RC 建物の水平 2 方向層降伏特性

—楕円形の降伏条件を持つ要素を並列結合して出来る構造の降伏条件—

BILATERAL STORY-YIELD CHARACTERISTICS OF RC BUILDINGS

—Yield criterion of a parallel-connected structure in which elements have elliptical yield criteria—

津村 浩三*

Kozo TSUMURA

Based on the plastic theory, the author led the equation giving an yield surface of a story of an RC building by using the direction of the deformation of the story as the parameter for the equation, where the yield surfaces of the members were elliptic, the deformations of the members obey the flow rule associated with their own yield surfaces, and the story have two degrees of freedom in horizontal direction. The equation was analyzed functionally, and general characteristics of the yield surface of the story, such as the shape of them and the relation between them and the deformation of the story, were studied. Through the study, the flow rule associated with the yield surface of the story, and convexity of the yield surface of the story, were proved.

Keywords: reinforced concrete, three dimensions, yield surface, story yield, ultimate capacity for lateral load, plastic theory

鉄筋コンクリート、立体、降伏曲面、層降伏、水平保有耐力、塑性理論

1. はじめに

図1のひし形は筆者らが行ったRC柱の2方向水平加力実験²⁾の結果をプロットしたものである。水平力のベクトル和の大きさが最大になった時(最大耐力時)のx、y方向水平力が示されている。同図には水平力を1方向とした実験結果(x軸上とy軸上のひし形)で決まる楕円を降伏曲面として示したが、実験結果と良く適合していることがわかる。このような検討は曲げ破壊型の柱に関してBresler³⁾により行われており、楕円または楕円に近い曲線で降伏曲面が近似できることが示されている。これに加えて筆者らは、異なる破壊モードのRC柱についても実験及び解析を行った結果、柱の水平方向降伏(せん断破壊した試験体の最大耐力を含む)曲面はほぼ楕円形をしており、その降伏曲面に関連する流れ則もほぼ成り立つとみてよいことが分かった。

筆者は、このように部材の降伏曲面を単純な形に仮定し、さらにいくつかの単純化のための仮定を加えると、建物の層降伏曲面(方向ごとの層の崩壊荷重)を簡単に計算出来ることに気づいた。得られた計算式は残念ながら層降伏曲面を荷重方向から求める陽な解ではなく、層降伏時の変形方向を与えて層降伏曲面を求めるものであるが、幸いにして微分等の解析的検討ができる表現になっている。ここでは、その計算式を紹介し、それを用いて層降伏曲面の一般的性質を調べて判明した事柄について述べる。なお、掲げた副題はこ

図1 2方向水平力を受けて破壊した柱²⁾の最大耐力時
水平力実験値と1方向水平力実験値に基づく楕円

本論文の一部は文献1)に発表している。

* 弘前大学理工学部地球環境学科 助教授・博士(工学)

Assoc. Prof., Dept. of Earth and Environmental Sciences, Faculty of Science and Technology, Hirosaki Univ., Dr. Eng.

図2 部材*i*の降伏曲面

こでの議論の対象を物理的に直截に表現したもので、展開する議論の表現との関連はまとめて示す。

2. 基本的な仮定

部材の特性は剛塑性、水平力に対する降伏曲面は楕円で、変形はその降伏曲面に関連する流れ則に従う（変形が降伏曲面に直交して外側に向かう）ものとする。軸力の変動によって降伏曲面は変化しないと考える。層の変形は並進するモードのみ考慮する（ねじれを考慮しない）。梁も含めて床は剛とするが、剛塑性の骨組で層降伏のモードのみ対象としたと考えても良い。

なお、部材の特性は剛塑性としたので、ここで述べる変形はすべて塑性変形である。弾性変形を含む系について本議論を適用する際には、議論中の変形を塑性変形または塑性変形成分と読み替える必要がある。

3. 部材*i*についての定式化

まず、部材の降伏曲面を表す楕円の主軸が座標軸上にあるように部材*i*の局所座標系を図2のように設定し、この上で問題の定式化を行う。部材*i*の降伏時水平力 $\underline{F}_i$ の $\underline{x}$ 、 $\underline{y}$ 成分を次のように媒介変数 θ_i を使って表す。

$$\underline{F}_i = \begin{pmatrix} a_i \cos \theta_i \\ b_i \sin \theta_i \end{pmatrix} \quad \dots(1)$$

