40) を満たす複数個の関係式を用意すれば、それらを連立することにより AR 係数 $c_x(j)$ を計算できる。

5 ARMAMA モデルの振動モード同定への適用

前論文⁵⁾ では、比例減衰系の運動方程式に基づくクロススペクトルを用いて、ARMA モデルによるクロススペクトルから構造物の振動特性が算定できることを示した。しかしながら、実際の構造物は異なる減衰係数を有する材料で構成されているため、一般に非比例減衰系の振動モデルで表され、その固有モードは複素量になる。本章では、非比例減衰系の運動方程式に基づくクロススペクトルとの対比により、前章までに示した ARMAMA モデルによるスペクトル解析法の振動モード同定への適用方法を示す。

5.1 非比例減衰系振動モデルのクロススペクトル表示

N 自由度の非比例減衰系振動モデルについて、状態空間表示による運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) \quad (41)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ および $\mathbf{K}$ は質量、減衰および剛性行列、 $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{f}(t)$ は構造物の相対変位および外力ベクトル、 $\mathbf{I}$ は単位行列を示す。また、 $\cdot$ および $\ddot{\cdot}$ はそれぞれ 1 階ならびに 2 階の微分演算子である。

式 (41) に対する複素固有方程式の解は、 $\mathbf{T}$ を転置記号とすると、 i 次の固有値 p_i と固有ベクトル $\{\phi_i^T, p_i \phi_i^T\}^T$ で与えられる。各次の固有ベクトルを並べた固有モード行列 Φ ($\Phi^T \Phi = \mathbf{I}$ とする) を用いて、モード座標変換を次式で定義する。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{2N} \\ p_1 \phi_1 & p_2 \phi_2 & \cdots & p_{2N} \phi_{2N} \end{bmatrix} \xi(t) \equiv \Phi \xi(t) \quad (42)$$

ここで、 $\xi(t)$ はモーダル応答ベクトルであり、 ϕ_i の節点 j に係わる要素を ϕ_{ji} で表す。また、式 (41) に対する複素固有方程式の固有値および固有ベクトルは共役な複素量として表れるので、 $*$ を共役記号としたとき、 $p_{n+i} = p_i^*$ および $\phi_{n+i} = \phi_i^*$ と定義する。

式(41)に式(42)を代入し、両辺の左から Φ^T を掛けると、モード座標系上の運動方程式は次式で与えられる。

$$\dot{\xi}_i + p_i \xi_i = \Gamma_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, 2N \quad (43)$$

ここで、 $\Gamma_i(t)$ は i 次のモード外力であり、質量行列の逆行列 M^{-1} の要素を m_{jk} としたとき、次式で与えられる。

$$\Gamma_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_i \phi_{ji} m_{jk} f_k(t); \quad i = 1, 2, \dots, 2N \quad (44)$$

インパルス応答 $h_i(t)$ を用いて、式(43)の解は次式で与えられる。

$$\xi_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\eta) \Gamma_i(t-\eta) d\eta \quad (45)$$

$$h_i(t) = \begin{cases} \exp(-p_i t) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (46)$$

実用上は、構造物上の絶対加速度を計測することが多いと考えられるので、本論文では絶対加速度を対象とする。式(41)の相対応答の基準となる固定点の絶対加速度を $\ddot{x}_g(t)$ とすると、式(42)と式(43)より節点 k の絶対加速度応答 $a_k(t)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} a_k(t) &= \ddot{x}_k(t) + \ddot{x}_g(t) \\ &= -\sum_{i=1}^{2N} p_i^2 \phi_{ki} \xi_i(t) + \sum_{i=1}^{2N} p_i \phi_{ki} \Gamma_i(t) + \ddot{x}_g(t) \end{aligned} \quad (47)$$

