ひずみ硬化および塑性領域長を考慮した弾塑性梁要素に関する一考察

—単調載荷の場合—

A STUDY ON ELASTO-PLASTIC BEAM ELEMENT CONSIDERED
PLASTIC HARDENING AND PLASTIC REGION SIZE

—In case of monotonic loading—

元結 正次郎*, 白 奇 烈**, 金子 健 作**

Shojiro MOTOYUI, Ki Youl BAEK and Kensaku KANEKO

In analyzing structures composed of many members, the plastic hinge method or multi-spring model is applied to simulate the elastoplastic behavior of each member. The plastic hinge method is convenient to analyze the elastoplastic behavior. The method is sometimes applied to the elastoplastic problem with hardening, but it can not evaluate to expansion of the plastic region. This is because the consideration of plastic region is contradictory to the basic concept of the plastic hinge method. In comparison, the standard FEM enables us to solve those problems but it is very costly method. So in this paper, we suggest a convenient analytical method for the beams consists of two flanges with plastic hardening property. The numerical results prove the validity and the effectiveness of the present method through the comparisons with results by the standard FEM

Keywords: elastoplastic-beam element, hardening, plastic region size, thermodynamics, plastic dissipation

弾塑性梁要素、ひずみ硬化、塑性領域長、熱力学、塑性散逸

1. はじめに

骨組構造の弾塑性挙動を効率よくシミュレーションするための手法として塑性ヒンジ法やマルチスプリングモデルが挙げられる。この手法は簡便さが故に研究・設計に広く用いられており、主として、梁部材には単純塑性ヒンジモデルが、柱やトラス部材など軸力の影響が大きい部材には一般化塑性ヒンジモデルが使われている。またマルチスプリングモデルは、スプリング長の設定など問題は含んでいるものの局部座屈などへの拡張性なども評価されている¹⁾。

一般に実在の鉄骨部材には材料特性に起因するひずみ硬化現象が存在する。このひずみ硬化現象を有する部材を解析する場合にも塑性ヒンジモデルが適用される場合がある。この場合には、硬化則としてPrager則に基づく移動硬化則を用いた定式化による解析手法が適用される。しかしながら、ひずみ硬化を考える場合、特に、軸力が大きい場合には、塑性領域が材軸方向に進展することは周知のことであり、塑性領域は大きさを持たないものとして本来定式化される塑性ヒンジモデルを適用することは基本概念上の矛盾が生じる。マルチスプリングモデルも塑性領域の進展を系統的に考慮することは困難である(付録参照)。このような塑性領域の広がりを考慮する場合には、部材内部に参照点あるいは参照断面において塑性化を考慮した応力あるいは断面力を算出し、これを数値積分することにより部材の材端力ベクトルおよび接線剛性マトリクスを求める方法が

古くから採用されている。ファイバーモデルもこの1つである。これらの方法は精度的な問題は少ないが、かなりの計算時間を必要とするために、実在の建物全体を解析するための手法とは言い難い。

そこで、本論文では、Fig.1に示すような断面を2フランジモデルとする柱梁部材を対象として、塑性領域の大きさを評価する実用的解法を提案する。まず、2節にて、フランジの特性が与えられた場合の弾塑性問題を文献6で示したトラス梁の連続体置換モデルと同様の方法により記述する。局所的硬化現象がPrager則に従う場合であっても、この局所的硬化の材端力に対する影響はPrager則として表すことはできないことを示す。次に、2節で得られた基礎式を基に塑性領域長が梁の降伏後の挙動に及ぼす影響について示した後、実用的力学モデルおよびこれの解法について示す。

なお、本論文では、記述の簡略化のために、 J 節点にはモーメントは作用しない($M_J=0$)ものとし、考えるべき材端力空間を($N, M_I (=M)$)平面とする(Fig.1 参照)。

Fig.1 Two-flange model

* 東京工業大学大学院人間環境システム専攻 助教授・工博

** 東京工業大学大学院人間環境システム専攻 大学院生

Assoc. Prof., Dept. of Built Environment, Interdisciplinary Graduate School, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.
Graduate Student, Dept. of Built Environment, Interdisciplinary Graduate School, Tokyo Institute of Technology

2. 移動硬化則を含む基礎式の誘導—2 フランジモデル—

本節では、梁断面を2フランジモデルとした上で、これに関する基礎式を誘導し、特に、本論文で対象とする問題自体の明確化およびひずみ硬化の適切な評価方法について明らかにする。なお、せん断の影響については無視する。

上下フランジの弾性構成則、降伏条件式、塑性流れ則、および硬化則を次のように表されるものとする。ここでは、硬化則として移動硬化則のみを考えることとする。

$$n_i^{\pm} = E a (\epsilon_i^{\pm} - \epsilon_i^{\pm*}), \quad \phi_i^{\pm} = \frac{|n_i^{\pm} - \alpha_i^{\pm}|}{n_Y} - 1 \leq 0 \quad (1.a,b)$$

$$\epsilon_i^{\pm*} = \frac{n_i^{\pm} - \alpha_i^{\pm}}{|n_i^{\pm} - \alpha_i^{\pm}|} \frac{1}{n_Y} \dot{\gamma}_i^{\pm}, \quad \alpha_i^{\pm} = \frac{n_i^{\pm} - \alpha_i^{\pm}}{|n_i^{\pm} - \alpha_i^{\pm}|} \frac{E_T a}{n_Y} \dot{\gamma}_i^{\pm} \quad (1.c,d)$$

ここに、 n_i , ϵ_i , ϵ_i^* , α_i , γ_i はフランジの微小線要素 i における軸力、軸ひずみ、軸ひずみ塑性成分、移動硬化を表す Back-stress および塑性進展パラメータであり、 E , E_T , a , n_Y はヤング係数、硬化係数、フランジ断面積および初期降伏軸力を表す定数である。また、ドットは時間に対する変化率（速度）を表し、 $\pm$ はフランジ位置（上下など）を表す。このような特性を持つフランジから成る梁の自由エネルギー Ψ は以下のように表される⁴⁾。

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n (E a \epsilon_i^{\pm*2} + E_T a \epsilon_i^{\pm*2}) \Delta l_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (E a \epsilon_i^{\pm*2} + E_T a \epsilon_i^{\pm*2}) \Delta l_i \right] \quad (2)$$

ここに、 $\epsilon_i^{\pm}$ は各フランジ軸ひずみの弾性成分、 $\epsilon_i^{\pm*}$ は Back-stress に対する各フランジ軸ひずみ（以下、硬化ひずみと呼ぶ）であり、 n は材軸方向分割数であり、 Δl_i は分割長さ（ L/n ； L は材長）である。なお、本来連続体の場合には $n \rightarrow \infty$ として積分表示にするのが一般的であるが、論旨を明確にするために本節では有限分割としている。