ここで、 a_i 、 b_i はそれぞれ部材*i*の $\underline{x}$ 、 $\underline{y}$ 方向降伏耐力、 θ_i は $\underline{x}$ 軸正方向からの反時計回りの角度で、以後角度を表す記号 θ はすべて反時計回りを正とする。この降伏曲面上の接線ベクトルは上式を θ_i で微分して次式

$$\frac{d\underline{F}_i}{d\theta_i} = \begin{pmatrix} -a_i \sin \theta_i \\ b_i \cos \theta_i \end{pmatrix} \quad \dots(2)$$

で与えられる。これに、直交するベクトルは、

$$\lambda_i \begin{pmatrix} b_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \end{pmatrix} \quad \dots(3)$$

の形で与えられる。ここで、 λ_i はベクトルが降伏曲面の外側に向くとの条件から正である。一方、部材の変形を表す変位ベクトル（以後、変形ベクトルと呼ぶ） $\underline{D}_i$ をパラメーター θ_{Di} を使って単位ベクトルとして与えるとすれば、

$$\underline{D}_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_{Di} \\ \sin \theta_{Di} \end{pmatrix} \quad \dots(4)$$

として表される。(3)式と(4)式を等しいとおいて λ_i を求めて λ_i と θ_i を消去し $\underline{F}_i$ を θ_{Di} により表せば、

$$\underline{F}_i = \begin{pmatrix} \frac{a_i^2 \cos \theta_{Di}}{\sqrt{a_i^2 \cos^2 \theta_{Di} + b_i^2 \sin^2 \theta_{Di}}} \\ \frac{b_i^2 \sin \theta_{Di}}{\sqrt{a_i^2 \cos^2 \theta_{Di} + b_i^2 \sin^2 \theta_{Di}}} \end{pmatrix} \quad \dots(5)$$

となる。なおここで、

$$\underline{G}_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$$

とおけば、(5)式は次式で表される（ $||$ はベクトルの長さを表す）。

$$\underline{F}_i = \frac{\underline{G}_i \underline{G}_i \underline{D}_i}{|\underline{G}_i \underline{D}_i|} \quad \dots(5)'$$

次に、部材の降伏曲面の主軸が全体座標系の x 、 y 軸上で、反時計回りに ϕ_i だけ回転した場合を考える。先に示した、局所座標系における変数の下線を取り去ったものを、全体座標系における対応する変数として用いると、主軸の回転による主な変数の変換は、

$$\theta_i = \theta_{Di} - \phi_i, \quad \theta_{Di} = \theta_{Di} - \phi_i, \quad \theta_{Fi} = \theta_{Fi} - \phi_i \quad \text{及び} \quad \underline{F}_i = T_i \underline{F}_i,$$

$\underline{D}_i = T_i \underline{D}_i$ 、で与えられる。ここで、

$$T_i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix}$$

である。これらの関係を、式(5)' に代入すると、全体座標系における変形と降伏時水平力の関係が次式のように得られる（ T は転置を表す）。

$$\underline{F}_i = \frac{T_i^T \underline{G}_i \underline{G}_i T_i \underline{D}_i}{|\underline{G}_i T_i \underline{D}_i|} \quad \dots(6)'$$

これを書き下すと、

$$\underline{F}_i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_i^2 \cos(\theta_{Di} - \phi_i)}{\sqrt{a_i^2 \cos^2(\theta_{Di} - \phi_i) + b_i^2 \sin^2(\theta_{Di} - \phi_i)}} \\ \frac{b_i^2 \sin(\theta_{Di} - \phi_i)}{\sqrt{a_i^2 \cos^2(\theta_{Di} - \phi_i) + b_i^2 \sin^2(\theta_{Di} - \phi_i)}} \end{pmatrix} \quad \dots(6)$$

となる。

4. 層降伏曲面の解

部材 $i=1 \sim n$ からなる層の降伏曲面を考える。層が降伏するときの変形方向を x 軸からの角度 θ_D で表すと、並進の仮定から、これは部材すべてに適用される。従って、 θ_D に対応する層の降伏時水平力 F は(6)式において θ_{D_i} を θ_D に置き換えて総和をとればよく、下式で与えられる。

$$F = \sum_{i=1}^n F_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_i^2 \cos(\theta_D - \phi_i)}{\sqrt{a_i^2 \cos^2(\theta_D - \phi_i) + b_i^2 \sin^2(\theta_D - \phi_i)}} \\ \frac{b_i^2 \sin(\theta_D - \phi_i)}{\sqrt{a_i^2 \cos^2(\theta_D - \phi_i) + b_i^2 \sin^2(\theta_D - \phi_i)}} \end{pmatrix} \quad \dots(7)$$