上式を用いて、構造物上の節点 k と l の間の絶対加速度に関する相互相関関数を計算すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} R_{lk}(\tau) &= E[a_l(t) \cdot a_k(t+\tau)] \\ &= \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} p_i^2 p_j^2 \phi_{li} \phi_{kj} R_{\xi_i \xi_j}(\tau) - \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} p_i^2 p_j \phi_{li} \phi_{kj} R_{\xi_i \Gamma_j}(\tau) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} p_i p_j^2 \phi_{li} \phi_{kj} R_{\Gamma_i \xi_j}(\tau) - \sum_{i=1}^{2N} p_i^2 \phi_{li} R_{\xi_i g}(\tau) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{2N} p_j^2 \phi_{kj} R_{g \xi_j}(\tau) + \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} p_i p_j \phi_{li} \phi_{kj} R_{\Gamma_i \Gamma_j}(\tau) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2N} p_i \phi_{li} R_{\Gamma_i g}(\tau) + \sum_{j=1}^{2N} p_j \phi_{kj} R_{g \Gamma_j}(\tau) + R_{gg}(\tau) \end{aligned} \quad (48)$$

ここで、 $R_{\xi_i \xi_j}(\tau)$ は $\xi_i(t)$ と $\xi_j(t)$ の、 $R_{\xi_i \Gamma_j}(\tau)$ は $\xi_i(t)$ と $\Gamma_j(t)$ の、 $R_{\xi_i g}(\tau)$ は $\xi_i(t)$ と $\ddot{x}_g(t)$ の、 $R_{\Gamma_i g}(\tau)$ は $\Gamma_i(t)$ と $\ddot{x}_g(t)$ の相互相関関数であり、 $R_{gg}(\tau)$ は $\ddot{x}_g(t)$ の自己相関関数を示す。

式(45)より、 $R_{\xi_i \xi_j}(\tau)$ 、 $R_{\xi_i \Gamma_j}(\tau)$ および $R_{\xi_i g}(\tau)$ は、

$$R_{\xi_i \xi_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\eta) h_j(\zeta) \cdot R_{\Gamma_i \Gamma_j}(\tau + \eta - \zeta) d\eta d\zeta \quad (49)$$

$$R_{\xi_i \Gamma_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\eta) \cdot R_{\Gamma_i \Gamma_j}(\tau + \eta) d\eta \quad (50)$$

$$R_{\xi_i g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\eta) \cdot R_{\Gamma_i g}(\tau + \eta) d\eta \quad (51)$$

と表される。ここで、 $R_{\Gamma_i \Gamma_j}(\tau)$ は $\Gamma_i(t)$ と $\Gamma_j(t)$ の相互相関関数である。 $R_{\Gamma_i \Gamma_j}(\tau)$ 、 $R_{\Gamma_i g}(\tau)$ および $R_{gg}(\tau)$ に対応するクロススペクトル $S_{\Gamma_i \Gamma_j}(\omega)$ 、 $S_{\Gamma_i g}(\omega)$ および $S_{gg}(\omega)$ は、Wiener-Khintchine の関係を用いて次式で表される。

$$R_{\Gamma_i \Gamma_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Gamma_i \Gamma_j}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (52)$$

$$R_{\Gamma_i g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Gamma_i g}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (53)$$

$$R_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (54)$$

ここで、 ω は円振動数である。同様に、節点 l と k のクロススペクトル $S_{lk}(\omega)$ は次式で表される。

$$R_{lk}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{lk}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (55)$$

式(49)~式(55)を式(48)に代入した後、ラプラス平面上に写像し、さらに、ラプラス演算子 s の関数 $\bar{P}_i^k(s)$ 、 $\hat{P}_j^l(s)$ および $P_0^{lk}(s)$ を新たに定義して整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} S_{lk}(s) &= \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} p_i^2 p_j^2 \phi_{li} \phi_{kj} H_i^*(s) H_j(s) S_{\Gamma_i \Gamma_j}(s) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{2N} p_i^2 \phi_{li} H_i^*(s) \bar{P}_i^k(s) - \sum_{j=1}^{2N} p_j^2 \phi_{kj} H_j(s) \hat{P}_j^l(s) + P_0^{lk}(s) \end{aligned} \quad (56)$$

