BE-FE ハイブリッドモデルを用いた大規模浮体の
流体力学解析における特異点処理TREATMENT OF SINGULARITIES IN HYDROELASTIC ANALYSIS OF
LARGE FLOATING STRUCTURES USING BE-FE HYBRID MODEL

藤田 謙一*, 濱本 卓司**

Ken-ichi FUJITA and Takuji HAMAMOTO

The hydroelastic analysis of large floating structures with arbitrary shape has been formulated by wet mode superposition approach using BE-FE hybrid model. In our previous paper, boundary integrals are calculated numerically by Gaussian quadrature for both BEs with and without singularities. In this paper, emphasis is placed on the explicit treatment of singularities in quadratic elements using subelement method for BEs with singularities. The analytical results are compared with previous results with respect to diagonal elements of $[G]$ and $[H]$ in the formulation, wet mode frequencies in the fluid-coupled free vibration analysis, and wave pressure distribution and elastic deformation in the hydroelastic response analysis. It is concluded that the explicit treatment of singular integral is essential for evaluating the local distribution of hydrodynamic pressures acting on large floating structures, although it has a small effect on the global hydroelastic responses.

Keywords : Large floating structure, Hydroelastic analysis, BE-FE hybrid model, Quadratic boundary element, Singular integral, Subelement method

大規模浮体, 流体力学解析, BE-FE ハイブリッドモデル, 2次境界要素, 特異積分, サブエレメント法

1. 序

海洋構造物の設計においては, まず構造物を剛体とみなして流体力を評価した後, 構造物全体の安定性と構造物各部の応力や変形に関する安全性を検討するために構造解析を行うことが多い。しかし, 大規模浮体や海洋シェルのように, 全体の形状寸法に比べて厚さ寸法が相対的に薄くなる海洋構造物では, 弾性応答が剛体運動に比べて顕著になるため, 流体と弾性構造物の動的相互作用を直接扱う3次元流体力学解析が必要になる。

浮体の剛体運動時に作用する流体力の評価には特異点分布法がよく用いられる。特異点分布法は, 境界要素 (BE) として一定要素を用いることと基本的には同じである。このとき, 流体力を精度良く評価する上で, 解の特異性をいかに処理するかが問題になる。Hess・Smith¹⁾は3次元 Laplace 方程式の基本解 (自由空間 Green 関数) を用い, 四辺形要素で離散化し, 解析的に要素積分を行い, 要素の各辺の長さおよび特異点と各頂点の距離で表される対数形式の陽な解を導いた。Garrison²⁾は John³⁾の級数展開型 Green 関数を用い, 長方形要素で離散化し, 要素積分の被積分項を特異性の生じる項と生じない項に分離した後, 前者については要素の面積とアスペクト比で表される対数形式の陽な解を導き, 後者を数値的に積分した。日野・宮永⁴⁾は級数展開型 Green 関数を用い, 三角形要素と四辺形要素の組み合わせで離散化し, 特異点を原点とする微小円とそれ以外の領域に分割した後, 前者を極座標系により特異性を消去して解析的に積分し, 後者を数値的に積分した。前田・江口⁵⁾は級数展開型 Green

関数を用い, 四辺形要素で離散化し, 特異点を原点とする内接円とそれ以外の領域に分割した後, 前者を極座標系により特異性を消去して解析的に積分し, 後者を数値的に積分した。清川ら⁶⁾は級数展開型 Green 関数を用い, 長方形要素で離散化し, 特異点処理のときだけ自由空間 Green 関数に置き換え, 特異点を原点とする面積等価な円に置換した後, 極座標系により特異性を消去して解析的に積分した。Matsui ら⁷⁾は自由空間 Green 関数を用い, 四辺形要素で離散化し, 要素を特異点と各頂点を結ぶ4つのサブエレメントに分割した後, 解析的に要素積分を行い, サブエレメントの1辺の長さと2つの内角で表される対数形式の陽な解を導いた。

浮体の流体力評価において, 2次要素を用いた研究は比較的少ない。松井・加藤⁸⁾は自由空間 Green 関数を用い, 四辺形要素で離散化し, Matsui ら⁷⁾の方法を拡張して特異点処理を行うため, 要素積分の被積分項を形状関数を含む項と含まない項に分離した後, 前者をサブエレメント分割して解析的に積分し, 後者を数値的に積分した。また, 節点数が同程度であれば2次要素は一定要素に比べ計算精度の面で優れていることを示した。Liu ら⁹⁾は, Wehausen・Laitone¹⁰⁾の主値積分型 Green 関数を用い, 四辺形要素で離散化し, 要素積分の被積分項を形状関数を含む項と含まない項に分離することなく, 特異点を原点とする極座標系により特異性を消去して数値的に積分した。また, 2次要素は一定要素に比べはるかに少ない要素数で十分な精度が得られ, 計算効率の面で優れていることを示した。

大規模浮体の流体力学解析においては, 浮体を有限要素 (FE), 流

* 武蔵工業大学 客員研究員・修士 (工学)
** 武蔵工業大学工学部建築学科 教授・工博

Visiting Researcher, Musashi Institute of Technology, M. Eng.
Prof., Dept. of Architecture, Musashi Institute of Technology, Dr. Eng.