ここで、 $\epsilon_i^{\pm}$ および $\epsilon_i^{\pm*}$ を断面中央位置における諸量にて表すこととし、以下のように表されるものとする。

$$\epsilon_i^{\pm} = \epsilon_i^0 \pm \frac{h}{2} \kappa_i, \quad \epsilon_i^{\pm*} = \epsilon_i^{0*} \pm \frac{h}{2} \kappa_i^* = \epsilon_i^0 - \epsilon_i^{0*} \pm \frac{h}{2} (\kappa_i - \kappa_i^*) \quad (3.a)$$

$$\epsilon_i^{\pm*} = \epsilon_i^{0*} \pm \frac{h}{2} \kappa_i^* \quad (3.b)$$

ここに、 ϵ_i^0 , κ_i および ϵ_i^{0*} , κ_i^* は断面中央位置における軸ひずみまたは曲げひずみの全成分および塑性成分であり、 ϵ_i^{0*} , κ_i^* は同硬化ひずみを示す。 h は梁成である。複号は同順とする。これらを式(2)に代入することにより、次式が得られる。

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(E A (\epsilon_i^0 - \epsilon_i^{0*})^2 + E I (\kappa_i - \kappa_i^*)^2 \right) \Delta l_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (E_T A \epsilon_i^{0*2} + E_T I \kappa_i^{*2}) \Delta l_i \quad (4.a)$$

$$A = 2a, \quad I = ah^2/2 \quad (4.b)$$

ここに、 A , I は梁としての断面積および断面2次モーメントである。上式の第1項は弾性エネルギーであるから、次のように書きなおすことができる。

$$\Psi = \frac{1}{2} (u - u_p)^T k^* (u - u_p) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (E_T A \epsilon_i^{0*2} + E_T I \kappa_i^{*2}) \Delta l_i \quad (5.a)$$

$$u^T = \langle u \ \theta \rangle, \quad u_p^T = \langle u_p \ \theta_p \rangle \quad (5.b,c,d)$$

$$k^* = \begin{bmatrix} k^N & 0 \\ 0 & k^M \end{bmatrix}, \quad k^N = \frac{EA}{L}, \quad k^M = \frac{3EI}{L} \quad (5.e,f,g)$$

ここに、 u , u_p は節点(相対)変位ベクトルの全成分および塑性成分、 k^* は梁の剛性マトリクス（弾性構成則に相当）である。

ここで、材端力ベクトル $f^T = \langle N \ M \rangle$ を考え、上記の自由エネルギー

の変化率を Clausius-Duhem の不等式 $-\dot{\Psi} + f^T \dot{u} \geq 0$ に代入する。

$$\{f - k^* (u - u_p)\}^T \dot{u} + (u - u_p)^T k^* \dot{u}_p - \sum_{i \in \text{active}} (E_T A \epsilon_i^{0*} \dot{\epsilon}_i^{0*} + E_T I \kappa_i^* \dot{\kappa}_i^*) \Delta l_i \geq 0 \quad (6)$$

上記の総和記号は塑性負荷状態にある区間の総和を表す。この不等式が任意の変位速度について成り立つための条件として次式が得られる。

$$f = k^* (u - u_p) \quad (7.a)$$

$$\Gamma = f^T \dot{u}_p + \sum_{i \in \text{active}} (N_i^* \dot{\epsilon}_i^{0*} + M_i^* \dot{\kappa}_i^*) \Delta l_i \geq 0 \quad (7.b)$$

$$\text{ここに、} N_i^* = -E_T A \epsilon_i^{0*}, \quad M_i^* = -E_T I \kappa_i^* \quad (7.c)$$

式(7.b)の表現から、 f , N_i^* , M_i^* は u_p , ϵ_i^{0*} , κ_i^* に対する熱力学的力に相当することが理解される。個材の軸力および Back-stress は参照断面 i における軸力 N_i , 曲げモーメント M_i および N_i^* , M_i^* により、

$$n_i^{\pm} = \frac{N_i \pm M_i}{2} \pm \frac{M_i^*}{2} \pm \frac{M_i^*}{h} \quad (8)$$

と表され、これを式(1.b)の個材の降伏条件式に代入する。

$$\phi^i = \left| \frac{N_i - N_i^*}{N_Y} \pm \frac{M_i - M_i^*}{M_p} \right| - 1 = \left| \frac{N_i - N_i^*}{N_Y} \right| + \left| \frac{M_i - M_i^*}{M_p} \right| - 1 \leq 0 \quad (9)$$

ここに、 N_Y , M_p は軸力、曲げモーメントに対する全塑性耐力であり、 $N_Y = 2n_Y$, $M_p = n_Y h$ (10.a,b)

である。式(9)が各参照断面での断面力に対する降伏条件式である。さらに、参照断面位置を ξ_i とすれば、材端力と断面力の関係は、

$$N_i = N, \quad M_i = (1 - \xi_i) M, \quad \xi_i \in [0, 1] \quad (11)$$

であるから、これを用いて、材端力に対する降伏条件式を求めると、

$$\phi^i = \left| \frac{N - N_i^*}{N_Y} \right| + \left| \frac{(1 - \xi_i) M - M_i^*}{M_p} \right| - 1 \leq 0 \quad (12)$$

となる。さらに、 N_i^* , M_i^* についても式(11)のような表現が可能であるものとして、式(12)を次のように書き直す。

$$\phi^i = \left| \frac{N - N_i^*}{N_Y} \right| + (1 - \xi_i) \left| \frac{M - M_i^*}{M_p} \right| - 1 \leq 0 \quad (13)$$

$$N_i^* = N_i^*, \quad M_i^* = \frac{M_i^*}{(1 - \xi_i)} \quad (14.a,b)$$

処女材料時における式(13)を N, M 空間上に図示したものが Fig.2 である。図中には ξ_i の値として 0.25 刻みで記しており、実際には灰色にて示す領域には無数の降伏関数が存在することとなる。この図からも明かなように、処女材料時には端部断面 ($\xi_i = 0$) によって規定される条件のみが active であり、これ以外の条件は、冗長な条

