直列 2 円柱まわりの 3 次元流れ解析

— スパン方向の高さ $H/D=1$ の 2 円柱に関する数値解析 —THREE-DIMENSIONAL COMPUTATION OF FLOW AROUND TWO
CIRCULAR CYLINDERS IN TANDEM ARRANGEMENTS— Computation for two circular cylinders of height $H/D=1$ to span-wise direction —

近藤 典夫*, 松隈 大介**

Norio KONDO and Daisuke MATSUKUMA

We present three-dimensional results of flows around two circular cylinders in tandem arrangements, which are located in a uniform flow. The two circular cylinders in numerical computations are arranged in various spacing between the cylinders. It is well known from experimental data that the characteristics of fluid forces acting on the circular cylinders vary depending on the spacing between the cylinders. The computed results at the Reynolds number 1000 are quantitatively compared with the experimental results in terms of the aerodynamic characteristics of circular cylinders.

Keywords : *incompressible viscous flow, tandem arrangement, two circular cylinders, three-dimensional computation, FEM*

非圧縮粘性流れ、直列配置、2 円柱、3 次元計算、FEM

1. はじめに

流体の運動に伴う様々な現象の解明は実験的研究のみならず、数値的研究によっても盛んに行われるようになり多くの研究成果を収めている。この数値的研究は、ハードの面では高速なコンピュータに寄与するところが大きく、大規模な数値計算が可能になってきている。

非圧縮粘性流体の数値計算では差分法、有限要素法の何れを採用するにしても、安定に計算を実施するためには数値粘性を計算スキームの中に組み込む必要があることは周知の事実である。差分法では移流項を 3 次精度の上流化になるように差分近似する事が多く、これは 3 次 4 階微分の数値粘性項を式の中に組み込んだことと同じになる。これによって多くの流体計算が行われている。

有限要素法では数値粘性を組み込む手法として、テーラー・ガラーキン法、ペトロフ・ガラーキン法などがある。前者は、基本式の局所時間微分項へ時間に関するテーラー級数展開を使い、テーラー級数展開の中の時間に関する 2 階あるいは 3 階微分を空間微分に置きかえることによって、それが数値粘性項の役割をする。後者は、ガラーキン法で使われる重み関数に修正を加えた、いわゆる修正重み関数を採用するもので、修正の仕方によって様々な計算手法が提案されている。修正重み関数を使う

ことによってナビエ・ストークス方程式の中に数値粘性項が組み込まれ、上流化が図られる。

一方、構造物まわりの流れに関する研究では、実験と数値解析の両面から現在までに多くの研究成果が発表され、構造物の断面形状などの違い、そしてレイノルズ数の変化による流体力特性が提示されてきた。このような中で、複数構造物まわりの流れ^{2),3),5)~8)}は、単一構造物まわりの流れより、渦の相互干渉やせん断剥離渦の再付着問題など、複雑な流れの様子を呈している。特に、直列 2 円柱の場合、軸間距離 S と円柱直径 D の比 S/D が 3.5 ~ 3.8 を境に流体力特性はステップ的に変化し、2 円柱まわりの流れパターンも変化することが知られている。

岡島⁶⁾ は、上流側円柱まわりの流れが、亜臨界域、超臨界域および極超臨界域にあるような高レイノルズ数での直列 2 円柱の流体力特性に関する実験を行い、それぞれの領域における特性を明らかにしている。森谷⁷⁾ は、2 円柱に作用する圧力変動と変動流体力特性を実験的に明らかにしている。五十嵐⁸⁾ は直列 2 円柱に関して、円柱間隔とレイノルズ数に依存して流れの構造が幾つかのパターンで変化する事を示した。

このような流体力特性が問題となるような構造物として、都市における高層建物や搭状構造物、海洋建築物などがあげられる。そのような接近した複数の構造物に関わる流体力特性は、工

* 日本大学理工学部海洋建築工学科 専任講師・工博

** 日本大学大学院理工学研究科海洋建築工学専攻 大学院生

Assis. Prof., Dept. of Oceanic Architecture and Engineering, College of Science and Technology, Nihon University, Dr. Eng.

