線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした
単層ラチスシェルの形状最適化SHAPE OPTIMIZATION OF SINGLE-LAYER LATTICED SHELLS
FOR MAXIMUM LINEAR BUCKLING LOADS AND UNIFORM MEMBER LENGTHS

小河利行*, 大崎 純**, 立石理恵***

Toshiyuki OGAWA, Makoto OHSAKI and Rie TATEISHI

Optimal shapes are found for latticed shells defined by Bézier surfaces. The linear buckling load factor is first maximized under constraints on slenderness ratios of members. Optimization problems for minimizing the difference between the maximum and minimum lengths among the specified members are successively solved to obtain an optimal shape in view of construction efficiency. The geometrically nonlinear properties of optimal solutions are investigated to find that the applied loads are transmitted to the supports through axial forces rather than bending moments. It is shown that the nonlinear buckling loads are successfully increased by optimizing the shape with respect to linear buckling loads, and that no significant increase is observed in the imperfection sensitivity as the result of optimization.

Keywords : Shape optimization, Linear buckling load factor, Rigidly jointed single-layer latticed shell, Bézier surface, Geometrically nonlinear elastic analysis, Geometrical initial imperfection
形状最適化, 線形座屈荷重係数, 剛接合単層ラチスシェル, ベジエ曲面, 弾性非線形解析, 形状初期不整

1. 序論

近年, 計算機や構造工学の技術の進歩により, 古典的な2次曲面などの解析曲面では表すことのできない, 任意形状曲面を持った大空間構造物の設計の可能性が広がっている。解析的表現ではなくパラメトリックな表現によって曲面を生成する方法は, CAGD (Computer Aided Geometric Design)^{3)~6)}と呼ばれ, 航空機や自動車, 船舶の設計に利用されてきた。パラメトリック曲面の中で, 最も単純な曲面がベジエ曲面である。建築の分野でも, ベジエ曲面を用いてシェル曲面の形状や剛性分布を最適化した例がみられる⁷⁾⁸⁾。さらに, 立体トラスなどの部材で構成される大空間構造物の形状を最適化した例もみられる⁹⁾。

大空間構造物の中でも, 単層ラチスシェル構造は, スレンダーな外観と美しさを持ち合わせており, その軽快さや透明感からデザイン面でも注目されている。しかし, 面内剛性に比べ面外剛性のはるかに小さいため, 座屈などの不安定現象に対して十分な安全性を有するように設計されなければならない¹⁰⁾¹¹⁾。さらに, 曲率を有する構造物は, 分布する荷重を面内を流れる力により支点到伝達するため, 力の流れを規定する曲面形状の選択は重要な問題である。力学的特性を考慮した形状最適化問題については, 剛性に着目した小河ら¹²⁾, 応力分布に着目した大森・山本¹³⁾¹⁴⁾の研究などが挙げられる。

座屈荷重を考慮した最適化手法が提案されたのは, 1960年代まで遡る。Prager and Taylor¹⁵⁾は, 座屈前変形を無視できる場合を想定した上で, 線形座屈荷重係数制約条件下での最適化問題を定式化し, 単純な柱状構造物に対して最適性条件を導いている。Olhoff and Rasmussen¹⁶⁾は, 両端を固定された柱の座屈に対して最適剛性分布

を求めた場合, 座屈荷重係数が重複することを明らかにした。Ramm *et al.*¹⁷⁾は, 連続体シェルを対象として線形座屈荷重係数最大化を試みている。立体トラスなどの空間構造物に対しては, 座屈前変形を考慮した非線形座屈に基づいて最適化が行われている^{17)~21)}。しかし, これらの研究は部材の剛性を最適化するものであり, 形状は考慮されていない。一般にラチスシェルは, 形状初期不整敏感度が大きく^{22)~24)}, また, 座屈に至るまでに大きく変形するため, 座屈耐力を評価する際には, 座屈前変形に伴う幾何学的非線形性を考慮しなければならない²⁵⁾²⁶⁾。山本ら²⁷⁾は, 非線形座屈に着目したスペースフレームの形状最適化を行っているが, 形状変更の自由度が一方方向であるため, スムーズな部材配置が得られていない。一方, Ohsaki²⁸⁾は, 立体トラスの部材断面積最適化を行い, 線形座屈と非線形座屈の定式化をそれぞれ用いた場合, 断面積の大きさは異なるが, その分布の傾向は類似することを例示している。そこで本論では, 最も簡単な座屈荷重の算定法である線形座屈を考慮した形状最適化を行い, 併せて得られた最適形状に対し, 幾何学的非線形性による影響を弾性非線形解析を用いて検証する。