Fig.2 Yield function in N - M space

条件にすぎないが、材端力がひずみ硬化により当初の許容空間を逸脱し灰色で示した領域を推移する段階で順次 active となる。

次に、塑性流れ則を求めるために、最大塑性散逸の原理が成り立つものとして次のラグランジアンを考える。

$$L = -\Gamma + \sum_{i \in \text{active}} \Delta l_i \lambda_{pi} \dot{\phi}^i \\ = -N \dot{u}_p - M \dot{\theta}_p - \sum_{i \in \text{active}} (N_i^A \dot{\epsilon}_i^{a0} + (1 - \xi_i) M_i^A \dot{\kappa}_i^a) \Delta l_i \\ + \sum_{i \in \text{active}} \Delta l_i \lambda_{pi} \left[\frac{N - N_i^A}{N_Y} + (1 - \xi_i) \frac{M - M_i^A}{M_p} - 1 \right] \quad (15)$$

ここで、ラグランジュ乗数 λ_{pi} は単位長さ当たりの塑性進展パラメータ速度を意味する。これより、 $\partial L / \partial N = 0$, $\partial L / \partial M = 0$ を計算することで、塑性流れ則が次のように求められる。

$$\dot{u}_p = \sum_{i \in \text{active}} \frac{\partial \phi^i}{\partial N} = \sum_{i \in \text{active}} \frac{\text{sgn}(\tilde{N}_i)}{N_Y} \Delta l_i \lambda_{pi} \quad (16.a)$$

$$\dot{\theta}_p = \sum_{i \in \text{active}} \frac{\partial \phi^i}{\partial M} = \sum_{i \in \text{active}} \frac{(1 - \xi_i) \text{sgn}(\tilde{M}_i)}{M_p} \Delta l_i \lambda_{pi} \quad (16.b)$$

ここに、 $\text{sgn}(x)$ は符号関数 [$=1; x > 0$, $=-1; x < 0$, $=0; x = 0$] を意味し、 $\tilde{N}_i, \tilde{M}_i$ は有効応力 ($\tilde{N}_i = N - N_i^A$, $\tilde{M}_i = M - M_i^A$) である。硬化ひずみについても同様に、

$$\frac{\partial L}{\partial N_i^A} = 0; \quad \dot{\epsilon}_i^{a0} = -\frac{\text{sgn}(\tilde{N}_i)}{N_Y} \lambda_{pi} \quad (17.a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_i^A} = 0; \quad \dot{\kappa}_i^a = -\frac{\text{sgn}(\tilde{M}_i)}{M_p} \lambda_{pi} \quad (17.b)$$

式(16.a,b)は Koiter 流の Associate flow 則と一致している。ここで、上記の表現が熱力学第2法則を満足することを確認するために、式(7.b)の散逸項に上式をそれぞれ代入する。

$$\Gamma = \sum_{i \in \text{active}} \left[\frac{N - N_i^A}{N_Y} + (1 - \xi_i) \frac{M - M_i^A}{M_p} \right] \Delta l_i \lambda_{pi} = \sum_{i \in \text{active}} \Delta l_i \lambda_{pi} \quad (18)$$

式(15)に対する Kuhn-Tucker 条件³⁾より、塑性進展パラメータ速度はいずれも正または零でなければならないので、上式の値は正または零であり、このことは熱力学第2法則を満足すること意味する。また、塑性進展パラメータの総和自体がエネルギーの散逸量を意味していることが解る。

また、硬化則は、式(14)を速度表現とした式に式(7.c)および式(17)を代入することにより、

$$\dot{N}_i^A = \dot{N}_i^{A*} = \frac{E_T A \text{sgn}(\tilde{N}_i)}{N_Y} \lambda_{pi} \quad (19.a)$$

$$\dot{M}_i^A = \frac{\dot{M}_i^A}{(1 - \xi_i)} = \frac{1}{(1 - \xi_i)} \frac{E_T I \text{sgn}(\tilde{M}_i)}{M_p} \lambda_{pi} \quad (19.b)$$

Fig.3 Hardening rule to the present model

となる。また、 $\frac{\partial \phi^i}{\partial N} = -\frac{\partial \phi^i}{\partial N_i^A}$, $\frac{\partial \phi^i}{\partial M} = -\frac{\partial \phi^i}{\partial M_i^A}$ なる関係を利用し、上式を次のように書きなおす。

$$\dot{f}_i^a = k^a \frac{\partial \phi^i}{\partial f} \lambda_{pi} \quad (20.a)$$

$$\dot{f}_i^a = \begin{Bmatrix} \dot{N}_i^A \\ \dot{M}_i^A \end{Bmatrix}, \quad k^a = \begin{bmatrix} E_T A & 0 \\ 0 & \frac{E_T I}{(1 - \xi_i)^2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \phi^i}{\partial f} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi^i}{\partial N} \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial M} \end{Bmatrix} \quad (20.b,c,d)$$

この硬化則の無次元化された材端力空間上での意味を明らかにするために、式(19)を次式のように変換する。

$$\begin{Bmatrix} \dot{N}_i^A / N_Y \\ \dot{M}_i^A / M_p \end{Bmatrix} = \frac{E_T a}{2n_Y^2} \begin{Bmatrix} \text{sgn}(\tilde{N}_i) \\ \text{sgn}(\tilde{M}_i) \end{Bmatrix} \frac{\lambda_{pi}}{(1 - \xi_i)} \quad (21)$$

Fig.3 は、ある断面位置を例として、材端力(N, M)が第1象元にある場合について式(21)を記述したものである。本モデルの材端力に対する硬化則は、 I 節点端部($\xi=0$)により規定される降伏条件に関しては Prager の移動硬化則と一致するものの²⁾、一般部($\xi \neq 0$)に関しては Fig.3 に示すように、Prager 則とは異なり、Back-stress は、対をなす降伏線に平行な方向に生ずることを示している。これは、表現は異なるが文献6で対象としたワーレントラス梁の結果と一致する。

また、各断面における塑性進展パラメータ速度は、塑性負荷条件 $\dot{\phi}^i = 0$ より、 $\dot{\phi}^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial f} \dot{f} + \frac{\partial \phi^i}{\partial f_i^a} \dot{f}_i^a = 0$ が active な条件数だけ成り立たなければならないことから求められる。ここで、応力速度は、式(7.a),式(16)から、

$$\dot{f} = k_e \left(\dot{u} - \sum_{i \in \text{active}} \frac{\partial \phi^i}{\partial f} \Delta l_i \lambda_{pi} \right) \quad (22)$$

となるので、これらを上記の負荷条件に代入することにより、次の塑性進展パラメータに関する連立方程式が得られる。

$$\sum_{i \in \text{active}} \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial f} k_e \frac{\partial \phi^i}{\partial f} + \frac{1}{\Delta l_i} \frac{\partial \phi^i}{\partial f} k^a \frac{\partial \phi^i}{\partial f_i^a} \delta_i^j \right) \Delta l_i \lambda_{pi} = \frac{\partial \phi^j}{\partial f} k_e \dot{u} \quad (23)$$