Graduate Student, Graduate School of Science and Technology, Nihon University

学的に重要な要素を数多く含んでいる。上述のように、構造物の配置関係が、それら個々の構造物へ作用する抗力や揚力を大きく変化させるので、構造物の形状とその配置関係に関わる流体特性を詳細に解明することが重要になる。しかし、複数構造物に対する実験的研究は数多く行われているにも係わらず、3次元流体計算による研究は余り行われていない。複雑な流れを示す複数構造物の様々な流体现象について、数値計算による再現が可能になれば、個々の構造物に作用する流体力とその構造物周辺の3次元流れ構造、そして構造物の不安定振動などの解明がより容易に行えるようになる。

このような中で、Kondo¹⁾は流体計算のための有限要素手法を提案して以来、様々な構造物の流体力特性に関する数値解析結果を示してきたが、それらは2次元流体計算の範囲に留まっていた。しかし、より正確に流体现象を捉えるためには3次元流体計算が必要であることは周知の事実である。

そこで本論文の目的は、複雑な流れを生じさせる接近した直列2円柱に対して、提案した有限要素手法¹⁾による3次元流体計算を行い、その手法によって複雑な流れ構造を的確に捉えられるのを示すこと、そして、直列2円柱構造物の流体力特性に関して数値的な再現性を示すことにある。このとき、例えば単一円柱に見られるように、レイノルズ数の違いによって流体力特性は変化するという事実がある。直列2円柱構造物に対しても同じように、レイノルズ数の変化によって流体力特性に相違が生じるかどうかを検証するには、低レイノルズ数から高レイノルズ数までの幅広いレイノルズ数領域で流体力特性を捉えることが必要である。そこで本論文では、比較的低いレイノルズ数である $Re=1000$ の流体现象に焦点を当てて報告し、高レイノルズ数域での数値解析結果については別の機会に報告する。

2. 流体の基礎方程式

一様流中に置かれた直列2円柱の流体力特性を捉えるために、流体は非圧縮粘性流れとし、その基礎式を次のようなナビエ・ストークス方程式と連続方程式で表す。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = \sigma_{ij,j} + f_i \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここで u_i は無次元流速、 f_i は無次元外力、 t は無次元の時間変数、 $(\cdot)_{,i}$ は無次元座標 x_i に関する微分を表し、全応力 σ_{ij} は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (3)$$

によって与えられる。 p は無次元圧力、 τ_{ij} は粘性応力

$$\tau_{ij} = \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

を示し、 Re はレイノルズ数である。

圧力 p は次の圧力のポアソン方程式から計算される。

$$p_{,ii} = -\tilde{u}_{i,i} \quad (5)$$

ここで、右辺の $\tilde{u}_i$ は、以下のようになる。

$$\tilde{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} - \tau_{ij,j} - f_i \quad (6)$$

3. ペトロフ・ガラキン有限要素法

ナビエ・ストークス方程式の解の安定化を図るために数値粘性を組み込んで上流化を行うが、その手法にペトロフ・ガラキン有限要素法を採用する。式(1)に対する修正重み関数を

$$\bar{u}_i = w_i + \tilde{w}_i \quad (7)$$

で表す。 w_i は標準重み関数で、 $\tilde{w}_i$ は上流化するための付加項である。

有限要素近似において3次精度の上流化になるように、計算空間の中で重み付き残差方程式を構成することが望ましい。したがって、以下のような座標変換を導入する。

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (8)$$

$$\tau = t \quad (9)$$

式(7)内の付加項 $\tilde{w}_i$ を計算空間内で以下のように与える。

$$\tilde{w}_i = -\frac{1}{3}\beta\Delta\xi_{(j)}^2 w_{i/(jj)} - \frac{1}{12}\alpha\Delta\xi_{(j)}^3 \text{sgn}(U_{(j)})w_{i/(jjj)} \quad (10)$$