体領域を一定要素あるいは線形要素で離散化することが多い。矢後・原¹¹⁾は浮体を長方形平板要素、流体領域を一定要素で離散化し、級数展開型 *Green* 関数を用い、要素に内接する円とそれ以外の領域に分割し、前者を極座標系により特異性を消去して解析的に積分し、後者を数値的に積分した。安澤ら¹²⁾は浮体を長方形平板要素、流体領域を線形要素で離散化し、級数展開型 *Green* 関数を用い、Lachat・Watson¹³⁾の方法に準じてサブエレメント分割し数値積分を行った。しかし、任意形状浮体を扱うときは、FE として長方形平板要素よりも四辺形アイソパラメトリック要素を用いる方が形状表現に柔軟性がある。著者らは、浮体を 8 節点アイソパラメトリック要素、流体領域を 2 次要素で離散化し、特異性を生じる要素にも生じない要素と同様に数値積分を用いた¹⁴⁾。解析結果は、流体力学解析のベンチマークテストで広く参照されている矢後・遠藤¹⁵⁾の大型水槽実験の結果とよく一致し、様々な波長と入射角に対して十分な計算精度が得られた。しかし、特異性を数値積分で回避した結果と解析的に処理した結果との間に、どの程度の違いが生じるのかは今後の課題として残された。

本研究では、3 次元流体力学解析に用いる BE-FE ハイブリッドモデルの 2 次要素の特異積分を解析的に処理することにより、前論文¹⁴⁾の数値積分による結果との違いを明らかにする。流体力学評価における特異点処理に関する既往研究を体系的に分類し、本研究の位置づけを行った後、級数展開型 *Green* 関数を用いた 2 次要素の特異積分を解析的に処理する方法を示す。また、流体力学解析における解析的な特異点処理の結果を、BE のマトリクス $[G]$ と $[H]$ の対角項のノルム、流体連成自由振動解析により求まるウェットモード振動数、流体力学応答解析における波圧分布と弾性応答に関して数値積分の結果と比較する。さらに、*Green* 関数の級数展開の項数、サブエレメント内での積分分割数、およびウェットモード合成におけるモードの重ね合わせ数が解析精度に与える影響を検討する。

2. BE-FE ハイブリッドモデルとウェットモード合成

大規模浮体の 3 次元流体力学解析に用いる BE-FE ハイブリッドモデル¹⁴⁾の離散化には、浮体に *Mindlin* の平板理論に基づく FE の 8 節点アイソパラメトリック要素、海水領域に BE の 2 次要素をそ

れぞれ用いた。波に対する応答は、流体連成自由振動解析で求めたウェットモード特性をモード合成することにより求めた。前論文との重複を避けるために、ウェットモード合成法に基づく 3 次元流体力学解析の概要を以下に要約し、その関連図を Fig. 1 に示す。

- ① 浮体の形状・寸法と材料特性から、FE を用いて、質量、減衰、および剛性マトリクスを構築する。
- ② 浮体に作用する入射波の動水圧と浮力による静水圧を求める。
- ③ BE を用いて、散乱問題と放射問題を解き、入射波の反射・散乱により生じる散乱波の動水圧と浮体の弾性応答により発生する放射波の動水圧を求める。
- ④ 放射波の動水圧成分を、浮体の加速度に比例する付加質量項と浮体の速度に比例する造波減衰項に分離する。付加質量と造波減衰は振動数に依存する物理量である。
- ⑤ 浮力による静水力学の付加剛性を求める。
- ⑥ 静止状態の浮体に作用する波浪外力を、入射波の動水圧と散乱波の動水圧の和として求める。
- ⑦ 浮体と海水の接触面で BE と FE を結合することにより、浮体の流体連成運動方程式を導く。BE と FE の各節点は一致するように離散化してあるので、連続条件は完全に満足される。
- ⑧ 減衰項を無視して流体連成自由振動解析を行い、ウェットモード振動数とモード形を求める。付加質量は振動数に依存するため反復法により解く。
- ⑨ 運動方程式をモード座標系に変換し、モード間連成を考慮したモード連成運動方程式を導く。
- ⑩ ウェットモード合成法により、造波減衰を考慮して浮体の弾性応答を求める。

3. BE による流体領域の離散化

大規模浮体の 3 次元流体力学解析は、構造解析と流体解析を同時に行うため、剛浮体の流体力学評価に比べると計算容量と計算時間が膨大になる。そこで、海水領域の BE を浮体と海水の接触面のみで離散化することにし、3 次元 *Laplace* 方程式、自由表面境界条件、海底剛体境界条件、および *Sommerfeld* の放射条件を満足する以下の級