ここで、

$$\bar{P}_i^k(s) = \sum_{j=1}^{2N} p_j \phi_{kj} S_{\Gamma_i \Gamma_j}(s) + S_{\Gamma_i g}(s) \quad (57)$$

$$\hat{P}_j^l(s) = \sum_{i=1}^{2N} p_i \phi_{li} S_{\Gamma_i \Gamma_j}(s) + S_{\Gamma_j g}(s) \quad (58)$$

$$\begin{aligned} P_0^{lk}(s) &= \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} p_i p_j \phi_{li} \phi_{kj} S_{\Gamma_i \Gamma_j}(s) + \sum_{i=1}^{2N} p_i \phi_{li} S_{\Gamma_i g}(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2N} p_j \phi_{kj} S_{\Gamma_j g}(s) + S_{gg}(s) \end{aligned} \quad (59)$$

$$H_j(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\eta) \exp(-s\eta) d\eta \quad (60)$$

である。ここで、式(41)に示す振動モデルの固有値と外力ベクトル $f(t)$ および固定点の絶対加速度のそれぞれの極が一致しないという仮定を導入する。すなわち、式(56)~(59)について、 $H_i^*(s)$ および $H_j(s)$ の極は $S_{\Gamma_i \Gamma_j}(s)$ 、 $S_{\Gamma_i g}(s)$ および $S_{gg}(s)$ の極とは一致しないと仮定すると、付録A.2に導出したシステム関数を用いて、式(56)の第1項~第3項については次式で表せられる。

$$H_i^*(s) H_j(s) S_{\Gamma_i \Gamma_j} = \frac{\bar{A}_{ij}}{s - p_i} + \frac{\hat{A}_{ji}}{s + p_j} + Q_{ij}(s) \quad (61)$$

$$H_i^* \bar{P}_i^k(s) = \frac{\bar{A}_{0i}^k}{s - p_i} + \bar{Q}_{0i}^k(s) \quad (62)$$

$$H_j \hat{P}_j^l(s) = \frac{\hat{A}_{0j}^l}{s + p_j} + \hat{Q}_{0j}^l(s) \quad (63)$$

ここで、

$$\bar{A}_{ij} = H_i^*(s) H_j(s) S_{\Gamma_i \Gamma_j} \cdot (s - p_i) \Big|_{s=p_i} \quad (64)$$

$$\hat{A}_{ji} = H_i^*(s) H_j(s) S_{\Gamma_i \Gamma_j} \cdot (s + p_j) \Big|_{s=-p_j} \quad (65)$$

$$\bar{A}_{0i}^k = H_i^*(s) \bar{P}_i^k(s) \cdot (s - p_i) \Big|_{s=p_i} \quad (66)$$

$$\hat{A}_{0j}^l = H_j(s) \hat{P}_j^l(s) \cdot (s + p_j) \Big|_{s=-p_j} \quad (67)$$

である。また、 $Q_{ij}(s)$ 、 $\bar{Q}_{0i}^k(s)$ および $\hat{Q}_{0j}^l(s)$ は剰余関数であり、これらの関数は振動モデルの固有値と共通の極を有しない。

式 (61)~式 (63) を式 (56) に代入すると次式を得る。

$$S_{lk}(s) = \sum_{j=1}^{2N} \left(\frac{\phi_{kj} \hat{B}_j^l}{s + p_j} + \frac{\phi_{kj}^* \hat{B}_j^{l*}}{s + p_j^*} + \frac{\phi_{lj} \hat{B}_j^k}{s - p_j} + \frac{\phi_{lj}^* \hat{B}_j^{k*}}{s - p_j^*} \right) + B_0^{lk}(s) \quad (68)$$

ここで、

$$\hat{B}_j^k = p_j \left(\sum_{i=1}^{2N} p_i^2 \phi_{ki} \bar{A}_{ji} + \bar{A}_{0j}^k \right) \quad (69)$$

$$\hat{B}_j^l = p_j \left(\sum_{i=1}^{2N} p_i^2 \phi_{li} \bar{A}_{ji} + \bar{A}_{0j}^l \right) \quad (70)$$

$$B_0^{lk}(s) = \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} p_i p_j \phi_{li} \phi_{kj} Q_{ij}(s) + \sum_{j=1}^{2N} p_j^2 (\phi_{lj} \bar{Q}_{0j}^k(s) + \phi_{kj} \bar{Q}_{0j}^l(s)) + P_0^{lk}(s) \quad (71)$$