ここで、 $\Delta\xi_j$ は計算空間内の要素長、 β と α はパラメータ、 $\text{sgn}(x)$ は符号関数、 $(\cdot)_{/i}$ は ξ_i による微分、 U_j は反変速度である。括弧付きの添字は和を取らず、ナビエ・ストークス方程式(1)の空間微分の添字と同じものを取りと定義する。式(10)の右辺第1項は、空間微分項を中心近似で離散化したときの精度を指定するためのもので、右辺第2項は3次4階の数値粘性を作る働きがある。

式(10)には高次微分が含まれているので、線形要素の使用を可能にする事と高次精度の離散化を実施するために、以下のような新しい補助関数を導入する。

$$\omega_i = JU_j u_{i/j} \quad (11)$$

$$\phi_{i(j)} = \Delta\xi_{(j)}^2 \omega_{i/(jj)} \quad (12)$$

以上が、ナビエ・ストークス方程式の有限要素スキームを構成する上での特徴となる。これらを使って、ナビエ・ストークス方程式(1)、連続方程式(2)及び圧力のポアソン方程式(5)と(6)についての重み付き残差方程式を構成し有限要素法を適用するが、これについては文献1)～3)に詳細に示してあるので本論文では省略する。このとき、流速と圧力を要素内で線形近似として扱い、それらの節点値を同一点で定義している。

最終的に、ナビエ・ストークス方程式(1)の有限要素方程式は

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + (\mathbf{N}^* + \mathbf{K})\mathbf{V} - \mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (13)$$

となり、連続方程式(2)では

$$\mathbf{C}^t \mathbf{V} = 0 \quad (14)$$

のように、圧力のポアソン方程式(5)と(6)に関しては

$$\mathbf{S}\mathbf{P} = \mathbf{C}^t \tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{G} \quad (15)$$

$$\mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + (\mathbf{N}^* + \mathbf{K})\mathbf{V} - \mathbf{F}_\tau \quad (16)$$

と表示することができる。ここで、 $\mathbf{V}$ は流速の節点ベクトル、 $\mathbf{P}$ は圧力の節点ベクトル、 $\mathbf{M}$ は質量行列、 $\mathbf{N}^*$ は対流行列、 $\mathbf{K}$

は粘性行列、 $\mathbf{C}$ は圧力勾配、 $\mathbf{S}$ はラプラス作用素の行列、 $\mathbf{F}$ と $\mathbf{F}_\tau$ は各々外力ベクトル、 $\mathbf{G}$ は圧力境界のベクトルを示す。

上記の有限要素方程式は、対流行列 $\mathbf{N}^*$ の中に3次精度の数値粘性が含まれた形として表示してある^{2),3)}。

4. 数値計算例

4. 1 計算モデル

流体の有限要素方程式に関して時間方向への数値積分は、陰的オイラー法を用いる。各時間ステップ毎に、圧力のポアソン方程式は SCG 法で、陰的なナビエ・ストークス方程式は Bi-CGSTAB 法で解くが、全体行列は作らずに要素行列の段階で計算を進めていく。

Fig.1 に、直径 D 、高さ H 、中心間距離 S の2本の円柱が一樣流れ U_0 の中に直列配置された3次元計算モデルを示す。Fig.2 は2円柱に作用する力の方向を示したものである。

数値計算では $H/D = 1$ で与え、間隔比 S/D が2~5 のケースについて、 $Re = 1000$ のレイノルズ数を対象にして3次元計算を行った。この計算で使った $x-y$ 平面上の有限要素メッシュを Fig.3 に示す。3次元計算領域の大きさは、 $45D \times 30D \times 1D$ で、節点数は間隔比 S/D が大きくなるに従い増加させ、 $x-y$ 平面上で約1.8万~2.2万節点、スパン方向には11節点とした。