Fig. 1 Framework for wet mode superposition approach using BE-FE hybrid model

数展開型 Green 関数³⁾を用いる。

$$G(P, Q) = 2\pi i C_0 \cosh k(d+z_P) \cosh k(d+z_Q) H_0^{(1)}(kR) + 4 \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos k_j(d+z_P) \cos k_j(d+z_Q) K_0(k_j R) \quad (1)$$

ここに、 $H_0^{(1)}(kR)$ は 0 位の第 1 種 Hankel 関数、 $K_0(k_j R)$ は 0 位の第 2 種変形 Bessel 関数、 $R = \{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2\}^{1/2}$ はデルタ関数の加振点 $P(x_P, y_P, z_P)$ と受振点 $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ の水平面投影距離、 d は水深、 k と k_j は波数、 C_0 と C_j はそれぞれ k と k_j に依存する係数、 i は虚数単位である。

式(1)の Green 関数を用いると、浮体と海水の接触面境界 S 上の点 P と点 Q の間で成立する境界積分方程式は次式で与えられる。

$$c(P)\phi(P) + \iint_S \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial z} G(P, Q) - G(P, Q) \frac{\partial}{\partial z} \phi(Q) \right\} dS = 0 \quad (2)$$

ここに、 $c(P)$ は点 P における立体角である。なお、大規模浮体では側面接触面積は底面接触面積と比べ遙かに小さくなるので、側面の動水圧の影響を無視し、接触面上の積分は底面境界のみで行った。

接触面境界 S を E 個の四辺形 2 次要素を用いて離散化する。 P_i を S 上の i 番目の節点、点 Q を要素 e 内の任意点とすると、節点 P_i に関する代数方程式が以下のように導かれる。

$$c(P_i)\phi(P_i) + \sum_{e=1}^E \iint_{S_e} \{N\}^T \frac{\partial}{\partial z} G(P_i, Q) dS_e \{\phi\} - \sum_{e=1}^E \iint_{S_e} \{N\}^T G(P_i, Q) dS_e \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\{N\}$ (8×1) は 2 次要素の形状関数ベクトル、 $\{\phi\}$ (8×1) は要素速度ポテンシャルベクトル、 $\{\partial \phi / \partial z\}$ (8×1) は要素流束ベクトル、 E は全要素数、 S_e は境界要素の面積である。

式(3)を全節点に関して求めると、全体系の連立方程式は以下のマトリクス形で表される。

$$[H][\Phi] - [G] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} = \{0\} \quad (4)$$

ここに、 $[\Phi]$ ($NP \times 1$) と $\{\partial \Phi / \partial z\}$ ($NP \times 1$) はそれぞれ全体速度ポテンシャルベクトルと全体流束ベクトル、 NP は全節点数、 $[G]$ ($NP \times NP$) と $[H]$ ($NP \times NP$) はそれぞれ以下の要素マトリクス $[g]$ (1×8) と $[h]$ (1×8) で構成される。

$$[g] = \iint_{S_e} \{N\}^T G(P_i, Q) dS_e \quad (5)$$

$$[h] = \iint_{S_e} \{N\}^T \frac{\partial G(P_i, Q)}{\partial z} dS_e \quad (6)$$

式(5)と(6)において、 P_i と Q が同一要素内にないときは、 P_i と Q が一致することはなく特異性を生じないため、前論文¹⁴⁾と同様に数値積分を用いる。一方、 P_i と Q が同一要素内にあるときは、 P_i と Q が一致する要素節点で特異性が生じる。前論文では計算効率を優先させ、Gauss 積分の積分点と節点との一致を回避した上で数値積分を用いたが、本研究では特異性を解析的に処理することにより計算精度を優先させることを考える。

4. 特異積分の分類と本研究の位置づけ

本研究における特異点処理の位置づけを明確にするために、被積分関数となる Green 関数の形式と特異点の処理方法に関して、既往研究に基づき体系的に分類する。

3 次元の流体力評価および流弾性解析に用いられる Green 関

数は、主に以下の 2 タイプである。

- (1) 自由空間 Green 関数
- (2) 自由空間 Green 関数に自由表面境界条件と海底剛体境界条件を課した Green 関数

(1)の Green 関数は、式の形が単純で特異点処理も比較的簡単に行えるという利点はあるが、浮体と海水の接触面だけでなく、流体領域の海面と海底を広く要素分割するか、無限性を考慮した解析解と結合^{7,8)}しなければならず、ただでさえ計算容量が膨大となる流弾性解析には不利である。