大空間構造物においては, デザイン性と並んで施工性も重要な問題となる。ところが, 力学的な観点から形状最適化を行うと部材長の異なる部材が多数存在し, 施工性が悪くなることが予想される。石川ら²⁹⁾は, ラチスシェルの部材長の偏差量を最小化するような節点位置を求める手法を提案しているものの, 偏差量が小さくなくても部材種類が限定されることにはならない。また, 大澤ら³⁰⁾は, 計算幾何学的手法によるグリッド分割法を示し, Tarnai³¹⁾は, 部材長の種類を最小化するようなジオデシックドームについて理論的な考察

本論文の一部は, 参考文献1), 2)で発表した。

* 東京工業大学大学院理工学研究科建築学専攻 教授・工博

** 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 助教授・博士(工学)

*** (株)CRCソリューションズ 修士(工学)
(元東京工業大学 大学院生)

Prof., Dept. of Arch. and Building Engng., Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.
Assoc. Prof., Dept. of Arch. and Architectural Systems, Kyoto Univ., Dr. Eng.

CRC Solutions Corporation, M. Eng.
(Ex-Graduate Student, Tokyo Institute of Technology)

を行った。しかし、分割の種類に依存せず、部材長の種類を最小化するように一般的な最適化手法は存在しない。

以上より本論では、ベジエ曲面によって記述された単層ラチス自由曲面シェルを対象として、線形座屈荷重を最大化する形状最適化を行い、構造物の力学的能力を十分に発揮できる形態を創生することを目的とする。具体的には、まず部材長さに関する制約条件の下、線形座屈荷重係数を最大化し、その上で部材長さを揃える工夫を試みる。また、最適解の形状や力学特性からその性質を考察する。最後に、最適形状に対し非線形座屈荷重を求め、さらに形状初期不整に対する敏感性を検討し、最適解の有効性を検証する。

2. 単層ラチスシェル曲面の記述法

曲面の記述方法として、 $n \times m$ 次テンソル積ベジエ曲面(以下ベジエ曲面)を用いる。曲面形状を定義する実空間座標内の制御点ベクトルを $R'_{\alpha,\beta}$ とし、 u, v ($0 \leq u, v \leq 1$) をパラメータとすると、ベジエ曲面 $X(u, v)$ は、バーンスタイン基底関数 $B_\alpha^n(u)$ および $B_\beta^m(v)$ ($\alpha = 1 \dots n, \beta = 1 \dots m$) を用いて式(2.1)で表され、パラメータ値 (u, v) により定められる曲面である。

$$X(u, v) = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^m R'_{\alpha,\beta} B_\alpha^n(u) B_\beta^m(v) \quad (2.1)$$

ここで $R'_{\alpha,\beta}$ は、アフィン変換により式(2.2)のように定義されるものとする。アフィン変換を用いることにより、幾何学的な性質を保ちながら、正規化された空間から実空間への変換を行うことができ、様々な形状を統一的に評価することが可能となる。

$$R'_{\alpha,\beta} = T R_{\alpha,\beta} \quad (2.2)$$

なお、最適化問題において、制御点ベクトルを設計変数とする場合この $R_{\alpha,\beta}$ を用いることとする。またアフィン変換行列 T は、最適化過程において固定する。

図1に制御ネットおよびベジエ曲面を示す。●が制御点、太線が制御ネットを表し、細線がベジエ曲面を表す。本論では、式(2.1)における次数 n, m を、滑らかな曲面を表現でき、かつ形状変更の自由度を保つよう $n=m=5$ とする。また計算負荷低減のため、曲面は $u=0.5, v=0.5$ において対称なものとし、図1に示すように網掛け部分内の9つの制御点の座標ベクトル $R_{\alpha,\beta}$ を用いて解析を行うこととする。

3. 座屈荷重最大化問題の定式化

基準荷重ベクトル P_0 を定め、荷重係数 μ をパラメータとして、比例荷重荷重 μP_0 を作用させる。この時、部材長さに関する制約を与え、先に述べた $R_{\alpha,\beta}$ および節点パラメータ u, v に関する指標を設計変数として線形座屈荷重の最大化を行う。線形剛性行列および幾何剛性行列をそれぞれ K_L, K_G とおくと、 r 次座屈モード Φ_r とこれ

図1 制御ネットおよびベジエ曲面

に対応する線形座屈荷重係数 μ_r は、次の固有値問題(3.1)の解である。

$$(K_L + \mu_r K_G) \Phi_r = 0 \quad (3.1)$$

線形座屈荷重は、 μ^c を μ_r の正の最小値(1次線形座屈荷重係数)とすると $\mu^c P_0$ と定義されることから、目的関数を μ^c と設定する。