境界条件は、流入境界上で、 $u_1 = U_0$ 、 $u_2 = 0$ 、 $u_3 = 0$ 、流出境界上で、 $p = 0$ 、 $\partial p / \partial n = 0$ 、 $\sigma_{ij} n_j = 0$ 、そして円柱表面では No-Slip 条件と $\partial p / \partial n = 0$ とした。またスパン方向の境界条件は Slip 条件で与えた。

4. 2 直列2円柱まわりの流れパターン

Figs.4 と 5 は、 $Re = 1000$ の流れに対して計算された直列2円柱まわりの流れの様子を、 $x-y$ 平面上の圧力分布図と流線の鳥瞰図によって示したものである。2円柱に関する研究では、Zdravkovich⁵⁾ が直列配置と並列配置に関しての流体力特性を示している。その中で直列2円柱に関する流れパターンは、間隔比 $S/D = 2$ 前後のときに上流側円柱からの剥離せん断層

が下流側円柱に準定常的に再付着し、 $S/D = 3$ 前後になると上流側円柱から間欠的渦放出が始まり、これ以上になると上流側と下流側の両円柱から渦列が形成されることを示している。

これに対して本数値計算結果は、2円柱の間隔比 S/D が比較的狭い $S/D = 2$ と 3 の場合、上流側円柱からの剥離せん断層が下流側円柱に再付着するとともに、2円柱間の流れに渦形成が見られる。しかし上流側円柱からの明確なカルマン渦列は見られない。また $S/D = 3$ の時、2円柱間の流れパターンは、 $S/D = 2$ の場合と比較して複雑な様子を呈してくる。2円柱の間隔比が大きい $S/D = 4$ と 5 の場合には、上流側円柱の剥離せん断層が下流側円柱の手前で巻き込みが起こり、明確にカルマン渦列の発生が見られるようになる。そして下流側円柱では全ての間隔比で渦列の放出が現れている。この結果から、2円柱まわりの流れパターンは $S/D = 4$ になると大きく変化しており、Zdravkovich が示した結果と一致する。

間隔比 $S/D = 3$ から 4 の間で、上流側円柱背後の流れパターンが大きく変化する事が数値的に捉えられたので、Figs.6 と 7 に、その2つの間隔比に対して円柱背後の渦の発達過程を検討するために時系列で圧力分布図を示す。Fig.6 の $S/D = 3$ の場合、上流側円柱背後に小さな渦の形成が見られるものの、それが大きく発達するのは下流側円柱に近づいてからである。このために、上流側円柱の背面では変化に富んだ流れパターンにはなっていない。これに対して、Fig.7 の $S/D = 4$ では、上流側円柱の背面で渦が大きく発達し、単一円柱の場合と同じような渦形成を示している。そしてこの渦列は、 $S/D = 3$ の場合に比べて、下流側円柱にダイナミックに衝突していくことがわかる。このように、間隔比 $S/D = 3$ と 4 での流れパターンの相違を著者らの数値計算結果によって提示することができた。

Fig. 1 A computational model of two circular cylinders in a tandem arrangement

Fig. 2 Direction of forces

Fig. 3 Finite element mesh on $x-y$ plane in a tandem arrangement.

4. 3 直列2円柱に作用する流体力

Figs. 8～11 に、2円柱に作用する抗力係数 C_D と揚力係数 C_L の時刻歴曲線を示す。Figs. 8 と 9 に見られるように、 $S/D = 2$ と 3 の場合には上流側円柱の C_D の振幅が極端に小さく、ほとんど一定な状態を維持している。これは Figs. 4(a)、4(b)、5(a) と 5(b) に見られるように、上流側円柱では渦列の形成が弱いため、これが主要因となって C_D の振幅が小さくなっている。これに伴い、上流側円柱の C_L の振幅もさほど大きくはなっていない。下流側円柱では渦の再付着が生じるので、 C_D と C_L の振幅は、上流側円柱のものと比較して大きくなっている。また下流側円柱の C_D は負値を示しており、2円柱の C_D