ここに、 δ_i^j はクロネッカーデルタである。硬化を考慮した場合には上式左辺の係数マトリクスが正值となること、および、有限要素において通常用いられる数値積分点にて弾塑性判定を行う方法やファイバーモデルと比べた本手法の特徴は、既に文献6にて示したとおりである。

3. 塑性領域の広がりを考慮した実用的力学モデルの構築

3.1 式(16)および式(23)の近似表現

前節では、2フランジモデルに関する基礎式を求めた。しかしながら、連続体の梁の場合には前述したように、塑性進展パラメータは材軸方向に関する微小区間($n \rightarrow \infty$)において定義されており、式(23)の係数マトリクスは無限の次数を有する正方マトリクスとなる。これを回避する最も単純な方法は n を実質的に問題のない程度の分割数とする方法(文献6で示した手法の直接的拡張)も考えられるが、ここでは、より簡便な手法として各微小区間における塑性進展パラメータ分布を仮定する実用的手法を提示する。ここで、用いる仮定を Box 1 に示す。

仮定 A,B,C に従う梁内部への塑性化の進展の一例を示せば、Fig.4 のように模式的に表すことができる(付録 Fig.A-5 参照)。この例は、

Box 1 Assumption

〈仮定 A〉 時刻 t における塑性領域の範囲を $\xi = [\xi_e (=0) \xi_e]$ とし、各断面位置での降伏条件式に対する塑性進展パラメータ速度が、独立ではなく、次のように表されるものとする。

$$\dot{\lambda}_p(\xi) = \frac{\xi}{\xi_e} \dot{\lambda}_{pe} + \frac{\xi_e - \xi}{\xi_e} \dot{\lambda}_{ps} \quad (24)$$

〈仮定 B〉 塑性進展パラメータの分布もまた同様に塑性領域内において線形に分布するものとする。

$$\dot{\lambda}_p(\xi) = \frac{\xi}{\xi_e} \dot{\lambda}_{pe} + \frac{\xi_e - \xi}{\xi_e} \dot{\lambda}_{ps} \quad (25)$$

〈仮定 C〉 このときの ξ_e が取り得る範囲は $0 \leq \xi_e \leq 2$ とする。

Fig.4 Progressing of plastic region

- (a) 塑性領域が左フランジにて発生し成長する状態 ($0 \leq \xi_e \leq 1$)
 (b) 塑性領域が右フランジへと進展する状態 ($1 \leq \xi_e < 2$)
 (c) 塑性領域が右フランジ全域に達する状態 ($\xi_e = 2$)
 (d) 塑性領域は変化せず塑性負荷が続く状態 ($\xi_e = 2$)
 へと移行する様子を示している。

これらの仮定に従う場合の塑性流れ則について計算する。式(16)の塑性流れ則は、参照断面区間を微小とすることにより次のように表される。

$$\dot{u}_p = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i \in \text{active}} \frac{\partial \phi^i}{\partial f} \Delta l_i \dot{\lambda}_{pi} = \int_0^{\xi_e} \frac{\partial \phi^i}{\partial f} \dot{\lambda}_{pi} L d\xi \quad (26)$$

ここで、仮定 A に従い、式(24)を式(26)に代入し、積分することにより、節点変位の塑性成分は次のように表される。

$$\dot{u}_p = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sgn}(\tilde{N})}{N_Y} \\ \left(1 - \frac{1}{2}\xi_e\right) \frac{\text{sgn}(\tilde{M})}{M_p} \end{array} \right\} \dot{\lambda}_{p0} + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \xi_e \frac{\text{sgn}(\tilde{M})}{M_p} \end{array} \right\} \dot{\lambda}_{p1} \quad (27)$$

$$\dot{\lambda}_{p0} = \frac{L\xi_e}{2} (\dot{\lambda}_{ps} + \dot{\lambda}_{pe}), \quad \dot{\lambda}_{p1} = \frac{L\xi_e}{12} (\dot{\lambda}_{ps} - \dot{\lambda}_{pe}) \quad (28)$$

Fig.5 Incremental resultant plastic parameters

これが塑性領域長を考慮した場合の塑性流れ則である。同様な展開により、式(23)は次のように表される。

$$\left[\frac{k^N}{N_Y^2} + \left(1 - \frac{1}{2}\xi_e\right) \frac{k^M}{M_p^2} + \frac{K^T}{2\xi_e} \right] \dot{\lambda}_{p0} + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\xi_e\right) \xi_e \frac{k^M}{M_p^2} \right] \dot{\lambda}_{p1} = \text{sgn}(\tilde{N}) \frac{k^N}{N_Y} \dot{u} + \left(1 - \frac{1}{2}\xi_e\right) \text{sgn}(\tilde{M}) \frac{k^M}{M_p} \dot{\theta} \quad (29.a)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\xi_e\right) \xi_e \frac{k^M}{M_p^2} \dot{\lambda}_{p0} + \left[\xi_e^2 \frac{k^M}{M_p^2} + \frac{12K^T}{\xi_e} \right] \dot{\lambda}_{p1} = \xi_e \text{sgn}(\tilde{M}) \frac{k^M}{M_p} \dot{\theta} \quad (29.b)$$

$$K^T = \frac{E_T A}{N_Y^2 L} + \frac{E_T I}{M_p^2 L} \quad (30)$$

式(27)および式(29)から以下のことが理解される。

- ・ 式(27)および式(29)から、完全弾塑性体を対象とした場合には、端部の塑性化により規定されるために $\xi_e \rightarrow 0$ となり、通常の塑性ヒンジ法におけるそれぞれの表現と一致する。
- ・ 式(27)から、塑性領域長を考慮することにより、梁要素の節点変位速度の塑性回転成分が低減される。
- ・ 式(29)から、端部が降伏した直後は $\xi_e = 0$ であり、見かけ上の硬化係数が無限大となり、梁としての挙動は弾性的である。

また、 $\dot{\lambda}_{p0}$ 、 $\dot{\lambda}_{p1}$ は、Fig.5 に示すように時刻 t における塑性領域における塑性進展パラメータの総和と 1 次変化率を意味するものである。この $\dot{\lambda}_{p0}$ の意味および式(18)より、熱力学第 2 法則を満足するための条件として、

$$\dot{\lambda}_{p0} \geq 0 \quad (31)$$

のみが要求され、 $\dot{\lambda}_{p1}$ は任意の値を取り得る。

なお、Fig.4 において状態(b)以降の参照断面内の両フランジに塑性領域が形成された場合 ($\xi_e > 1$) には、断面力に関する降伏条件式(式(9))中の(曲げ)モーメントの符号を考慮した次の 2 式を本来考える必要がある。

$$\phi^i = \left| \frac{N_i - N_f^a}{N_Y} \right| \pm \left| \frac{M_i - M_f^a}{M_p} \right| - 1 \leq 0 \quad (32.a)$$