4. 形状最適化問題

ベジエ曲面によって決定された $X(u, v)$ 上に節点を持ち、正方形平面を有する剛接合単層ラチスシェルを初期形状とし、最適形状を求める。ここで、式(2.2)で示したアフィン変換行列 T は、式(4.1)で与えることとする。なお、式(4.1)において長さの単位は m である。

$$T = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

初期モデルおよび形状諸元を図2に示す。初期モデルは、式(4.2)で定義される。境界において x 軸、 y 軸に対して曲率を持つ A-model と、式(4.3)で定義される、正方形の境界を持つ B-model とする。

A-model

$$\begin{aligned} R_{0,0} &= (0, 0, 0), & R_{0,1} &= (0, 0.2, 0.08), & R_{0,2} &= (0, 0.4, 0.12) \\ R_{1,0} &= (0.2, 0, 0.08), & R_{1,1} &= (0.2, 0.2, 0.12), & R_{1,2} &= (0.2, 0.4, 0.15) \\ R_{2,0} &= (0.4, 0, 0.12), & R_{2,1} &= (0.4, 0.2, 0.15), & R_{2,2} &= (0.4, 0.4, 0.2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

B-model

$$\begin{aligned} R_{0,0} &= (0, 0, 0), & R_{0,1} &= (0, 0.2, 0), & R_{0,2} &= (0, 0.4, 0) \\ R_{1,0} &= (0.2, 0, 0), & R_{1,1} &= (0.2, 0.2, 0.1), & R_{1,2} &= (0.2, 0.4, 0.15) \\ R_{2,0} &= (0.4, 0, 0), & R_{2,1} &= (0.4, 0.2, 0.15), & R_{2,2} &= (0.4, 0.4, 0.2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

また、格子タイプは2方向と4方向の2種類とし、4つの初期形状を考える。以下これらのモデルを、A2-model, A4-model, B2-model, B4-model と表現する。図2のモデルは、(1) A2-model, (2) B4-model である。部材諸元を表1に示す。構成部材は全て円形鋼管を用い、4方向格子の斜材は、弦材の1/10程度の断面積として

図2 初期モデルおよび形状諸元 (単位: m)

いる。図3に境界条件および荷重載荷条件を示す。線形固有値解析において、境界条件は全周ピン支持とする。また荷重は等分布荷重とし、図3に示すように、それぞれのモデルの頂部節点において、部材が降伏軸力 N_y に達する際の荷重を降伏荷重 p_y とし、 p_y の5%の荷重を基準荷重 p_0 と設定する。ただし4方向モデルの場合、弦材が降伏した際の斜材の軸力も加えることとする。表2に初期モデルの線形座屈荷重係数 μ^c_{int} 、降伏荷重 p_y 、および基準荷重 p_0 を示す。

解析パラメータとして設計変数の個数を考える。図4(1)および(2)に、節点位置を決めるパラメータ u, v および正規化された空間内の制御点ベクトル $R_{a,\beta}$ の設定法をそれぞれ示す。節点位置を決めるパラメータ u, v では、4分の1に対して図4(1)のように u_{ij}, v_{ij} ($i=1\dots6, j=1\dots6$) と表し、 u_{ij}, v_{ij} を等分割に配置するタイプと、 u_{ij} ($i=2\dots5, j=1\dots6$) を独立した変数とするタイプの2タイプ考える。ただし、 u 方向、 v 方向は対称とし、 $u_{ij}=v_{j,i}$ という条件を与える。以下 u_{ij} ($i=2\dots5, j=1\dots6$) を変数ベクトル u^* と表す。また節点位置 $R_{a,\beta}$ では、節点5～9のそれぞれ3軸 (x, y, z) 方向に対して形状変更の自由度を与えたタイプ(R12)と、それに加え、節点2, 3の2軸 (y, z) 方向、節点4, 7の2軸 (x, z) 方向に対して形状変更の自由度を与えたタイプ(R20)の2タイプ考える。両者の差異は、境界边上における自由度の有無である。

4.1 部材細長比を制約条件とした座屈荷重最大化 (P1)

制約条件として各部材細長比 λ_k の値に上限値 λ_{max} ・下限値 λ_{min} を、節点位置 $R_{a,\beta}$ の値に上限値 R_{max} ・下限値 R_{min} を与え、線形座屈荷重を最大化することを考える。この形状最適化問題を P1 とすると、P1 は次のように書くことができる。