である。上式の導出では、振動モデルの固有値および固有ベクトルに $p_j^* = p_{n+j}$ および $\phi_j^* = \phi_{n+j}$ の関係があることを用いた。

振動モデルの節点 k と l の絶対加速度のクロススペクトルは、式 (68) で表される。また、式 (68) において $k=l$ とすれば、節点 l の絶対加速度のパワースペクトル $S_{ll}(s)$ が得られる。

なお、式 (47) の代わりに絶対速度や絶対変位を用いても、上記と同様にして、クロススペクトルは式 (68) の形式で表示される。

5.2 ARMAMA モデルによる振動特性の同定法

前節で導出した振動モデルのクロススペクトルを用いて、ARMAMA モデルによるスペクトル推定値から振動モデルの振動特性を同定する方法を示す。

ARMAMA モデルのクロススペクトルである式 (25) について、 $A_x(z^{-1}) = 0$ として導かれる極を $z = z_{x1}, z_{x2}, \dots, z_{xn}$ とすると、 $A_x(z) = 0$ としたときの極は $z = z_{x1}^{-1}, z_{x2}^{-1}, \dots, z_{xn}^{-1}$ となる。同様に、 $A_y(z^{-1}) = 0$ の極を $z = z_{y1}, z_{y2}, \dots, z_{yn}$ とし、 $a_x(0) = 1$ 、 $a_y(0) = 1$ であることに留意すると、式 (25) は次式で表される。

$$S_{xy}(z^{-1}) = \frac{\sum_{l=-n}^n R_{rs}(l) z^{n-l}}{a_x(n) \prod_{k=1}^n (z - z_{xk}^{-1}) \prod_{k=1}^n (z - z_{yk})} \quad (72)$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\beta_j z}{z - z_{xj}^{-1}} + \frac{\gamma_j z}{z - z_{yj}} \right) + S_{xy0} \quad (73)$$

ここで、 β_j および γ_j はそれぞれ極 z_{xj}^{-1} および z_{yj} の複素留数であり、 z_{xj}^{-1} および z_{yj} の全ての極が重複しないと仮定すると、

$$\beta_j = S_{xy}(z^{-1}) \frac{z - z_{xj}^{-1}}{z} \Big|_{z=z_{xj}^{-1}} \quad (74)$$

$$\gamma_j = S_{xy}(z^{-1}) \frac{z - z_{yj}}{z} \Big|_{z=z_{yj}} \quad (75)$$

で表される。また、定数項 S_{xy0} は次式で与えられる。

$$S_{xy0} = \frac{R_{rs}(n)}{a_x(n)} \quad (76)$$

式 (73) を標準 z 変換¹⁴⁾ に基づいて z 平面からラプラス平面に写像すると、次式が得られる。

$$S_{xy}(s) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\beta_j}{s - (-s_{xj})} + \frac{\gamma_j}{s - s_{yj}} \right) + S_{xy0} \quad (77)$$

ここで、 $-s_{xj}$ および s_{yj} はラプラス平面上での極であり、 z 平面上での z_{xj}^{-1} および z_{yj} に対応する。式 (68) より振動モデルのクロススペクトルにおいて振動特性に係わる極と留数は共役複素数としてあらわれるので、式 (77) において振動特性を表す項 ($j = 1 \sim m_a$ とする) とそれ以外の項を分離すると、次式のように表せる。

$$S_{xy}(s) = \sum_{j=1}^{m_a} \left(\frac{\beta_j}{s - (-s_{xj})} + \frac{\beta_j^*}{s - (-s_{xj}^*)} + \frac{\gamma_j}{s - s_{yj}} + \frac{\gamma_j^*}{s - s_{yj}^*} \right) + \sum_{j=2m_a+1}^m \left(\frac{\beta_j}{s - (-s_{xj})} + \frac{\gamma_j}{s - s_{yj}} \right) + S_{xy0} \quad (78)$$

同様の手順により、式 (38) のパワースペクトルは、

$$S_{xx}(s) = \sum_{j=1}^{m_a} \left(\frac{\beta_j'}{s - (-s_{xj})} + \frac{\beta_j'^*}{s - (-s_{xj}^*)} + \frac{\gamma_j'}{s - s_{xj}} + \frac{\gamma_j'^*}{s - s_{xj}^*} \right) + \sum_{j=2m_a+1}^m \left(\frac{\beta_j'}{s - (-s_{xj})} + \frac{\gamma_j'}{s - s_{xj}} \right) + S_{xx0}(s) \quad (79)$$