(2)の Green 関数には主値積分型¹⁰⁾と級数展開型³⁾の 2 つがある。ともに要素分割を接触面に限定できるという点で、流弾性解析には有利である。しかし、主値積分型は無限積分の処理が複雑であり、有限積分へ変換する方法¹⁰⁾もあるが、項数が多くなり要素積分に費やす時間が膨大となる。これに対して、級数展開型は解の型式が相対的に単純で要素積分も比較的容易である。

3 次元流体力評価のための特異点処理は、以下の 2 つの方法が主に用いられている。

- (a) 要素全体として処理する方法
- (b) 要素をサブエレメントに再分割して処理する方法 (サブエレメント法)

(a)の方法は、もっぱら一定要素に用いられ、(1)の Green 関数のときは要素全体に対して解析的に特異積分を行うことができる。(2)の Green 関数のときは、特異性を生じる項と生じない項に分離した後、前者に解析的な処理、後者に数値積分を適用し、両者を加え合せる方法が一般的である。通常、特異点を中心とする微小円や内接円を設け、円内では特異点を原点とする局所極座標系により特異性を消去した後、解析的に積分する。境界要素を特異点を原点とする面積等価な円に置き換え、解析的な処理だけを行う近似法もある。ただし、これらの方法は高次要素には適用できない。

(b)の方法は、要素を特異点と要素の各頂点を結ぶ複数の三角形でサブエレメントに分割し、サブエレメントごとに局所座標系を設定して積分を行い、最後に各サブエレメントの寄与の総和をとる方法である。任意の要素形状に柔軟に対応でき、一定要素だけでなく高次要素にも適用できる。サブエレメントの積分には解析的に処理する方法^{7,8)}と数値積分を用いる方法¹³⁾がある。

任意形状の大規模浮体の流弾性解析を目的とする本研究では、級数展開型 Green 関数を用い、2 次四辺形要素で離散化し、要素をサブエレメントに分割する方法を用いる。さらに、Green 関数中の Bessel 関数群の級数展開を利用した従来の特異性の消去法とは異なり、サブエレメントを微小要素に再分割した後、微小要素ごとに積分公式を用いて特異性を消去する方法を提案する。

5. 級数展開型 Green 関数を用いた 2 次要素の特異点処理

式(5)と(6)のマトリクス $[g]$ と $[h]$ は、 P_i と Q が同一要素内にあると、式(1)の $H_0^{(1)}(kR)$ と $K_0(k_j R)$ で特異性を生じる。以下に $[g]$ と $[h]$ の特異積分を解析的に処理する方法を示す。

マトリクス $[g]$ と $[h]$ の成分 g_{ij} と h_{ij} を、松井・加藤⁸⁾と同様に、以下のように形状関数を含む項と含まない項に分離する。

$$g_{ij} = \iint_{S_e} (N_j - 1) G(P_i, Q) dS_e + \iint_{S_e} G(P_i, Q) dS_e \quad (7)$$

$$h_{ij} = \iint_{S_e} (N_j - 1) \frac{\partial}{\partial z} G(P_i, Q) dS_e + \iint_{S_e} \frac{\partial}{\partial z} G(P_i, Q) dS_e \quad (8)$$

式(7)と(8)の右辺第一項を局所座標系 (ξ, η) で表すとそれぞれ以下のようになる。

$$\iint_{S_e} (N_j - 1) G(P_i, Q) dS_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_j(\xi, \eta) - 1) G(P_i, Q(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta \quad (9)$$

$$\iint_{S_e} (N_j - 1) \frac{\partial}{\partial z} G(P_i, Q) dS_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_j(\xi, \eta) - 1) \frac{\partial}{\partial z} G(P_i, Q(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta \quad (10)$$

ここに、 $|J|$ は全体座標系 (x, y, z) から局所座標系 (ξ, η) への変換に伴うヤコビアンである。要素節点と Gauss 積分点が一致することはないため、式(9)と(10)の積分は、 4×4 の Gauss 積分を用いて数値的に処理する。

式(7)と(8)の右辺第二項の積分はそれぞれ以下のように表すことができる。

$$\iint_{S_e} G(P_i, Q) dS_e = F_0 \iint_{S_e} H_0^{(1)}(kR) dS_e + \sum_{j=1}^{\infty} F_j \iint_{S_e} K_0(k_j R) dS_e \quad (11)$$

$$\iint_{S_e} \frac{\partial}{\partial z} G(P_i, Q) dS_e = \frac{\partial F_0}{\partial z} \iint_{S_e} H_0^{(1)}(kR) dS_e + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial F_j}{\partial z} \iint_{S_e} K_0(k_j R) dS_e \quad (12)$$

ここに、 F_0 と F_j 、 $\partial F_0 / \partial z$ と $\partial F_j / \partial z$ は式(1)からそれぞれ以下のようにならされる。

$$F_0 = 2\pi i C_0 \cosh k(d+z_p) \cosh k(d+z_q) \quad (13)$$

$$F_j = 4C_j \cos k_j(d+z_p) \cos k_j(d+z_q) \quad (14)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial z} = 2\pi i C_0 k \cosh k(d+z_p) \sinh k(d+z_q) \quad (15)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial z} = -4C_j k_j \cos k(d+z_p) \sin k(d+z_q) \quad (16)$$