このような場合でも仮定 C の導入により、2 式を考慮したこととなり、式(27)、(29)は成り立つことに注意する。例えば、純引張(圧縮)状態では、 $\xi_e = 2$ かつ $\tilde{M} = 0$ であるから、式(29.a)は、

$$\left[\frac{k^N}{N_Y^2} + \frac{K^T}{2\xi_e} \right] \dot{\lambda}_{p0} = \text{sgn}(\tilde{N}) \frac{k^N}{N_Y} \dot{u} \quad (32.b)$$

となり、これから $\dot{\lambda}_{p0}$ を求め、式(27)に代入し、さらに、式(4.b)、(5.f)、(10)および式(30)を代入することにより、

$$\dot{u}_p = \frac{k^N}{N_Y^2} \left[\frac{k^N}{N_Y^2} + \frac{K^T}{2} \right]^{-1} \dot{u} = \frac{E}{E + E_T} \dot{u} \quad (32.c)$$

となる。これは 1 軸応力状態時の表現に他ならない。このことは、Fig.2 における $\xi_e > 1$ の降伏線が逆符号のモーメントとした条件に一致することからも理解される。ただし、Fig.4 とは異なり、塑性領域が分断されて生じるような場合には、軸力が零または零近傍の場合には、軸力の符号を考慮した次の 2 式を考慮しなければならない。

$$\phi^i = \pm \frac{N_i - N_f^a}{N_Y} + \left| \frac{M_i - M_f^a}{M_p} \right| - 1 \leq 0 \quad (32.d)$$

なお、本論文ではこのような場合については対象外とする。

3. 2 等価モデルの設定および基礎式の誘導

ここでは整合性を有する実用的解法を提示するために、式(27)および式(29)と同様な表現を得るための梁の自由エネルギー表現および降伏関数表現（等価モデルと称する）を設定し、これらを用いてひずみ硬化および塑性領域の大きさを考慮した場合の各基礎式の誘導を行う。まず、等価モデルの自由エネルギーとして次式を考えることとする。

$$\Psi = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)^T \mathbf{k}^e (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + H(u_c, \theta_c, \theta_D) \quad (33)$$

ここに、 u_c , θ_c , θ_D は硬化性状を表す変数である。2節の展開同様、この変化率を Clausius-Duhem の不等式 $-\dot{\Psi} + \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{u}} \geq 0$ に代入する。

$$\left\{ \mathbf{f} - \mathbf{k}^e (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \right\} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{k}^e \dot{\mathbf{u}}_p - \frac{\partial H}{\partial u_c} \dot{u}_c - \frac{\partial H}{\partial \theta_c} \dot{\theta}_c - \frac{\partial H}{\partial \theta_D} \dot{\theta}_D \geq 0 \quad (34)$$

この不等式が任意の変位速度について成り立つための条件として次式が得られる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}^e (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \quad (35.a)$$

$$\Gamma = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}_p + N^c \dot{u}_c + M^c \dot{\theta}_c + M^D \dot{\theta}_D \geq 0 \quad (35.b)$$

$$\text{ここに、} N^c = -\frac{\partial H}{\partial u_c}, \quad M^c = -\frac{\partial H}{\partial \theta_c}, \quad M^D = -\frac{\partial H}{\partial \theta_D} \quad (35.c, d, e)$$

さらに、上記の各熱力学的力を用いて、材端力に対する降伏条件式を以下のように表現する。

$$\Phi^c = \left| \frac{N - N^c}{N_Y} \right| + \left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right) \left| \frac{M - M^c}{M_p} \right| - 1 \leq 0 \quad (36.a)$$

さらに、上式が active な場合に限り次式の制約条件式も考慮する。

$$F^D = \xi_e \left| \frac{M - M^D}{M_p} \right| - \chi = 0 \quad (36.b)$$

ここに、 N^c , M^c , M^D は塑性領域長を考慮したとき材端力に対する等価な Back-stress であり、 χ は数値的安定化を図るための定数($\neq 0$)である。塑性流れ則を求めるために、最大塑性散逸の原理が成り立つものとして次のラグランジアンを考える。

$$L = -N \dot{u}_p - M \dot{\theta}_p - N^c \dot{u}_c - M^c \dot{\theta}_c - M^D \dot{\theta}_D + \dot{\Omega}_c \Phi^c + \dot{\Omega}_D F^D \quad (37)$$

これより、塑性流れ則が次のように求められる。

$$\dot{u}_p = \frac{\text{sgn}(\tilde{N}^c)}{N_Y} \dot{\Omega}_c \quad (38.a)$$

$$\dot{\theta}_p = \left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right) \frac{\text{sgn}(\tilde{M}^c)}{M_p} \dot{\Omega}_c + \xi_e \frac{\text{sgn}(\tilde{M}^D)}{M_p} \dot{\Omega}_D \quad (38.b)$$

$$\dot{u}_c = -\frac{\text{sgn}(\tilde{N}^c)}{N_Y} \dot{\Omega}_c \quad (38.c)$$

$$\dot{\theta}_c = -\left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right) \frac{\text{sgn}(\tilde{M}^c)}{M_p} \dot{\Omega}_c, \quad \dot{\theta}_D = -\xi_e \frac{\text{sgn}(\tilde{M}^D)}{M_p} \dot{\Omega}_D \quad (38.d, e)$$

となる。式(38.a, b)と式(27)を比較することにより、 $\dot{\Omega}_c$, $\dot{\Omega}_D$ が $\dot{\Lambda}_{p0}$, $\dot{\Lambda}_{p1}$ にそれぞれ対応していることが解る。すなわち、

$$\dot{\Omega}_c = \dot{\Lambda}_{p0}, \quad \dot{\Omega}_D = \dot{\Lambda}_{p1} \quad (39)$$

また、式(38)を式(35.b)に代入することにより、散逸項は次のように表される。

$$\Gamma = N \dot{u}_p + M \dot{\theta}_p + N^c \dot{u}_c + M^c \dot{\theta}_c + M^D \dot{\theta}_D = \dot{\Omega}_c + \chi \dot{\Omega}_D \equiv \dot{\Omega}_c \quad (40)$$

Kuhn-Tucker 条件より $\dot{\Omega}_c$ は正でなければならないので、上式の値は常に正となり、熱力学第 2 法則を満足する。さらに、式(39)から上