と表される。ここで、

$$\beta_j' = S_{xx}(z^{-1}) \frac{z - z_{xj}^{-1}}{z} \Big|_{z=z_{xj}^{-1}} \quad (80)$$

$$\gamma_j' = S_{xx}(z^{-1}) \frac{z - z_{xj}}{z} \Big|_{z=z_{xj}} \quad (81)$$

であり、 $S_{xx0}(s)$ は $C_x(z) = 0$ および $C_x(z^{-1}) = 0$ から導かれる極に関する成分を含む関数である。

さて、振動モデルによるスペクトルを表す式 (68) によれば、節点 k および l の選び方に係わらず、応答波形のクロススペクトルは共通の極 $-p_j, -p_j^*, p_j$ および p_j^* を有し、それらは振動モデルの固有値に対応する。一方で、ARMAMA モデルによる式 (78) および式 (79) のスペクトルをそのまま使用すると、 $x(t)$ と $y(t)$ に対する応答データの組み合わせごとに、振動特性の固有値に対応する極 s_{xj}, s_{yj} 等が得られるため、それらの極に対して何らかの平均化操作を行い、固有値の同定値をひとつに決める必要がある。

本論文では、式 (1) および式 (2) で定義した ARMAMA モデルにおいて、AR 係数 $a_x(k)$ と $a_y(k)$ を共通の係数 $a(k)$ とおき、さらにクロススペクトルを算定する際の応答データの選び方に係わらず $a(k)$ を共通のものとして取り扱うことにする¹⁵⁾。そして、 $a(k)$ は、複数の応答データの組み合わせによる相互相関関数を用いて式 (27) および式 (28) を構成し、それらを連立させることにより推定する。このようにして推定された $a(k)$ から導かれる極を s_j とすると、式 (78) および式 (79) よりクロススペクトルおよびパワースペクトルは次式で表される。

$$S_{xy}(s) = \sum_{j=1}^{m_a} \left(\frac{\beta_j}{s - (-s_j)} + \frac{\beta_j^*}{s - (-s_j^*)} + \frac{\gamma_j}{s - s_j} + \frac{\gamma_j^*}{s - s_j^*} \right) + \sum_{j=2m_a+1}^m \left(\frac{\beta_j}{s - (-s_j)} + \frac{\gamma_j}{s - s_j} \right) + S_{xy0} \quad (82)$$

$$S_{xx}(s) = \sum_{j=1}^{m_a} \left(\frac{\beta_j'}{s - (-s_j)} + \frac{\beta_j'^*}{s - (-s_j^*)} + \frac{\gamma_j'}{s - s_j} + \frac{\gamma_j'^*}{s - s_j^*} \right) + \sum_{j=2m_a+1}^m \left(\frac{\beta_j'}{s - (-s_j)} + \frac{\gamma_j'}{s - s_j} \right) + S_{xx0}(s) \quad (83)$$

式 (68) において、付録 A.2 より $\text{Re}[p_j] > 0$ であるから、総和内の第 1 項および第 2 項の極はラプラス平面の左半面に、第 3 項および第 4 項は右半面にそれぞれ存在する。一方で、式 (82) および式 (83) において、 $A(z^{-1}) = 0$ の解である s_j は減衰振動系の場合、ラプラス平面上の左半面に存在するので、それぞれの式の総和内の第 1 項および第 2 項は右半面に、第 3 項と第 4 項は左半面にそれぞれ存在する。これら極の配置が一致するように対応する留数を等値すると、次式の関係が得られる。

$$\beta_j = \phi_{lj} \hat{B}_j^k, \quad \gamma_j = \phi_{kj} \hat{B}_j^l \quad (84)$$