Fig. 2(a)に示すように、節点 P_i を頂点とする M (2あるいは3) 個のサブエレメントに分割する。節点 P_i が要素の隅節点に位置するときは2つのサブエレメント、要素の中間節点に位置するときは3つのサブエレメントに分割する。式(11)と(12)の g_{ij} と h_{ij} の特異積分は接触面上の x および y 方向に関する積分であり、 z 方向に無関係となるため被積分項は同一の式で表される。右辺各項の積分は、以下のように各サブエレメントにおける積分の和として表すことができる。

$$\iint_{S_e} H_0^{(1)}(kR) dS_e = \sum_{m=1}^M \iint_{S_m} H_0^{(1)}(kr_m) dS_m \quad (17)$$

$$\iint_{S_e} K_0(k_j R) dS_e = \sum_{m=1}^M \iint_{S_m} K_0(k_j r_m) dS_m \quad (18)$$

ここに、 r_m は点 P_i と m 番目のサブエレメント内における点 Q との距離、 S_m はサブエレメントの面積である。

さらに、Fig. 2(b)に示すように、各サブエレメントを P_i を頂点とする N 個の微小要素に細分割する。式(17)と(18)はそれぞれ以下のようにならされる。

$$\iint_{S_m} H_0^{(1)}(kr_m) dS_m = \sum_{n=1}^N \iint_{S_{mn}} H_0^{(1)}(kr_{mn}) dS_{mn} \quad (19)$$

$$\iint_{S_m} K_0(k_j r_m) dS_m = \sum_{n=1}^N \iint_{S_{mn}} K_0(k_j r_{mn}) dS_{mn} \quad (20)$$

mn 番目の微小要素 dS_{mn} の積分は、点 P_i を原点とする極座標系 (r_{mn}, θ_{mn}) を用いて行う。式(19)と(20)の積分項はそれぞれ以下のようにならされる。

$$\iint_{S_{mn}} H_0^{(1)}(kr_{mn}) dS_{mn} = \int_0^{\varphi_{mn}} \int_0^{a_{mn}} H_0^{(1)}(kr_{mn}) r_{mn} dr_{mn} d\theta_{mn} \quad (21)$$

$$\iint_{S_{mn}} K_0(k_j r_{mn}) dS_{mn} = \int_0^{\varphi_{mn}} \int_0^{a_{mn}} K_0(k_j r_{mn}) r_{mn} dr_{mn} d\theta_{mn} \quad (22)$$

ここに、Fig. 2(c)に示すように、 a_{mn} と φ_{mn} はそれぞれ mn 番目の微小要素の一边の長さとなら角、 S_{mn} は微小要素の面積である。

$H_0^{(1)}(kr_{mn})$ と $K_0(k_j r_{mn})$ は $r_{mn} \rightarrow 0$ の極限で特異とならため、特異点近傍に点 ε を設けて積分し、最後に $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限操作を施すと、式(21)と(22)はそれぞれ以下のようになら形で表される。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varphi_{mn}} \int_{\varepsilon}^{a_{mn}} H_0^{(1)}(kr_{mn}) r_{mn} dr_{mn} d\theta_{mn} = -\frac{\varphi_{mn}}{k^2} \left\{ ka_{mn} H_1^{(1)}(ka_{mn}) + i \frac{2}{\pi} \right\} \quad (23)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varphi_{mn}} \int_{\varepsilon}^{a_{mn}} K_0(k_j r_{mn}) r_{mn} dr_{mn} d\theta_{mn} = \frac{\varphi_{mn}}{k_j^2} \{1 - k_j a_{mn} K_1(k_j a_{mn})\} \quad (24)$$

なお、式(23)と(24)の積分にはそれぞれ以下の公式¹⁷⁾を用いた。

$$\int_0^t r^\nu H_{\nu-1}^{(1)}(r) dr = \left\{ t^\nu H_\nu^{(1)}(t) + i \frac{2^\nu}{\pi} \Gamma(\nu) \right\} \quad (\nu > 0) \quad (25)$$

$$\int_0^t r^\nu K_{\nu-1}(r) dr = \{2^{\nu-1} \Gamma(\nu) - t^\nu K_\nu(t)\} \quad (\nu > 0) \quad (26)$$