式の値は $\dot{\Lambda}_{p0}$ に等しいことから、散逸項が、3節で対象とした元々の問題に対して直接誘導された式(18)と等価であることが解る。この意味において式(26)および式(29)は、ひずみ硬化および塑性領域の大きさを適切に評価する表現といえることができる。また、式(36.a)から、塑性領域長は、降伏条件式に対するモーメントのみに対する拡大硬化的影響を有するといえることができる。

Back-stress に関する硬化則は、各 Back-stress 間の連成がないものとすれば、式(35.c, d, e)から次のように表される。

$$\dot{N}^c = -H_{uCC} \dot{u}_c = H_{uCC} \frac{\text{sgn}(\tilde{N}^c)}{N_Y} \dot{\Omega}_c \quad (41.a)$$

$$\dot{M}^c = -H_{\theta CC} \dot{\theta}_c = H_{\theta CC} \left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right) \frac{\text{sgn}(\tilde{M}^c)}{M_p} \dot{\Omega}_c \quad (41.b)$$

$$\dot{M}^D = -H_{\theta DD} \dot{\theta}_D = H_{\theta DD} \xi_e \frac{\text{sgn}(\tilde{M}^D)}{M_p} \dot{\Omega}_D \quad (41.c)$$

ここに、 H_{uCC} 等はそれぞれの Back-stress に対する硬化係数であり、

$$H_{uCC} = \frac{\partial^2 H}{\partial u_c^2}, \quad H_{\theta CC} = \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_c^2}, \quad H_{\theta DD} = \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_D^2} \quad (42. a, b, c)$$

以上の等価モデルに対する塑性流れ則および硬化則を用いて、 $\dot{\Omega}_c$, $\dot{\Omega}_D$ に関する連立方程式が式(23)と同様の手順により求められる。

$$\left[\frac{k^N}{N_Y^2} + \left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right)^2 \frac{k^M}{M_p^2} + \frac{H_{uCC}}{N_Y^2} + \left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right)^2 \frac{H_{\theta CC}}{M_p^2} \right] \dot{\Omega}_c + \left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right) \xi_e \frac{k^M}{M_p^2} \dot{\Omega}_D = \frac{\text{sgn}(\tilde{N}^c)}{N_Y} k^N \dot{u} + \left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right) \frac{\text{sgn}(\tilde{M}^c)}{M_p} k^M \dot{\theta} \quad (43.a)$$

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right) \xi_e \frac{k^M}{M_p^2} \right] \dot{\Omega}_c + \xi_e^2 \left[\frac{k^M}{M_p^2} + \frac{H_{\theta DD}}{M_p^2} \right] \dot{\Omega}_D = \xi_e \frac{\text{sgn}(\tilde{M}^D)}{M_p} k^M \dot{\theta} \quad (43.b)$$

ここで、上記の両式が式(29)と同様な表現となるための硬化係数を求めると、

$$H_{uCC} = \frac{E_T A}{\beta L \xi_e}, \quad H_{\theta CC} = \frac{E_T I}{\beta \left(1 - \frac{1}{2} \xi_e \right)^2 L \xi_e} \quad (44.a, b)$$

$$H_{\theta DD} = \frac{12 M_p^2}{\xi_e^3} \left(\frac{E_T A}{N_Y^2 L} + \frac{E_T I}{M_p^2 L} \right) \quad (44.c)$$

となる。これが等価モデル（式(26)および式(29)）における硬化係数である。ただし、式(44.a, b)中の β は、

$$\xi_e < 2 \text{ の場合}; \quad \beta = 2 \quad (45.a)$$

$$\xi_e = 2 \text{ の場合}; \quad \beta = 1 \quad (45.b)$$

とする。

次に、等価モデルに対する接線剛性マトリクスを誘導する。式(35.a)を速度表現にし、これに塑性流れ則を代入することにより、次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{k}^e \left(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{h} \begin{Bmatrix} \dot{\Omega}_c \\ \dot{\Omega}_D \end{Bmatrix} \right), \quad \mathbf{h} = \left[\frac{\partial \Phi^c}{\partial \mathbf{f}} \quad \frac{\partial F^D}{\partial \mathbf{f}} \right] \quad (46)$$

$\dot{\Omega}_c$, $\dot{\Omega}_D$ は、式(43)から、節点変位速度の全成分により次のように表される（式(43)左辺の係数マトリクスを $\mathbf{G}$ とする）。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Omega}_c \\ \dot{\Omega}_D \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{k}^e \mathbf{h} \quad (47)$$

これを式(46)に代入することにより、接線剛性 $\mathbf{k}^{ep}$ が得られる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{k}^{ep} \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{k}^{ep} = \mathbf{k}^e - \mathbf{b} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}^T \quad (48)$$

4. 数値計算フロー

4.節で求めた塑性領域の広がり考慮した等価モデルに基づき、数値解析手順について説明する。基本的には Return Mapping Algorithm に従うものである。時刻 t における各諸量および時刻 $t+\Delta t$ における節点変位ベクトル ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ が既知であるものとする。

〈弾性予測子〉 時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ に至る間に梁内部には塑性変形は生じないものとし、時刻 $t+\Delta t$ における試行材端力ベクトルおよび試行有効材端力ベクトルを求める。塑性変形が生じないと仮定しているので、 ${}^t\mathbf{u}_p = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p$, ${}^t\boldsymbol{\theta}_p = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\theta}_p$, ${}^t\mathbf{N}^C = {}^{t+\Delta t}\mathbf{N}^C$, ${}^t\mathbf{M}^C = {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^C$ などが成り立ち、試行応力および試行降伏関数は次のように求められる。

$${}^t\mathbf{N} = k^N ({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}_p), \quad {}^t\mathbf{M} = k^M ({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\theta} - {}^t\boldsymbol{\theta}_p) \quad (49)$$

$${}^t\Phi^C = \left| \frac{{}^t\mathbf{N} - {}^t\mathbf{N}^C}{N_Y} \right| + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{{}^t\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \right) \left| \frac{{}^t\mathbf{M} - {}^t\mathbf{M}^C}{M_p} \right| - 1 \quad (50)$$

ここで、この関数値が負であれば弾性仮定が正しく、正であれば弾性仮定が正しくないことを意味する。後者の場合には次の塑性修正子を実行する。

〈塑性修正子〉 増分間において何らかの塑性変形が梁内部に発生していることが明らかとなったことから、時刻 $t+\Delta t$ における真の材端力などは次のように表される。