いま、 $x(t)$ を応答点 l に固定し、 $y(t)$ を応答点 $k = 1 \sim N$ と順に選択しながら、クロススペクトル ($k \neq l$ のとき) およびパワースペクトル ($k = l$ のとき) を算定したとする。その際に算定される留数 γ_j および γ_j^* を γ_j^{lk} とすると、それらを並べたベクトルは式 (84) より次式のように表され、固有モードに比例する。

$$\{\gamma_j\}^T \equiv \{\gamma_j^{l1}, \gamma_j^{l2}, \dots, \gamma_j^{lN}\}^T \\ = \{\phi_{1j}, \phi_{2j}, \dots, \phi_{Nj}\}^T \times \hat{B}_j^l \quad (85)$$

上記の $\{\gamma_j\}$ を基準化することにより、固有モードが得られる。また、式 (85) の γ_j において振動モデルの外力 $\hat{B}_j^l$ に含まれるため、固有モードの同定値は外力条件に依存して変化しないといえる。

さらに、式 (85) の $\{\gamma_j\}$ に対応する j 次の極 s_j より、 j 次の固有円振動数 ω_j およびモード減衰比 h_j は次式で算定される¹⁶⁾。

$$\omega_j = |s_j| \quad (86)$$

$$h_j = -\cos \arg s_j \quad (87)$$

6 実測データによる適用例

構造物の常時微動記録に対して、前述のスペクトル解析法ならびに振動特性の同定法を適用した例を示す。対象構造物は四国電力橋湾発電所内の大型貯炭サイロのうちの No.3 サイロであり、鉄筋コンクリート製の円筒シェル構造 (内径 46m、高さ 80m) である。計測時には、内部の石炭はほぼ満載の状態 (貯炭量: 約 7 万トン) であった。計測点はサイロの基礎板上と屋上に筒体円周に沿って 30 度ピッチで設け、南側半面もしくは北側半面に分けて三成分加速度計を設置し、それぞれ 60 分間の多点同時観測により応答データを取得した。その際、サイロの半面ずつの固有モードを全体のものに換算するため、サイロの東側および西側の 2 点の計測点については、南側半面および北側半面の両計測時とともに計測を実施した。

解析にあたっては、対象とする振動数範囲を 1.0~6.0Hz とし、低振動数の同定精度を向上させるため加速度記録を速度波形に変換した後、200Hz の計測データを 12.5Hz で再サンプリングしたものを 10 分間の小サンプルに分割して、同定用のサンプルデータとした。クロススペクトルを算定する際には、屋上東側に設置した加速度計の円筒法線方向 (東西方向) もしくは接線方向 (南北方向) の水平成分を基準波形とした。ARMAMA モデルの次数は、スペクトルの形状を FFT による推定値と比較することにより、 $n = m = 20$ に決定した。また、AR 係数 $a(k)$ および $c_x(k)$ は特異値分解法を用いて推定し、最大特異値との比で 1/100 以上の特異値のみを用いた。特に、AR 係数 $a(k)$ の算定にあたっては、基準波形と屋上の全ての計測点の水平二成分の間の相互相関関数の推定値を用いた。

図 1 は、基準点である東側計測点と参照点のひとつである北側計測点の 10 分間の応答データを用いて、南北成分および東西成分のクロススペクトルを算定した結果であり、ARMAMA モデルによる推定結果を実線で、ARMA モデル⁵⁾ による推定結果を破線

図 1 屋上応答のクロススペクトル (東側と北側計測点)

で、高速フーリエ変換 (FFT) による結果を点でそれぞれ示した。また、図中の▼印および番号は同定された振動特性に対応する共振峰を示し、番号は固有振動数の小さいものから順に付した次数を表す。なお、ARMA モデルによる推定は前述の ARMAMA モデルによる推定と同じ解析条件で実施し、FFT による推定は、10 分間の応答データを時間長 20.48 秒間、29 セットのサンプルに分割して、それらのアンサンブル平均を推定値とした。

同図によれば、ARMAMA モデルによるクロススペクトルの推定結果はおおむね FFT によるものと一致している。一方で、ARMA モデルによる推定では、南北成分に関する図 1-(a) によれば、2.6Hz、3.4Hz および 4.0Hz 付近の 3 つの共振峰は ARMAMA モデルならびに FFT による推定結果と一致するものの、3.6Hz 付近にも共振峰が現われている。この振動成分は、基準波形に特有な成分を検出しているものと思われる。