は吸引力としての時間変化を示している。

一方、Figs. 10 と 11 に示した $S/D = 4$ と 5 の場合には、上流側円柱と下流側円柱の C_D と C_L の振幅は大きくなることが分かる。特に、両円柱の C_L の振幅が極端に大きい。これは上流側円柱からカルマン渦列が発生するためと、下流側円柱はその渦列の中に位置しているためである。このように、2円柱の抗力係数と揚力係数の時間変化の性状が、配置によって大きく変化することが数値的に捉えられた。

現在まで高レイノルズ数域における2円柱の流体力特性について実験的研究^{6)～8)}が盛んに行われてきたので、Fig. 12 に、間隔比 S/D の変化に対する2円柱の時間平均抗力係数 C_D の数

(a) $S/D=2$, $t=76.5$

(b) $S/D=3$, $t=82.0$

(c) $S/D=4$, $t=89.5$

(d) $S/D=5$, $t=80.5$

Fig. 4 Instantaneous pressure contours at $Re=1000$.

(a) $S/D=2$, $t=76.5$

(b) $S/D=3$, $t=82.0$

(c) $S/D=4$, $t=89.5$

(d) $S/D=5$, $t=80.5$

Fig. 5 Instantaneous streamlines at $Re=1000$.

値結果を、それらの実験結果とともに示し比較検討を行う。高レイノルズ数域における実験結果では、 $S/D \approx 3.5 \sim 3.8$ の跳躍間隔を境に流体力特性が急激に変化することが示されている。つまり上流側円柱の場合には、跳躍間隔より低い領域 ($S/D < 3.5 \sim 3.8$) で、 S/D が大きくなると C_D は次第に小さくなり、 $S/D \approx 3.5 \sim 3.8$ でステップ的に変化し、跳躍間隔より高い領域 ($S/D > 3.5 \sim 3.8$) で C_D は大きな値を取ることを示している。また下流側円柱の場合には、 $S/D < 3.5 \sim 3.8$ の領域で C_D は負値を取るが、 S/D が大きくなると C_D も次第に大きくなり、 $S/D \approx 3.5 \sim 3.8$ でステップ的に変化し、 $S/D > 3.5 \sim 3.8$ で C_D は正值を示して大きな値になる。

このような実験結果を踏まえて $Re = 1000$ の3次元数値結果を見ると、上流側円柱の平均抗力係数 C_D は、全ての S/D に対して実験値より1～2割ほど低い値を示している。しかし、平均抗力係数の変化の傾向は実験結果のものとよく一致してい

ることが分かる。上流側円柱の平均抗力係数で、数値結果と実験値との差はレイノルズ数の違いが主な原因であると思われる。つまり、実験^{6)～8)}で採用したレイノルズ数における単一円柱の平均抗力係数⁴⁾は $C_D \approx 1.2$ になることが知られている。そして実験において、2円柱の間隔比が $S/D \geq 5$ のとき、上流側円柱の平均抗力係数は $C_D \approx 1.2 \sim 1.25$ を示しており、単一円柱の平均抗力係数に良く一致している。一方、数値結果では2円柱の間隔比 $S/D = 5$ のときに $C_D \approx 1.1$ を示している。これは、 $Re = 1000$ における単一円柱の平均抗力係数の実験値⁴⁾ $C_D \approx 1.0$ とほぼ一致している。次に、下流側円柱の平均抗力係数 C_D について見ると、下流側円柱は上流側円柱からの後流渦の影響を直接に受けるので、レイノルズ数が低いにもかかわらず、数値結果の平均抗力係数は実験値とよく一致している。

これらの結果から、 $Re = 1000$ のときの直列2円柱に作用する流体力は、高レイノルズ数流れの場合と同じような傾向にな

Fig.6 Pressure contours at $S/D=3$, $Re=1000$ and $t=70 \sim 76$.

Fig.7 Pressure contours at $S/D=4$, $Re=1000$ and $t=70 \sim 76$.