ここに、 $\Gamma(\nu)$ は Gamma 関数である。

式(23)、(24)を式(21)、(22)に、その結果を式(19)、(20)に、さらにその結果を式(17)、(18)に、最後にその結果を式(11)と(12)に代入すると、 g_{ij} と h_{ij} の特異積分はそれぞれ以下のようになら形で表すことができる。

$$\iint_{S_e} G(P_i, Q) dS_e = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_0 \frac{\varphi_{mn}}{k^2} \left\{ ka_{mn} H_1^{(1)}(ka_{mn}) + i \frac{2}{\pi} \right\} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_j \frac{\varphi_{mn}}{k_j^2} \{1 - k_j a_{mn} K_1(k_j a_{mn})\} \quad (27)$$

$$\iint_{S_e} \frac{\partial}{\partial z} G(P_i, Q) dS_e = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_0}{\partial z} \frac{\varphi_{mn}}{k^2} \left\{ ka_{mn} H_1^{(1)}(ka_{mn}) + i \frac{2}{\pi} \right\} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial z} \frac{\varphi_{mn}}{k_j^2} \{1 - k_j a_{mn} K_1(k_j a_{mn})\} \quad (28)$$

Fig. 2 Subelement discretization and integral segmentation

6. 数値結果と検討

流力弾性解析における Green 関数の級数項の項数を決定するために、前田・江口⁵⁾の正方形剛浮体の Heave に関する調和振動実験を対象に検討する。浮体模型の形状寸法、吃水、および設置水深を Fig. 3 に示す。接触面の要素分割を 6×6 、特異積分のための積分分割数を 30 とし、Green 関数の級数項の項数に関して、付加質量係数と造波減衰係数を算定した。Green 関数の級数項の項数を 10, 20, 30 と変化させて求めた付加質量係数と造波減衰係数の解析値を実験値とともに Fig. 4(a) と 4(b) に示す。縦軸はそれぞれ無次元量の $M_w/\rho_w a^3$ と $C_w/\omega \rho_w a^3$ (M_w は付加質量係数, C_w は造波減衰係数, ω は円振動数, ρ_w は水の質量密度, a は浮体の辺長の $1/2$) である。付加質量係数と造波減衰係数はともに級数項の項数が 20 項でほぼ収束しているので、以下の検討では 20 項に固定する。付加質量係数の収束値は全振動数領域で実験値と良い一致を示している。造波減衰係数の収束値は全体的には良く一致しているものの、高振動数になると実験値と若干ずれが見られる。

流力弾性解析の特異積分を解析的に処理した結果を前論文¹⁴⁾の数

Fig. 3 Shape and size of square rigid plate (Maeda and Eguchi⁵⁾)

(a) Added mass coefficients

(b) Radiation damping coefficients

Fig. 4 Convergence of analytical results due to the number of series terms

値積分による結果と比較検討する。矢後・遠藤¹⁵⁾の長方形大規模浮体の流力弾性応答に関する大型水槽実験を対象に検討する。浮体模型の形状寸法、設置水深、および入射波の波高 H と入射角 θ を Fig. 5 に示す。浮体模型の材料定数を Table 1 に示す。浮体と接触面の要素分割は、前論文と同様に 30×6 とした。

対象浮体におけるサブエレメントの積分分割数を決定するために、 $[G]$ と $[H]$ の対角項のノルムを以下のように定義し、積分分割数による収束状況を調べる。

$$\|G\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{NP} G_{ii}^2}, \quad \|H\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{NP} H_{ii}^2} \quad (29)$$

ここに、 G_{ii} と H_{ii} はそれぞれ $[G]$ と $[H]$ の対角成分である。横

Table 1 Material properties of rectangular flexible plate

Young's modulus (N/m ²)	Poisson's ratio	Mass density	
		Structure (kg/m ³)	Water (kg/m ³)
6.066×10 ⁸	0.3	304.6	1000.0

Fig. 5 Shape and size of rectangular flexible plate (Yago and Endo¹⁵⁾)

(a) Fluid coupled free vibration analysis

(b) Hydroelastic response analysis

Fig. 6 Convergence of norms due to the number of integration segments in $[G]$ and $[H]$ matrices

Fig. 7 Convergence of elastic displacements due to the number of modal superposition

Fig. 8 Comparison of norms of the diagonal elements of $[G]$ and $[H]$ for different wave length

軸に積分分割数, 縦軸に積分分割数30のときのノルム値($\|G\|_{30}$ あるいは $\|H\|_{30}$)に対する積分分割数 N と30でのノルム差 ($\|G\|_N - \|G\|_{30}$ あるいは $\|H\|_N - \|H\|_{30}$)の比をとり Fig. 6 に示す。サブエレメントの積分分割数は, 流体連成自由振動解析, 流体力弾性応答解析ともに20でそれぞれ収束した。以下, サブエレメントの積分分割数は20に固定する。