ここで x 、 y 成分を F_x 、 F_y とおくと、この水平力の大きさ $|F|$ 、(層の降伏荷重、崩壊荷重、耐力) は次式で与えられる。

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \dots(8)$$

この水平力の x 軸正方向からの反時計回りの角度を θ_F とする。 θ_F は、逆関数が存在するように適当に範囲を区切れば、次式で与えられる。

$$\theta_F = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x} \quad \dots(9)$$

さて、我々が最も知りたいのは θ_F (水平力の方向) が与えられたときの $|F|$ の値であるが、以上の(7)~(9)式は θ_D の関数となっている。(9)式が θ_D について解ければ解 $|F|$ が陽の形で求まることになるが、難しい(普及している表計算ソフトの逆解析機能を使うなどすれば数値的な解は得られる)。そこで層降伏曲面は θ_D をパラメトリックに発生させて(7)式に代入することにより得る。その例(後述)を図3に太実線で示す。得られた θ_F を与条件とみなせば、解 $|F|$ は、

- (1) 機構条件 (部材の変形と層の変形が同じとなる仮定のもとで、層の変形を先に仮定しているので層の変形と共にすべての部材が降伏し降伏機構を形成する)、
- (2) 降伏条件 (関連する流れ則を適用する時点ですべての部材の力は部材の降伏曲面上にあると考えるので部材の降伏荷重を超えていない)、
- (3) 力の釣り合い条件 (内力の合計を外力として計算するので当然釣り合う)、

の3条件を満たすので、塑性理論で言う真の崩壊荷重である。

5. 例題1

部材数 $n=2$ 、各部材の降伏曲面が $a_1=2$ 、 $b_1=3$ 、 $\phi_1=0$ 、 $a_2=4$ 、 $b_2=1$ 、 $\phi_2=\pi/6$ によって表されるときの解を求めてみる(水平力の単位は任意)。これらの値と、例えば $\theta_D = \pi/2$ を(7)式に代入すると、

$$F_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_2^2 \cos(\theta_D - \phi_2)}{\sqrt{a_2^2 \cos^2(\theta_D - \phi_2) + b_2^2 \sin^2(\theta_D - \phi_2)}} \\ \frac{b_2^2 \sin(\theta_D - \phi_2)}{\sqrt{a_2^2 \cos^2(\theta_D - \phi_2) + b_2^2 \sin^2(\theta_D - \phi_2)}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4^2 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{4^2 \cos^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + 1^2 \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}} \\ \frac{1^2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{4^2 \cos^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + 1^2 \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.98 \\ 2.18 \end{pmatrix}$$

となる。同様に F_1 も求められるので層の降伏時水平力は次のようになる。

$$F = F_1 + F_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.98 \\ 2.18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.98 \\ 5.18 \end{pmatrix}$$

このように、 $0 \leq \theta_D \leq 2\pi$ の間で θ_D を多数発生させて求めた F を太実線でつないだものが図3に示す層降伏曲面の解である。

6. 層降伏時の変形方向

図3の例題解上には、層降伏曲面上のいくつかの点に対応する変形ベクトル D を矢印で示した。図上では変形ベクトルと、例題解として得られた降伏曲面は直交しているように見える。その点の証明をここで行う。

層降伏曲面を表す位置ベクトル F は媒介変数 θ_D により表されるので、解析学より降伏曲面上の接線ベクトル (θ_D の増分と同じ向きに向かう) は F を θ_D で微分して次のように求められる。

$$\frac{dF}{d\theta_D} = \sum_{i=1}^n \frac{dF_i}{d\theta_D}$$

$$= \sum_{i=1}^n T_i^T \frac{d}{d\theta_D} \begin{pmatrix} \frac{a_i^2 \cos(\theta_D - \phi_i)}{\sqrt{a_i^2 \cos^2(\theta_D - \phi_i) + b_i^2 \sin^2(\theta_D - \phi_i)}} \\ \frac{b_i^2 \sin(\theta_D - \phi_i)}{\sqrt{a_i^2 \cos^2(\theta_D - \phi_i) + b_i^2 \sin^2(\theta_D - \phi_i)}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \theta_D \\ \cos \theta_D \end{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 b_i^2}{\sqrt{(a_i^2 \cos^2(\theta_D - \phi_i) + b_i^2 \sin^2(\theta_D - \phi_i))^3}}$$

ここで、後で示す曲率半径 ρ を使うと、上式は

$$\frac{dF}{d\theta_D} = \rho \begin{pmatrix} -\sin \theta_D \\ \cos \theta_D \end{pmatrix} \quad \dots(10)$$