表1 部材諸元

Chord(C) or Diagonal(D) member		A2-model, B2-model		A4-model, B4-model	
		C		C	D
Member slenderness ratio	λ	45.39~48.22		45.37~51.78	
Diameter	ϕ (cm)	31.85		31.85	7.63
Thickness	t (cm)	0.69		0.69	0.28
Sectional area	A (cm ²)	67.55		67.55	6.465
Moment of inertia	I (cm ⁴)	8202		8202	43.7
Radius of gyration	i (cm)	11.02		11.02	2.60
Young's modulus	E (kN/mm ²)	205.94			
Yield stress	σ_y (kN/cm ²)	23.53

図3 境界条件および荷重載荷条件

表2 初期モデルにおける線形座屈荷重係数 μ^c_{int} および降伏荷重 p_y 、基準荷重 p_0

	A2-model	A4-model	B2-model	B4-model
Linear buckling load factor μ^c_{int}	18.83	30.46	19.57	38.28
Yield load p_y (kN)	192.26	210.95	348.23	352.04
Unit loading p_0 (kN)	9.61	10.55	17.41	17.60

(1) 節点位置を決めるパラメータ u, v

(2) 節点位置 $R_{a,\beta}$

図4 設計変数の設定方法

$$P1 \text{ Maximize : } \mu^c \quad (4.2)$$

$$\text{Subject to : } \lambda_{min} \leq \lambda_k \leq \lambda_{max} \quad (k=1, \dots, N_c) \quad (4.3)$$

$$R_{a,\beta}^{min} \leq R_{a,\beta} \leq R_{a,\beta}^{max} \quad (4.4)$$

$$\text{Variables : } R_{a,\beta} \quad (4.5)$$

ここで、 N_c は制約を考慮する部材の数であり、本研究では弦材のみを考え $N_c=220$ とする。なお、設計変数は $R_{a,\beta}$ のみとする。

4.2 座屈荷重最大化と部材のグループ化 (P2)

線形座屈荷重だけでなく、部材長さを揃え、部材種類を少なくすることに重点を置いた形状最適化問題について考える。

まず、P1と同様に μ^c を最大化し、各部材長さ l_k に対して制約条件式(4.7)を与えた形状最適化問題を P2-1 とする。

$$P2-1 \text{ Maximize : } \mu^c \quad (4.6)$$

$$\text{Subject to : } |L_{ave}^{P2-1} - l_k| \leq e L_{ave}^{P2-1} \quad (k=1, \dots, N_c) \quad (4.7)$$

$$L_{ave}^{P2-1} = (L_{max}^{P2-1} + L_{min}^{P2-1}) / 2.0 \quad (4.8)$$

$$R_{a,\beta}^{min} \leq R_{a,\beta} \leq R_{a,\beta}^{max} \quad (4.9)$$

$$\text{Variables : } R_{a,\beta} \quad (4.10)$$

ここで、 $L_{max}^{P2-r}, L_{min}^{P2-r}$ はそれぞれ P2-r における部材長さの最大値、最小値であり、 L_{ave}^{P2-1} は L_{max}^{P2-1} と L_{min}^{P2-1} の平均値である。また許容誤差として、 $e L_{ave}^{P2-1}$ を与え、 e は微小な値とする。P1同様、設計変数は $R_{a,\beta}$ のみとする。

次に、P2-1の最適形状を初期形状として、 L_{max}^{P2-2} と L_{min}^{P2-2} の差を最小化する形状最適化問題 P2-2 を考える。ただし、P2-2において、 L_{max}^{P2-2} と L_{min}^{P2-2} は変数とみなすことができ、P2-1より変数が増えている。

$$P2-2 \text{ Minimize : } L_{max}^{P2-2} - L_{min}^{P2-2} \quad (4.11)$$

$$\text{Subject to : } L_{min}^{P2-2} \leq l_k \leq L_{max}^{P2-2} \quad (k=1, \dots, N_c) \quad (4.12)$$

$$\mu^c \geq a \mu^c_{opt(P2-1)} \quad (4.13)$$

$$R_{a,\beta}^{min} \leq R_{a,\beta} \leq R_{a,\beta}^{max} \quad (4.14)$$

$$\text{Variables : } R_{a,\beta}, u^*, L_{max}^{P2-2}, L_{min}^{P2-2} \quad (4.15)$$