対象浮体における流体力弾性応答を求める際に必要なウェットモードの重ね合せ数を決定するために, モードの重ね合わせに関する応答値の収束状況を調べる。横軸には浮体長辺方向の座標, 縦軸に浮体短辺方向中央の長辺方向における応答変位振幅を波高の1/2で除した無次元量を取り Fig. 7 に示す。波長と浮体長辺方向長さの比 λ/L は高次モードが励起されやすい0.2とし, 入射角 θ は 0° と 60° を選んだ。 $\theta=0^\circ$ のときはモード数の重ね合せ数は10あれば十分であるが, $\theta=60^\circ$ になると振りモードを含む多くの高次モードが励起されるため20程度必要になることがわかる。以下, モードの重ね合せ数は20に固定する。

マトリクス $[G]$ と $[H]$ において, 特異積分を解析的に処理した結果と数値積分により求めた結果との差は対角項に現われる。流体力

Table 2 Comparison of wet mode frequencies between analytical and numerical treatments of singular integral

Mode no.	Wet mode frequencies (rad/sec)		
	ω_a	ω_n	$(\omega_n - \omega_a) / \omega_a$ (%)
1	3.60	3.46	-3.92
2	3.68	3.55	-3.63
3	3.88	3.75	-3.36
4	4.41	4.29	-2.72
5	4.51	4.41	-2.12
6	5.41	5.30	-2.00
7	5.96	5.88	-1.27
8	7.55	7.40	-2.06
9	9.11	9.07	-0.39
10	10.45	10.27	-1.67

ω_a : Analytical treatment ω_n : Numerical integration

性応答解析を行い, 横軸に λ/L , 縦軸に両結果の対角項のノルム差を解析的に処理したノルムで除した値をとり Fig. 8 に示す。図中, $\|G\|$ あるいは $\|H\|$ の下添字 a と n はそれぞれ解析的に処理した結果と数値積分により求めた結果を示す。両結果の $[G]$ と $[H]$ の対角項のノルム差は λ/L の値によらずほぼ一定値を示し, $[G]$ で20~23%, $[H]$ で6~9%となった。図には示していないが, 流体連成自由振動解析の段階では, 解析的処理と数値積分により求めた $[G]$ と $[H]$ の対角項のノルム差は, それぞれ24%と9%であった。

流体連成自由振動解析により求まるウェットモード振動数に関して, 解析的な特異点処理の結果と数値積分の結果を1次から10次まで比較し Table 2 に示す。ウェットモード振動数に関する繰返し計算を行い, 1ステップ前の振動数との差が1%以内となった時点で計算を終了した。繰返し回数は5~7であった。両者の結果の差は最大でも4%以下であり, $[G]$ と $[H]$ の対角項のノルム差に比べるとかなり小さくなっている。

流体力弾性応答解析により求まる変位応答に関して, 解析的な特異点処理の結果を数値積分の結果と比較し Fig. 9 に示す。4種類の入射波の波向 (0° , 30° , 60° , 90°) と5種類の波長 (1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2) に対して, 浮体短辺方向中央の長辺方向における応答分布を求めた。応答解析では減衰機構として造波減衰のみを考慮した。解析的処理の結果は, 波長が短いときに浮体端部でわずかな改善が見られる程度で, 数値積分の結果とほぼ一致しており, その差はウェットモード振動数の差よりさらに小さい。なお, 両者の結果はともに波向と波長によらず実験値と良く一致している。

浮体長辺方向の波圧分布を解析的処理と数値積分により求め Fig. 10 に示す。縦軸は浮体短辺方向中央における入射波による動水圧 p_i と反射波による動水圧 p_r の和の絶対値を p_i の絶対値で除した無次元量である。 λ/L は0.2, θ は 0° と 60° とした。解析的処理の結果は波の入射側から透過側にわたり滑らかな分布形となっているのに対し, 数値積分の結果は入射側で波打現象を起こしている。また, 波を受ける先端部を除くと, $\theta=0^\circ$ のときは解析的処理の結果が数値積分の結果より小さいが, $\theta=60^\circ$ のときは逆の傾向を示している。流体力評価の段階では, 解析的処理と数値積分の結果には有意な差が生じ, 特異積分を解析的に処理することの重要性を示している。

7. 結 び

3次元流体力弾性解析に用いる BE-FE ハイブリッドモデルの2次元要素の特異積分を解析的に処理することにより, 前論文¹⁴⁾の数値積

Fig. 9 Comparison of hydroelastic responses between analytical and numerical treatments of singular integral for different wave lengths and incident angles

(a) Distribution of hydrodynamic pressure for $\lambda/L=0.2$ and $\theta=0^\circ$ (b) Distribution of hydrodynamic pressure for $\lambda/L=0.2$ and $\theta=60^\circ$ **Fig. 10** Comparison of wave pressure distribution between analytical and numerical treatments of singular integral