と表せる。これは、層降伏曲面の接線を表しており、これと層の変形ベクトル D との内積は、

$$D^T \cdot \frac{dF}{d\theta_D} = (\cos \theta_D, \sin \theta_D) \cdot \rho \begin{pmatrix} -\sin \theta_D \\ \cos \theta_D \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$\dots(11)$$

図3 例題1の解

つまり、ゼロとなる。これは層降伏曲面と層の変形ベクトルが直交することを意味しているので、層降伏曲面に関連する流れ則が成り立つことが証明された。なお、部材の降伏曲面の形状が楕円でなくとも、一般に部材レベルで、

$$D_i^T \cdot \frac{dF_i}{d\theta_{Di}} = 0 \quad \dots(12)$$

が成り立ち、

$$D_i = D, \quad \theta_{Di} = \theta_D$$

と置ければ、

$$\begin{aligned} D^T \cdot \frac{dF}{d\theta_D} &= D^T \cdot \frac{d \sum_{i=1}^n F_i}{d\theta_D} \\ &= D^T \cdot \sum_{i=1}^n \frac{dF_i}{d\theta_D} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(D^T \cdot \frac{dF_i}{d\theta_D} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(D^T \cdot \frac{dF_i}{d\theta_{Di}} \right) \end{aligned}$$

と変形でき、最後の行のカッコ内は(12)式からゼロであるので

$$D^T \cdot \frac{dF}{d\theta_D} = 0 \quad \dots(13)$$

つまり、層降伏曲面に関連して流れ則が成り立つ。

7. 層降伏曲面の形状と解の唯一性

ここでは、層降伏曲面が θ_D をパラメータとする曲線であると考えて、その形状について考察する。層降伏曲面の曲率半径 ρ は解析学に従って微分を実行すれば下式で与えられる。

$$\rho = \frac{\sqrt{\left(\frac{dF_x}{d\theta_D} \right)^2 + \left(\frac{dF_y}{d\theta_D} \right)^2}}{\frac{dF_x}{d\theta_D} \frac{d^2 F_y}{d\theta_D^2} - \frac{d^2 F_x}{d\theta_D^2} \frac{dF_y}{d\theta_D}}$$

図4 例題2の解（直交系骨組の場合、第1象限）

$$= \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 b_i^2}{\sqrt{(a_i^2 \cos^2(\theta_D - \phi_i) + b_i^2 \sin^2(\theta_D - \phi_i))^3}} \quad \dots(14)$$

よって、曲率 $1/\rho$ は、

$$\frac{1}{\rho} > 0 \quad \dots(15)$$

である。このように、反時計回りのパラメータ (θ_D) に対して曲率が常に正であるので、層降伏曲面は外側に凸である。

(10)式より一般角 θ_D に対して微分が存在するので、曲線 $F(\theta_D)$ すなわち層降伏曲面は連続であるし、微分が存在することと同じであるがなめらかであるといえる。また、区間 $0 \leq \theta_D \leq 2\pi$ を考えると始点 $\theta_D = 0$ の時の $F(\theta_D:0)$ と終点 $\theta_D = 2\pi$ の時の $F(\theta_D:2\pi)$ は、(6)式から

$$F(\theta_D:0) = F(\theta_D:2\pi) \quad \dots(16)$$

つまり同じとなるので、この曲線すなわち層降伏曲面は閉じている。さらに、後に示すように、この曲線は外側に凸であるので、幾何学的に考えて、 θ_F に対して $F(\theta_D)$ は唯一定まる（解は唯一）。なぜなら、 θ_F に対して $F(\theta_D)$ が複数存在するとすれば、層降伏曲面が原点から伸びる半直線に対して2点以上の交点を持つかその半直線に沿わなければならないので、そのような曲線には凸でない部分が存在し、先に示した性質と矛盾するからである。 $F(\theta_D)$ が決まれば、微分可能なことから外側に向かう法線ベクトルが変形ベクトルとして唯一定まるので、 θ_F に対して θ_D は唯一定まる。さらに(7)式から θ_D に対して θ_F が唯一定まることは明らかなので、結局、 θ_D と θ_F は一対一に対応すると言える。

8. 直交系骨組の場合

特別な場合として、全ての部材の降伏曲面の主軸が一致する場合、これを直交系骨組と呼ぶ、を考える。つまりすべての部材について $\phi_i = 0$ の場合である。まず、例題を考える。前述の例題1の変数の