制約条件は部材長さに関する式(4.12)と、P2-1で得られた座屈荷重係数 $\mu_{opt}^{c(P2-1)}$ が、一定の値以上低下しないよう設定した式(4.13)の2つとし、 a は1より少し小さい値を与える。ここで、制約条件(4.12)においてアクティブとなる部材の集合をS1と定義することとする。なお、設計変数は $R_{a,\beta}$, u^* を考える。

最後に、P2-2の最適形状を初期形状として、P2-2において制約条件(4.12)がアクティブとなった部材(集合S1)には制約条件(4.17)を、その他の部材には制約条件(4.18)を与え、グループ化された部材に対し、それぞれ異なる制約条件とする形状最適化問題P2-3を考える。

$$\text{P2-3 Minimize : } L_{\max}^{P2-3} - L_{\min}^{P2-3} \quad (4.16)$$

$$\text{Subject to : } L_{\min}^{P2-2} \leq l_k \leq L_{\max}^{P2-2} \quad (l_k \in S1) \quad (4.17)$$

$$L_{\min}^{P2-3} \leq l_k \leq L_{\max}^{P2-3} \quad (l_k \notin S1) \quad (4.18)$$

$$\mu^c \geq a\mu_{opt}^{c(P2-1)} \quad (4.19)$$

$$R_{a,\beta}^{\min} \leq R_{a,\beta} \leq R_{a,\beta}^{\max} \quad (4.20)$$

$$\text{Variables : } R_{a,\beta}, u^*, L_{\max}^{P2-3}, L_{\min}^{P2-3} \quad (4.21)$$

このP2-3以下、解の収束が終了するまでP2-4, P2-5...を繰り返す。また各最適化問題において、P2-2と同様、制約条件がアクティブとなる部材の集合をS2, S3...と呼ぶ。

5. 解析結果

前章で提示した形状最適化問題P1, P2-rに対し、改訂許容方向法

を用いて解を求める。なお、全ての問題において、全節点で $R_{a,\beta}^{\min} = (0.0, 0.0, 0.0)$, $R_{a,\beta}^{\max} = (1.0, 1.0, 1.0)$ と設定することとし、P1において、 $\lambda_{\min} = 30$, $\lambda_{\max} = 60$, P2-1において、 $e = 0.1, 0.05$, $a = 0.9$ として解析を行う。

5.1 座屈荷重最大化(P1)最適形状および最適解

図5にP1の最適形状および最適解を示す。図中の立面図において、上が初期形状、下が最適形状を表し、最適形状における線形座屈荷重係数を μ_{opt}^c 、シェルライズを h とする。全てのモデルにおいて、最適形状は、ライズの上昇した球に近い丸みを帯びた形状となっている。これは、扁平なラチスシェルで起こり得る不安定現象を回避するためと考えられ、最適形状のライズは、初期モデルの1.99~2.28倍まで上昇し、座屈荷重係数 μ^c は3.08~8.08倍まで増加している。(1) A2-model R12と(2) A2-model R20を比較すると、境界辺上節点の z 軸方向に形状変更可能な(2) A2-model R20は、境界辺上節点が下がり、B-modelに近い形状となるのが特徴的である。さらに境界辺周辺の部材が中心に集まり、(1) A2-model R12と比べると、より丸みを帯びた形状となり、格子形状が直交ではなくなっているのが分かる。A4-modelにおいても同様に、(4) A4-model R20は境界辺上節点が下がり、また境界周辺の部材が中心に集まっている。しかし、(3) A4-model R12, (4) A4-model R20ともにA2-modelと比べると、ライズの低い形状となっている。一方、(6) B2-model R20と(8) B4-model R20では、A2-model, A4-model同様、境界周

図5 P1: 部材細長比を制約条件とした座屈荷重最大化問題の最適形状および最適解

辺の部材が中心に集まる特徴を持っているものの、境界辺上節点の z 軸方向に変化は見られず、(5) B2-model R12や(7) B4-model R12と同じ境界形状となっている。また、B-modelにおいても、B2-modelと比べB4-modelの方が、ライズの低い形状となっている。

5.2 座屈荷重最大化と部材のグループ化 (P2) 最適形状および最適解

図6にP2-rにおけるA2-model R20の解析結果を示す。それぞれP2-5、P2-6まで最適化問題を繰り返した結果となっており、P2-5、P2-6が終了した時点での最終形状を最適形状とする。(1-a)は $e=0.05$ とした場合の最適形状および各最適化問題における最適解であり、(1-b)はP2-2終了時、(1-c)はP2-5終了時における部材種類を示す。ただし、対称性を考慮し、8分の1平面内の部材のみ記している。同様に、(2-a)、(2-b)および(2-c)は $e=0.1$ とした場合の結果である。(1) $e=0.05$ では $L_{\max}^{P2-r}-L_{\min}^{P2-r}$ が50.7cmから18.0cmまでおよそ64%減少している。同一グループとみなすための許容誤差を、例えば0.6cmとすると、(1-b)、(1-c)に示すように、P2-2の段階では部材種類は16種類であり、まだ部材長さは疎らであるが、P2-5終了時では部材種類は12種類となり、部材長さはかなり揃って