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{N} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{N}^C - k^N \left(\frac{\text{sgn}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{N}}^C)}{N_Y} \Delta\Omega_C \right) \quad (51.a)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{M} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^C - k^M \left(\left(1 - \frac{1}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \right) \frac{\text{sgn}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{M}}^C)}{M_p} \Delta\Omega_C + \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \frac{\text{sgn}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{M}}^C)}{M_p} \Delta\Omega_D \right) \quad (51.b)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{N}^C = {}^{t+\Delta t}\mathbf{N}^C + H_{uCC} \frac{\text{sgn}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{N}}^C)}{N_Y} \Delta\Omega_C \quad (51.c)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^C = {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^C + H_{\theta CC} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \right) \frac{\text{sgn}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{M}}^C)}{M_p} \Delta\Omega_C \quad (51.d)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^D = {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^D + H_{\theta DD} \frac{\text{sgn}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{M}}^D)}{M_p} \xi_e \Delta\Omega_D \quad (51.e)$$

$${}^{t+\Delta t}\Omega_C = {}^{t+\Delta t}\Omega_C + \Delta\Omega_C \quad {}^{t+\Delta t}\Omega_D = {}^{t+\Delta t}\Omega_D + \Delta\Omega_D \quad (51.f)$$

ただし、 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{N} = {}^t\mathbf{N}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{M} = {}^t\mathbf{M}$ などである。これらの表現を用いて時刻 $t+\Delta t$ における ${}^{t+\Delta t}\Phi^C$, ${}^{t+\Delta t}\Phi^D$ を表わし、さらに、 ${}^{t+\Delta t}\Phi^C \Rightarrow 0$, ${}^{t+\Delta t}\Phi^D \Rightarrow 0$ とおくことにより、 $\Delta\Omega_p$ に関する連立方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{k^N}{N_Y^2} + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \right) \frac{k^M}{M_p^2} + K^T \right\} \Delta\Omega_C \quad (52.a)$$

$$- \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \right) \frac{k^M}{M_p^2} \Delta\Omega_D = {}^{t+\Delta t}\Phi^C$$

$$- \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \right) \frac{k^M}{M_p^2} \Delta\Omega_C + \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e^2}{M_p^2} + \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e^2}{M_p^2} \frac{H_{\theta DD}}{M_p^2} \right) \Delta\Omega_D = {}^{t+\Delta t}\Phi^D \quad (52.b)$$

これを解くことにより、 $\Delta\Omega_C$, $\Delta\Omega_D$ が求められるので、式(52)を用いて時刻 $t+\Delta t$ における第 $k+1$ 近似解を算定更新する。更新された材端力を用いて次式により ${}^{t+\Delta t}\xi_e$ を更新する。

$$\left| \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{N} - {}^t\mathbf{N}^C}{N_Y} \right| + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}\xi_e}{\xi_e} \right) \left| \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{M} - {}^t\mathbf{M}^C}{M_p} \right| - 1 = 0 \quad (53)$$

ここに、 ${}^t\mathbf{N}^C$, ${}^t\mathbf{M}^C$ は弾性状態から降伏する段階での Back-stress である。以上の更新された値を用いて降伏関数の値を再度計算する。こ

の計算を ${}^{t+\Delta t}\Phi^C$, ${}^{t+\Delta t}\Phi^D$ の値が許容値内に収束するまで繰り返す。

$$|{}^{t+\Delta t}\Phi^C| \leq \text{Tolerance}, \quad |{}^{t+\Delta t}\Phi^D| \leq \text{Tolerance} \quad (54)$$

なお、このように塑性領域の判定を塑性修正子の収束計算過程で行う方法は、Multi-surface yield condition の場合を対象とした文献3における Simo らの第2の方法と概念的には共通する。ただし、塑性修正子の収束計算過程において除荷降伏判定が困難となり、 ξ_e の値が振動する場合がある。特に $\xi_e > 1.5$ においてこの傾向が強い。このような状況に陥った場合には、収束計算回数が50回を終了した段階での ξ_e の値を用い、これを定数としてこれ以降の収束計算を行うこととする。

5. 等価モデルの妥当性検証

本節では、前節で示した等価モデルによるひずみ硬化および塑性領域の評価方法の妥当性および有効性について数値計算結果を通して検証する。

Fig.6 に解析対象を示す。硬化の影響を顕著にするために、硬化係数は $E_T = E/20$ と比較的大きな値とする。載荷は1節点の変位 u , θ を変位制御により行い、載荷条件は次の3種類を設定している。

Case-u15q1— $u : \theta = 15 : 1$ Case-u50q1— $u : \theta = 50 : 1$

Case-u5q1— $u : \theta = 5 : 1$

また、本等価モデルの妥当性を検証するために、文献5で示した数値積分点において弾塑性判定を行う梁要素を用いて解析した結果（以下、FEMモデル）と比較する。直接の比較を可能にするために増分間隔などは共通としている。等価モデルにおける収束判定値（式(54)の Tolerance）は 10^{-10} としている。なお、FEMモデルでは梁全体を20要素にて、要素等価モデルを用いる場合には1要素にて解析している。また、いずれの図においても、等価モデルによる結果をプロットで示し、FEMモデルによる結果を実線で示している。

Fig.7 は、 $N-M$ 空間上での材端力の推移を比較したものである。3

$E=1000, \quad E_T=50, \quad N_Y=0.2, \quad M_p=1 (\text{Yield stress}=0.1)$

Fig.6 Two-flange model

Fig.7 $N-M$ space

Fig.8 Analytical results for Load case : u15q1

Fig.9 Analytical results for Load case : u50q1

節で述べたように、処女時の降伏線を越えた直後はほぼそれに直交するように弾性的に推移している。その後、塑性領域が広がるにつれ、見かけ上の硬化係数が小さくなり、処女降伏線にほぼ平行に推移する様子が確認される。なお、いずれの結果も図中の破線（他方フランジの処女降伏線）と交差ししないことから明かなように、これらのケースでは、上下フランジの塑性領域が分断されて生じることはなく、そのために式(32.d)を考慮する必要はない。

Fig.8～10 は u15q1, u50q1 および u5q1 の載荷形式における (a) $N-u$ 関係、(b) $M-\theta$ 関係、(c) 各ステップにおける $\Delta\theta_p/\Delta u_y-N$ 関係、(d) 各ステップにおける $\Delta\theta_p/\Delta u_y$ 関係を示す。荷重変位関係においては、 $M-\theta$ 関係において、降伏後急激にモーメントは低下するが、これ以外に明確な折れ曲がり点は両関係において見られない。これも前述の $N-M$ 空間での材端力推移で述べた理由と同様、塑性領域が徐々に広がり、硬化係数が連続的に変化するためであり、通常の塑性ヒンジ法の結果と大きく異なる点である。各(c)および(d)の結果とも、等価モデルと FEM モデルの結果はよく対応している。このことは、等価モデルにおける塑性流れ則（節点変位塑性成分速度のベクトル方向）および硬化則（同ベクトル長）に対する評価が妥当であることを意味している。