分による結果との違いを明らかにした。本研究の範囲内で得られた知見を以下に要約する。

1. マトリクス $[G]$ と $[H]$ の対角項のノルムに関する解析的处理と数値積分の結果は $[G]$ で20~23%, $[H]$ で6~9%となり有意な差といえる。
2. 流体連成自由振動解析で求めたウェットモード振動数は、解析的处理の結果と数値積分の結果は最大でも4%の差であり比較的小さい。
3. 流力弾性応答解析の段階では、解析的处理を適用して求めた変位応答は数値積分による結果とほぼ同じになり、両者の差はほとんど見られない。
4. 大規模浮体に作用する波圧分布に関して、解析的处理の結果と数値積分の結果を比較すると、分布形状と大きさともに有意な差が見られる。流体力評価に関しては解析的处理が不可欠である。
5. 特異積分の解析的处理における各サブエレメントの積分分割数はほぼ20で収束値に達する。
6. Green関数の級数項はほぼ20項で収束値に達する。
7. 流力弾性応答解析におけるウェットモードの重ね合せ数はほぼ20で収束値に達する。

以上から、特異積分の解析的处理と数値積分の差は、ウェットモード振動数や波浪に対する弾性応答変位といった全体的な大規模浮体の挙動に着目する場合は極めて小さい。しかし、マトリクス $[G]$ と $[H]$ の対角項のノルムと波圧分布に関しては、解析的处理と数値積分の結果は有意な差を生じ、数値積分では十分な精度が得られない

ことがわかる。したがって、流力弾性解析により大規模浮体の全体的な挙動と局所的な挙動を統一的に扱う上で、特異積分を解析的に処理することは極めて重要である。

謝 辞

本研究において解析結果との比較に用いた実験結果は、デジタルデータとして独立行政法人海上技術安全研究所（前運輸省船舶技術研究所）遠藤久芳氏より拝受した。

参考文献

- 1) Hess, J. L., Smith, A.M.O.: Calculation of Non-Lifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies, Proc. Behavior of Offshore Struct., pp.424-443, 1982
- 2) Garrison, C.J.: Hydrodynamic Loading of Large Offshore Structures: Three-Dimensional Source Distribution Method, Numerical Methods in Offshore Engineering, edited by Zienkiewicz, O.C. et al., John Wiley & Sons, pp.87-140, 1978
- 3) John, F.: On the Motion of Floating Bodies, Comm. Pure and Appl. Math., Vol. 3, pp.45-101, 1950
- 4) 日野幹雄, 宮永洋一: グリーン関数および仮想法による波力と波の回折計算, 土木学会論文集, 第237号, pp.51-62, 1975
- 5) 前田久明, 江口純弘: 浅海域において浅吃水船に作用する流体力について (第二報) —Heavingの流体力—, 日本造船学会論文集, 第139号, pp. 44-50, 1976
- 6) 清川哲志, 大山 巧, 小林 浩: グリーン関数法による任意形状浮体の動揺解析, 土木学会論文集, 第332号, pp.55-65, 1983
- 7) Matsui, T., Kato, K., Shirai, T.: A Hybrid Integral Equation Method for Diffraction and Radiation of Water Waves by Three-Dimensional Bodies, Computational Mechanics, Vol. 2, pp.119-135, 1987
- 8) 松井徹哉, 加藤賢治: ハイブリッド型積分方程式法による浮体の定常動揺問題の数値解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第393号, pp.165-176, 1988.11
- 9) Liu, Y.H., Kim, C.H., Lu, X.S.: Comparison of High-Order Boundary Element and Constant Panel Method for Hydrodynamic Loadings, Int. J. Offshore and Polar Engineering, Vol. 1, No. 1, pp.8-17, 1991
- 10) Wehausen, J.V., Laitone, E.V.: Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1960
- 11) 矢後清和, 原 正一: 浅喫水箱型浮体の波浪中弾性応答について 大型模型による水槽実験 —その3 ユニット接合時の応答—, 日本造船学会論文集, 第183号, pp.227-237, 1998
- 12) 安澤幸隆, 河野大介, 香川洸二, 北林研一: マット型超大型浮体構造物の波浪応答解析, 日本造船学会論文集, 第181号, pp.111-122, 1997
- 13) Lachat, J.C., Watson, J.O.: Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics, Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol.10, pp. 991-1005, 1976
- 14) 濱本卓司, 藤田謙一: 境界要素—有限要素ハイブリッドモデルを用いた不規則形状大規模浮体の流力弾性解析, 日本建築学会構造系論文集, 第555号, pp.201-208, 2002.5
- 15) 矢後清和, 遠藤久芳: 浅喫水箱型浮体の波浪中弾性応答について 大型模型による水槽実験, 日本造船学会論文集, 第180号, pp.341-352, 1996
- 16) Faltinsen, O.M., Michelesen, F.C.: Motion of Large Structures in Waves at Zero Froude Number, The Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, Paper No. 11, The Institution of Mechanical Engineers, 1974
- 17) Abramowitz, M., Stegun, I.A. (eds.): Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th edition, Dover Publications, 1972

(2002年9月3日原稿受理, 2002年12月27日採用決定)