いる。また、(2) $e=0.1$ では、 $L_{\max}^{P2-r}-L_{\min}^{P2-r}$ は101.3cmから65.3cmまでおよそ36%減少し、部材種類は24種類から19種類にまで減少している。両モデル共に、繰り返しの過程において部材が徐々にグループ分けされていき、部材種類が減少したことで部材長さの揃った形状が得られた。一方で μ^c と h はP2-2からP2-5、P2-6の間にはほとんど変化せず、初期形状に比べると、(1) $e=0.05$ では μ^c は2.10倍、 h は1.25倍、(2) $e=0.1$ では μ^c は3.17倍、 h は1.48倍である。どちらもライズの上昇は見られるが、P1の最適形状ほどではなく、格子形状はほぼ直交を保っている。また、P2-2において、式(4.7)で表される制約条件の制約を緩めた(2)では、(1)と比べライズの上昇した形状となっており、 $L_{\max}^{P2-r}-L_{\min}^{P2-r}$ の減少率は小さくなっている。

6. 最適解の力学的性質

前章では、様々な制約条件の下、座屈荷重および部材長さに着目して形状最適化を行った。本章では、最適形状の力学的性質を明らかにし、どのようなメカニズムにより最適形状が選択されたかという点について検討する。

	P2-1	P2-2	P2-3	P2-4	P2-5
μ^c	39.72	39.69	39.61	39.6	39.59
$L_{\max}^{P2-r}$ (cm)	534.0	529.5	523.5	523.2	520.3
$L_{\min}^{P2-r}$ (cm)	483.3	489.4	495.6	495.8	502.3
$L_{\max}^{P2-r} - L_{\min}^{P2-r}$ (cm)	50.7	40.1	27.9	27.4	18.0
Number of groups	16	16	15	14	12
h (m)	10.04	10.04	10.04	10.04	10.03

(1-a) 最適形状 (P2-5 終了時) および最適解

	P2-1	P2-2	P2-3	P2-4	P2-5	P2-6
μ^c	59.77	59.73	59.73	59.74	59.73	59.79
$L_{\max}^{P2-r}$ (cm)	556.9	556.8	554.8	549.2	541.7	537.4
$L_{\min}^{P2-r}$ (cm)	455.6	455.7	457.3	461.5	467.3	472.1
$L_{\max}^{P2-r} - L_{\min}^{P2-r}$ (cm)	101.3	101.1	97.5	87.7	74.4	65.3
Number of groups	24	24	24	23	23	19
h (m)	11.88	11.88	11.88	11.88	11.88	11.87

(2-a) 最適形状 (P2-6 終了時) および最適解

部材グループ	部材長さ (cm)	部材グループ	部材長さ (cm)	部材グループ	部材長さ (cm)
1	489.4	8	517.1	12	519.6
	489.4		517.7		519.7
2	501.5	9	518.2		519.7
3	505.7	10	518.3		519.8
4	508.2		518.4	13	519.8
5	511.6		518.5		520.0
6	512.7		518.7	14	520.2
	512.9	11	519.0		522.9
7	515.2		519.2	15	528.9
8	516.9		519.4	16	529.5

(1-b) 部材種類 (P2-2 終了時)

部材グループ	部材長さ (cm)	部材グループ	部材長さ (cm)	部材グループ	部材長さ (cm)
1	456.1	11	529.1	17	536.3
2	474.1		530.9		538.6
3	493.0	12	531.3	18	538.7
4	502.0	13	532.6	19	539.6
5	507.1	14	533.9		540.1
6	515.7		534.1	20	542.0
7	516.8		534.7	21	549.9
8	519.1		535.1	22	554.6
9	525.1	15	535.4	23	555.3
	528.5		536.1	24	556.4

(2-b) 部材種類 (P2-2 終了時)

部材グループ	部材長さ (cm)	部材グループ	部材長さ (cm)	部材グループ	部材長さ (cm)
1	492.8	7	516.8	9	519.2
	493.3		516.8		519.2
2	503.8	8	518.3		519.3
3	505.0		518.4		519.5
4	512.1		518.5		519.6
5	513.2		518.7	10	519.6
	513.7	9	519.0		520.3
6	515.1		519.0	11	520.3
	515.7		519.0		521.6
7	516.7		519.1	12	527.8