また、u15q1, u50q1 の結果では N が N_y を越えた後も等価モデルと FEM モデルの結果はいずれもよく対応している。このとき、塑性領域 ξ_p は 1.0 を上回ることとなり、4 節で導いた等価モデルがこのような場合にも有効であることを示している。

一方で、いずれの載荷形式においても収束に要した回数は、概ね、降伏直後で 40 回、それ以外の区間で 20 回程度であった。さらに、u50q1 では、 $\xi_p > 1.5$ において 51 回（上限、ただし、 ξ_p を定数とした後の回数は 1 回）を要した。そこで、 ξ_p の更新を式(53)に行わず、

Fig.10 Analytical results for Load case : u5q1

FEM モデルの結果から予め ξ_p を計算し、これを入力データとして等価モデルにより再計算する方法も試みた。この場合には、いずれの場合も 2 回で目標精度に達した。したがって、式(53)による ξ_p の更新方法が低い収束性の原因と考えられる。

6. まとめ

本論文では、2フランジ断面を有する梁要素の材端力-相対変位関係に対する弾塑性構成則について新たな概念を提案した。すなわち、2フランジ断面から成る梁におけるひずみ硬化およびこれに伴う塑性領域長を考慮した基礎式を誘導するとともに、これを簡易に解くことを可能にする実用的等価モデルの提示を試みた。また、提示したモデルの塑性流れ則および硬化則に関して、有限要素法による結果と比較することにより3節で設定した仮定A,B,Cを含む本提案手法の妥当性を明らかにした。

ただし、本論文で定義した塑性領域長 ξ がある程度大きな値となった場合には、それ自体の一義的決定が困難となる問題点についても示した。この点に関するさらなる解決法については今後の課題とする。なお、本論文では、単調載荷下における2フランジ断面梁を対象としたが、繰返し載荷および一般的な断面への本手法の拡張性等については別報にて報告する予定である。

付録 塑性領域長の考慮の影響に関するトラス梁による検討

本論文で対象とする問題点を明らかにするために、Fig.A-1に示すトラス梁を弾塑性トラス要素を用いて解析した結果を以下に示す。各図には、

PEPモデル：すべての弦材を完全弾塑性体

HEPモデル：すべての弦材をひずみ硬化を有する弾塑性体

LEPモデル：弦材①,⑬のみ HEPモデルと同様の弾塑性体

と設定した3種類のモデルに関する結果を示してある。これらは、HEPモデルが塑性領域の広がり方を考慮したモデルであるのに対して、LEPモデルは塑性領域の広がりを無視したモデル（従来の塑性ヒンジ法やマルクスプリング法）に相当する。なお、上記指定以外の個材は弾性体としている。

Fig.A-2は、 N - M 空間上での材端力の推移を示したものである。図中の実線は個材①～⑨により規定される降伏条件に対応しており、図中の点A,B,C,Iは、 (N,M) 推移線と個材①,②,③,⑨により規定される降伏線との交点である。これから明らかなように、PEPモデルのように個材を完全弾塑性体とする場合には個材①により規定される降伏条件のみが意味があり、これ以外の条件は冗長なものとなり意味がない。したがって、考慮すべき材端力許容空間は、両端部上下に配される個材により規定される領域となる。しかしながら、HEPモデルのようにひずみ硬化を考慮する場合には、塑性領域が成長する過程で、個材①以外の個材により規定される条件もactiveとなる（点B,Cにおいて、それぞれ個材②,③により規定される条件がactiveとなる）。つまり、個材がひずみ硬化を有する場合には、塑性領域の進展に伴い、材端力許容空間の形態は変化することとなる。この特性は、本モデルの硬化則が等方・移動硬化則では表現出来ないことをただ示すのではなく、塑性流れ則を考える場合の基準となる降伏関数のあり方が変化することを意味し、塑性変位成分の速度方向が著しく変化すること意味する。Fig.A-3(a)(b)は節点力-節点変位との関係を示したものであり、HEPモデルとLEPモデルの比較から、個材②が降伏する点Bまでは両者の結果は一致するものの、点B以降において、塑性領域の広がりを無視するLEPモデルの結果は、HEPモデルとかなり異なる結果となっている。この原因は、LEPモデルでは、上述した節点変位の塑性成分速度方向を正確に評価し得ないためである。これを具体的に示したものがFig.A-4である。PEPモデルおよびLEPモデルともに、個材⑨が降伏するまでは、個材①により規定される降伏条件のみがactiveであるために、 $\Delta\theta_p/\Delta u_p$ は材端力の変化に関わらず一定の値となっている。これに対して、HEPモデルの結果は、塑性領域の広がりに伴い、 $\Delta\theta_p/\Delta u_p$ は小さな値に変化する。以上より、ひずみ硬化を考える場合には塑性領域の広がりを考慮した手法によらなければならないことは明らかである。なお、点C,Iにおける塑性進展パラメータ総量（実線）および増分量（破線）の分布をFig.A-5に示す。この結果から本論3.1項で設定した仮定A,Bの適切さは明らかである。

参考文献

- まとめられたものとして、応用力学シリーズ4 構造物の崩壊解析基礎編 4.1節および4.2節、日本建築学会、1997
- 瀧口、西村：構造物の二次元非線形復元力特性と塑性論との類似性、日本建築学会構造系論文集、第525号、pp.85-91、1999
- J.C.Simo, et al : Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol.26, pp.2161-2185, 1988
- N.R.Hansen, et al. : A thermodynamically consistent frame work for theories of elastoplasticity coupled with damage, Int. J. Solids Structures, vol.31, No.3, pp.359-389, 1994
- 白、元結：そり変形の影響を考慮した梁要素による平行弦トラス梁から成るラチスシェルの数値解析に関する一考察 その2 弾塑性座屈挙動への展開 日本建築学会大会学術講演梗概集構造I、pp.805-806、2001
- 元結、大塚：塑性論に基づくトラス梁の弾塑性問題に対する解析手法の提案、日本建築学会構造系論文集、第538号、pp.109-114、2000.12

Fig.A-1 Truss girder

Fig.A-2 N-M space

Fig.A-3 Load-displacement curve

Fig.A-4 $\Delta\theta_p/\Delta u_p$ - N/N_T relation

Fig.A-5 Plastic parameter (HEP model)

(2002年4月10日原稿受理、2002年10月9日採用決定)