ることが分かる。

Fig.13 は 2 円柱の抗力係数と揚力係数の時間変動から算出した抗力係数変動と揚力係数変動の RMS 値を示す。両円柱ともに、 $S/D \geq 4$ における RMS 値が $S/D \leq 3.5$ における RMS 値より大きな値を示している。特に、揚力係数変動の RMS 値は極端に大きくなっているが、これは、揚力係数変動がカルマン渦列の発生により、大きなスケールの渦によって引き起こされていることに起因している。

Fig.14 に 2 円柱表面の時間平均圧力分布を示す。両円柱ともに $S/D = 2 \sim 3.5$ および $S/D = 4 \sim 5$ では同じような圧力分布になっている。上流側円柱の圧力分布は、 $S/D \geq 4$ になる

と単一円柱の圧力分布とほぼ一致していることが分かる。下流側円柱では、角度 $\theta = 0$ の位置で S/D が大きくなるにつれて、平均圧力は負圧から正圧側へ移行している。これに対して背面側では負圧が大きくなっていく。

5. おわりに

一様流れの中に置かれた直列 2 円柱に関して、 $Re = 1000$ における流体力特性を捉えるために、2 円柱の間隔比 $S/D = 2 \sim 5$ の範囲で 3 次元数値シミュレーションを行った。数値計算では、ペトロフ・ガラキン法に基づいた有限要素法が適用されている。この結果、3 次上流近似が施され数値解の安定化が図られ

Fig. 8 Time histories of C_D and C_L at $S/D=2$ and $Re=1000$.

Fig. 9 Time histories of C_D and C_L at $S/D=3$ and $Re=1000$.

Fig. 10 Time histories of C_D and C_L at $S/D=4$ and $Re=1000$.

Fig. 11 Time histories of C_D and C_L at $S/D=5$ and $Re=1000$.

ている。

3次元数値結果による直列2円柱まわりの流れパターンでは、 $Re = 1000$ の流れにおいても Zdravkovich が示した流れパターンと同様な傾向になることが確認された。さらに間隔比 $S/D = 3$ と 4 の間で、上流側円柱背後の流れパターンの相違を明確に示した。

$Re = 1000$ の流れにおいて、直列2円柱に関する抗力係数が、間隔比 $S/D = 3.5 \sim 4$ の間で急激に変化する様子が数値計算によっても明確に捉える事ができた。この時、数値計算から

Fig. 12 Time-averaged drag coefficients, C_D , of two circular cylinders.

Fig. 13 RMS values of fluctuating drag and lift coefficients of two circular cylinders at $Re=1000$

(a) Windward cylinder

(b) Leeward cylinder

Fig. 14 Time-averaged pressure distributions, C_p , of two circular cylinders at $Re=1000$.

参考文献

- 1) N. Kondo : Third-order upwind finite element solutions of high Reynolds number flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 112, pp.227-251, 1994.
- 2) N. Kondo : Three-dimensional finite element analysis for flow around square cylinders, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.50, pp.341-349, 2001.10.
- 3) N. Kondo : Numerical simulation for aerodynamic characteristics of two square cylinders in side-by-side arrangement, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.51, pp.207-216, 2002.10.
- 4) B. Cantwell and D. Coles : An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular,

J. Fluid Mech., Vol.136. pp.321-374, 1983.

- 5) M. M. Zdravkovich : Flow induced oscillations of two interfering circular cylinders, J. Sound and Vibration, Vol.101(4). pp.511-521, 1985.
- 6) 岡島厚 : 高レイノルズ数における直列2本円柱のまわり流れ, 日本機械学会論文集(第2部), 44巻384号, pp.2663-2671, 1978.8.
- 7) 森谷優, 阪本弘志, 木谷勝, 有江幹男 : 直列2円柱に作用する変動圧力および流体力, 日本機械学会論文集(B編), 49巻443号, pp.1364-1372, 1983.7.
- 8) 五十嵐保 : 直列2円柱まわりの流れ特性(第1報), 日本機械学会論文集(B編), 46巻406号, pp. 1026-1036, 1980.6.

(2002年10月23日原稿受理, 2003年3月12日採用決定)