(1-c) 部材種類 (P2-5 終了時)

(1) A2-model R20 $e=0.05$

部材グループ	部材長さ (cm)	部材グループ	部材長さ (cm)	部材グループ	部材長さ (cm)
1	458.0	9	529.4	14	536.8
2	473.1	10	531.1	15	537.5
3	493.5		531.7		537.5
4	502.0	11	532.8		537.5
5	509.8	12	534.6		537.5
6	516.2		535.3	16	540.9
	516.7	13	535.6	17	548.7
7	519.4		535.8	18	553.1
8	525.1		536.3		553.6
9	529.0		536.5	19	556.5

(2-c) 部材種類 (P2-6 終了時)

(2) A2-model R20 $e=0.1$

図6 P2-r: 座屈荷重最大化と部材長のグループ化を考慮した形状最適化結果

図7に各節点に基準荷重ベクトル P_0 を載荷した場合の、A2-model, A4-model の初期形状および最適形状における軸力図、曲げモーメント図を示す。上が軸力図、下が曲げモーメント図である。軸力図において網掛けが圧縮材、白抜きが引張材を表し、曲げモーメント図では、煩雑さを避けるため、対称性を考慮して一方向のみを記述する。

初期形状では、A2-model, A4-model 共に、端部に大きく曲げモーメントが発生しているが、最適形状では、それを抑えることができ、さらに P2 では、全体的に曲げモーメントが小さくなっている。これは、ライズが上昇し球に近い形状となることで2次曲げ応力を抑え、軸力抵抗型の構造となったためと考えられる。一方、軸力は初期形状に比べ、最適形状の方が全体的に小さくなっており、特に P1 でその傾向は大きい。また P1 では、境界から1つ内側の第1リングがテンション材となっているのが特徴的である。これは、格子形状が直交でなくなることにより、スラストに対し第1リングがテンションリングの役割を担う構造となったためと考えられる。ここには示していないが、他のモデルの場合もそれぞれ同様の傾向を持つ。

7. 最適解の検証

前章までに、線形座屈荷重を最大化する最適化を行い、得られた最適形状の力学的性質を述べてきた。しかし、扁平な単層ラチスシェルの場合、座屈前の幾何学的非線形性が座屈耐力・座屈後の性状に大きく影響を与えることが知られている。また、本論において対象とした2方向格子シェルはアーチ的な要素が強く、一般的なシェルと比べ初期不整合感度が小さくなることが考えられるものの、6章より最適形状は軸力抵抗型の構造となることが示されているため、形状初期不整合が座屈耐力低下の因子となる可能性がある。そこで本

章では、最適形状と初期形状に対し幾何学的非線形性を考慮した弾性非線形解析を行う。さらに形状初期不整合が非線形座屈荷重に与える影響について検討し、最適解の検証を行う。

解析にあたってモデルは全体モデルとし、最適形状は扁平であるために、より不安定な挙動が予想される P2 で得られた形状を用い、また形状変更における自由度が高い R20 のモデルについて考察する。なお、非線形座屈点は、釣り合い経路上で各変形状態における推定線形座屈荷重を求め、この推定線形座屈荷重と荷重が一致する点とし、その時の荷重を非線形座屈荷重 P_{cr}^{el} と定義する。

7.1 幾何学的非線形性を考慮した弾性非線形解析

弾性非線形解析における荷重-変位関係を図8に示す。図中の●は非線形座屈点を表し、実線は最適形状、点線は初期形状の解析結果である。(1) A-model の最適形状では、初期形状と比べ、斜材の有無に関わらず、非線形座屈荷重は大幅に増加し、初期剛性も大きくなっている。一方、(2) B-model の最適形状では、初期形状と比べ、A-model と同様に非線形座屈荷重は増加しているが、初期剛性はほとんど変わっていない。なお、どちらのモデルも変形は最適形状の方が大きい。表3に初期形状と最適形状(P2-r)の線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} および非線形座屈荷重 P_{cr}^{el} を示す。また μ_{int}^e および μ_{opt}^e も併せて記す。初期形状と比べた最適形状の座屈荷重増加率を線形固有値解析とのものと比較すると、線形座屈荷重では、A2-model は2.12倍、A4-model は3.80倍、B2-model は1.26倍、B4-model は1.55倍となっている一方で、非線形座屈荷重では、A2-model は2.34倍、A4-model は4.24倍、B2-model は1.47倍、B4-model は1.79倍といずれも増加率は増大している。