次に、固有モードの同定結果について、屋上の各計測点における水平面内の軌跡を表示したものを図 2 に示す。ここで、これら固有モードの中で、1 次、3 次および 6 次はクロススペクトルの基準波形を東側計測点の南北成分としたときに、2 次、4 次および 5 次は東西成分としたときに、それぞれ同定された結果である。1 次および 2 次の振動特性はそれぞれ南北方向および東西方向の並進振動モードである。3 次および 4 次はともに周方向次数 2 のオーバル振動モードであるが、互いの振動軸は周方向に 45 度傾いている。5 次は周方向次数 3 のオーバル振動モードとなっている。6 次には再び南北方向の並進振動モードが表れているが、これは 1 次とは内部の石炭の挙動が異なるものと推測される。このように、本論文で提案した同定手法を貯炭サイロの常時微動記録に適用することにより、その振動特性を 6 次まで同定することができた。

7 結語

振動計測による構造物の振動特性評価を想定して、ARMAMA モデルによるスペクトル解析法を導出するとともに、振動モード同定への適用法について述べた。さらに、大型貯炭サイロの常時微動計測データに対して本手法を適用し、スペクトルの解析結果ならびに振動特性の同定結果が良好に得られることを示した。

提案手法は、前論文⁵⁾ で提案した ARMA モデルのクロススベ

(a) 1次 (2.54Hz, 1.44%)

(b) 2次 (2.60Hz, 1.51%)

(c) 3次 (3.22Hz, 0.96%)

(d) 4次 (3.42Hz, 0.90%)

(e) 5次 (4.08Hz, 1.06%)

(f) 6次 (4.50Hz, 1.20%)

(注) (f_j, h_j) は j 次固有振動数 f_j 、減衰比 h_j の同定値を示す。

図2 屋上部分の固有モード

クトルに基づく振動モード同定手法とは異なり、局所的な振動成分を除去した上で、地盤を含めた構造物全体の振動特性を精度良く同定することができる。また、提案手法は、前論文の同定法と同様にクロススペクトルに基づいた手法であるため、従来から多用されている伝達関数に基づく同定手法とは異なり、常時微動記録のような未知多入力の振動システムにも適用できること、測定条件が通常あまり良くない基礎や地表上の計測点を基準点とせず、応答が最も励起されやすい計測点を基準点にできること等の特徴を有する。特に、同定された振動特性は振動モデルの入力条件には全く依存しないので、常時微動応答に含まれる風力による振動成分はノイズ成分とはならない。

謝辞

貯炭サイロの常時微動計測については、四国電力(株)建設部の宮住勝彦氏ならびに(財)電力中央研究所の矢花修一氏の協力を得た。

参考文献

- 1) 濱本卓司: 建築物のヘルスマニタリング, 性能評価における地震荷重と風荷重, 日本建築学会関東支部, 構造専門研究委員会, pp.41-46, 1999.3.
- 2) 瀬川柳太郎, 山本鎮男, 曾根彰, 増田新, 加宏明: 常時微動加速度観測波形のウェーブレット変換によるシステムパラメータの同定, 日本建築学会構造系論文集, 第519号, pp. 41-46, 1999.5.
- 3) 中村充, 竹脇出, 安井謙, 上谷宏二: 限定された地震観測記録を用いた建築物の剛性と減衰の同時同定, 日本建築学会構造系論文集, 第528号, pp. 75-82, 2000.2.
- 4) 濱本卓司, 大谷桂治, 三好敏晴: アクティブ同定手法を用いた多層建築物の損傷検出, 日本建築学会構造系論文集, 第539号, pp. 51-56, 2001.1.
- 5) 金澤健司, 平田和太: クロススペクトル推定法による多自由度系構造物の振

動モード同定, 日本建築学会構造系論文集, 第529号, pp. 89-96, 2000.3.