うち $\phi_2 = 0$ とした問題を、例題 2 としてその解を図 4 に太実線で示す（第 1 象限のみ）。図中には参考のため、各座標軸方向の降伏時水平力によって規定される楕円、2 方向相関がない場合（図中の無相関の場合）の降伏曲面を示した。無相関の場合は、水平力の各座標軸への投影が各座標軸方向において降伏時水平力に達したときに降伏すると考えることから、各座標軸に直交する線分により構成される。求めた例題解は各座標軸上では等しくその他の領域では楕円より外側、無相関の場合より内側になっている。

一般的には、

$$\theta_D = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

の時(7)式より、順に

$$F = \left(\sum_{i=1}^n a_i, 0 \right)^T, \left(0, \sum_{i=1}^n b_i \right)^T, \left(-\sum_{i=1}^n a_i, 0 \right)^T, \left(0, -\sum_{i=1}^n b_i \right)^T$$

となる。当然のように思えるがこの時、水平力の絶対値すなわち層降伏耐力は部材の 1 方向降伏耐力の総和となっている。また、接線ベクトルの向きは(10)式より単位ベクトルの分のみ表示すると、

$$\frac{1}{\rho} \frac{dF}{d\theta_D} = (0, 1)^T, (-1, 0)^T, (0, -1)^T, (0, 1)^T$$

となり、対応する全体座標軸に直交していることがわかる。このことにより直交系骨組の場合、全体座標系に沿った方向に力を加えると加えた力の方向に変形するという一見あたりまえのことが、証明されたことになる。さらに、層降伏曲面が全体座標軸に直交することと、外側に凸であることから、幾何学的に考えて、層の降伏曲面は 2 方向相関がない場合の降伏曲面（全体座標軸に直交する線分で構成される）と比べて全体座標軸上では一致するがその他の方向では必ず内側になる（低めの耐力となる）と言える。それは、両者を全体座標軸から出発した点の軌跡と考えれば、無相関の場合には座標軸に直交する向きにまっすぐ進むのに対して、相関のある場合には原点に近い側に曲がる（凸性）ので必ず内側になるということから明らかである。なお、例題 2 で楕円は層降伏曲面の下界となっている。このことは直交系骨組の場合、一般に成り立つものと思われるが、証明するまでには至らなかった。

9. まとめ

任意方向に水平力を受けて層降伏する並進層の降伏曲面（崩壊荷重）を求める方法を、塑性理論に基づき提案した。部材（柱や壁）の降伏曲面を楕円と仮定し、その降伏曲面に関連して流れ則が成り立つとした。本方法は層間の変形方向をパラメータとして層の降伏曲面を求めるものであるが、得られた水平力の方向を与条件と考えれば、解は塑性理論上の真の崩壊荷重、すなわち正解である。

得られた層の降伏曲面に関連して流れ則が成り立つこと、層の降伏曲面の形状が外側に凸となることを証明した。また、特別な場合として、すべての部材の降伏曲面の主軸が一致する（直交系骨組）場合、層の降伏曲面は全体座標軸（部材の降伏曲面の主軸に沿った方向）に直交すること、以上の点から明らかであるが、全体座標軸に沿った方向に加力すると降伏時にはその加力した方向に変形すること、層の降伏曲面は 2 方向相関がない場合の降伏曲面（全体座標軸に直交する線分で構成される）と比べて全体座標軸上では一致す

るがその他の方向では必ず内側になる（低めの耐力となる）ことなどを証明した。

なお、以上の議論は建物の層を対象として進めたが、対象の物理的意味を直裁に表現すれば、本議論は楕円形の降伏条件を持つ複数の 2 次元要素を並列結合（同一変形条件のもとでの要素の合成）した構造の降伏条件に関するもので、主な結論は要素における降伏条件の凸性と流れ則の特性が並列結合構造においても保存されるということである（本議論中では部材を要素、層を並列結合構造と置き替えれば良い）。従って、例えば有限要素法などで扱われるようなミクロなレベルにおける複合材料の構成則や、部材レベルにおける異種構造材の組み合わせなどの問題は、本議論の対象となる。

参考文献

- 1) 津村浩三：立体 R C 骨組の層降伏特性，日本建築学会学術講演梗概集、構造 IV、pp. 595-596、1999. 9
- 2) 津村浩三、芳村学：せん断破壊型 R C 柱の 3 方向加力実験、コンクリート工学年次論文報告集、Vol. 20、No. 3、pp. 463~468、1998. 8
- 3) Boris Bresler: Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending, ACI Journal, 1960. 11, pp. 481-490

(2002 年 9 月 10 日原稿受理、2003 年 2 月 26 日採用決定)