- 6) 金澤健司, 平田和太: クロススペクトルによる振動モード同定手法の常時微動記録に対する適用性について, 日本建築学会学術講演梗概集(構造I), pp.409-410, 2000.9.
- 7) 日野幹雄: スペクトル解析, pp.56-63, 朝倉書店, 1977.10.
- 8) A. Ahlen and M. Sternad: Wiener filter design using polynomial equations, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 39, No. 11, pp. 2387-2399, 1991.
- 9) M. Morf, A. Vieira, D.T.L. Lee and T. Kailath: Recursive multichannel maximum entropy spectral estimation, IEEE Trans. on Geoscience electronics, Vol. GE-16, No. 2, pp. 85-94, 1978.
- 10) M. Chakraborty and S. Prasad: Multichannel ARMA modeling by least squares circular lattice filtering, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 42, No. 9, pp. 2304-2318, 1994.
- 11) 中溝高好: 信号解析とシステム同定, pp.95-113, コロナ社, 1988.3.
- 12) Kaveh, M.: High resolution spectral estimation for noisy signals, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-27, No.3, pp.286-287, 1979.6.
- 13) J.A. Cadzow, B. Baseghi and T. Hsu: Singular-value decomposition approach to time series modelling, Proc. IEEE, Vol. 130, Pt.F, No. 3, pp. 202-210, 1983.
- 14) 小島紀男, 篠崎寿夫: z変換入門, pp.116-132, 東海大学出版会, 1981.9.
- 15) 金澤健司: ARMAMAモデルによるクロススペクトルの評価法, 日本建築学会学術講演梗概集(構造I), pp.277-278, 2001.9.
- 16) 鈴木浩平, 中嶋明: A R時系列解析法の特徴を利用した振動系の減衰比推定法, 日本機械学会論文集(C編), 48巻433号, pp.1389-1397, 1982.9.

A 付録

A.1 相関関数の計算

式(19)~(22)の補助変数 $u(t)$ 、 $v(t)$ のインパルス応答による表示式、およびスペクトル解析法の導出において用いた相関関数は次式で表される。

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{dx}(j) e_x(t-j) \quad (\text{A-1})$$

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{dy}(j) e_y(t-j) \quad (\text{A-2})$$

$x(t)$ と $v(t)$ の相互相関関数 $R_{xv}(\tau)$;

$$R_{xv}(\tau) = E[x(t) \cdot v(t+\tau)] = 0 \quad (\text{A-3})$$

$y(t)$ と $u(t)$ の相互相関関数 $R_{yu}(\tau)$;

$$R_{yu}(\tau) = E[y(t) \cdot u(t+\tau)] = 0 \quad (\text{A-4})$$

$u(t)$ と $v(t)$ の相互相関関数 $R_{uv}(\tau)$;

$$R_{uv}(\tau) = E[u(t) \cdot v(t+\tau)] = 0 \quad (\text{A-5})$$

$x(t)$ と $e(t)$ の相互相関関数 $R_{xe}(\tau)$;

$$R_{xe}(\tau) = E[x(t) \cdot e(t+\tau)] = h_{bx}(-\tau) \quad (\text{A-6})$$

$y(t)$ と $e(t)$ の相互相関関数 $R_{ye}(\tau)$;

$$R_{ye}(\tau) = E[y(t) \cdot e(t+\tau)] = h_{by}(-\tau) \quad (\text{A-7})$$

$x(t)$ と $e_x(t)$ の相互相関関数 $R_{xe_x}(\tau)$;

$$R_{xe_x}(\tau) = E[x(t) \cdot e_x(t+\tau)] = h_{dx}(-\tau) \quad (\text{A-8})$$

A.2 システム関数の導出

式(46)を式(60)に代入することにより、 j 次モードのシステム関数は次式のように導出される。

$$H_j(s) = \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\exp[-\text{Re}[p_j]r]}{\exp[(\text{Im}[p_j] + s)r]} - 1 \right) \times \frac{1}{-p_j - s} \quad (\text{A-9})$$

ここで、 $\text{Re}[p_j]$ および $\text{Im}[p_j]$ は p_j の実数値および虚数値である。 $\text{Re}[p_j] > 0$ のとき式(A-9)の極限項は0に収束し、システム関数 $H_j(s)$ は次式で表される。

$$H_j(s) = \frac{1}{p_j + s}; \text{Re}[p_j] > 0 \quad (\text{A-10})$$

(2001年10月2日原稿受理, 2001年12月26日採用決定)