7.2 形状初期不整合を考慮した弾性非線形解析

前節では、得られた最適形状が、幾何学的非線形性を考慮した際

図7 初期形状、最適形状の軸力図および曲げモーメント図 (A2-model, A4-model)

(1) A-model

(2) B-model

図8 弾性非線形解析 荷重一変位関係

図9 荷重一変位関係および各変形状態での線形座屈荷重の推移

表3 線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} および非線形座屈荷重 P_{cr}^{el}

	initial shell			
	A2-model	A4-model	B2-model	B4-model
μ_{lin}	18.83	30.46	19.57	38.28
P_{cr}^{lin} (kN)	181.85	325.13	343.53	672.77
P_{cr}^{el} (kN)	163.48	245.85	291.94	477.09

	optimized shell			
	A2-model	A4-model	B2-model	B4-model
μ_{opt}	39.96	115.69	24.73	59.47
P_{cr}^{lin} (kN)	384.24	1224.65	432.19	1043.43
P_{cr}^{el} (kN)	383.34	1042.45	430.32	851.81

表4 1次, 2次固有モード形状

		initial shell			
		A2-model	A4-model	B2-model	B4-model
1次	xy平面	逆対称	逆対称	逆対称	対称
	yz平面	逆対称	逆対称	逆対称	対称
2次	xy平面	逆対称	逆対称	逆対称	逆対称
	yz平面	逆対称	逆対称	逆対称	対称

		optimized shell			
		A2-model	A4-model	B2-model	B4-model
1次	xy平面	逆対称	対称	逆対称	対称
	yz平面	逆対称	逆対称	逆対称	逆対称
2次	xy平面	対称	対称	逆対称	対称
	yz平面	逆対称	対称	逆対称	対称

※1 逆対称, 逆対称 ※2 対称, 対称 ※3 逆対称, 対称

も、有効な解であることを明らかにしてきた。本節では、前節の解析をもとに、形状初期不整を与えた場合の最適解の有効性について検討する。

図9に最適形状 A2-modelに対する弾性非線形解析の荷重一変位関係および各変形状態における1次, 2次線形座屈荷重の推移を示す。非線形座屈点に至るまでに固有値が入れ替わっており、線形固有値解析における1次固有モード形状と、非線形座屈点における1次固有モード形状が異なっている。このことより、従来、1次固有モードと相似な形状を持つ形状初期不整が、座屈耐力に対し最も影響を与えるとされているが、2次固有モードの形状も影響が大きい場合もあると考えられる。したがって、形状初期不整は完全形シェルの線形固有値解析から得られる1次および2次固有モードと相似

図10 最大不整振幅と低減率の関係

なものを仮定し、完全形シェルの各節点における固有ベクトルのノルムの最大値が、等価シェル厚 te の s (0.1, 0.2, 0.3, 0.4) 倍になるように不整振幅 δ を基準化し与えることとする。表4に各モデルの1次, 2次固有モード形状を示す。なお、等価シェル厚 te は、4方向格子の場合も弦材のみを考慮し、直交2方向格子の有効剛性を用いて求めることとする。本論では $te=2\sqrt{3}i$ とした。ここで、 i は弦材における部材の断面2次半径である。

A-modelの最大不整振幅 δ と完全形シェルの非線形座屈荷重 $P_{cr(p)}^{el}$ に対する初期不整を与えたシェルの非線形座屈荷重 $P_{cr(i)}^{el}$ の低減率 $P_{cr(i)}^{el}/P_{cr(p)}^{el}$ の関係を図10に示す。図中の点線は初期形状、実線は最適形状の解析結果であり、□が1次固有モードを用いた場合、○が2次固有モードを用いた場合を示す。(1) A2-modelでは、初期形状に比べ最適形状の不整敏感度は大きくなっているものの、その差は小さく5%弱である。一方、(2) A4-modelでは、最適形状の方が不整敏感度が小さいという結果が得られた。ここには示していないが、B2-model, B4-modelはA2-modelと同様の傾向を持つ結果となっている。以上のことより、初期形状と最適形状の初期不整敏感度に差はなく、最適化を行ったことを理由とする敏感度の増大は見られないと考えられる。

8. 結論

本論では、ベジエ曲面によって記述された単層ラチス自由曲面シェルの対象として、部材長さに関する制約条件の下、線形座屈荷重係数を最大化し、その上で部材長さを揃える工夫を試みることで、力学的な観点と、施工性の観点を融合した形状最適化について論じ

た。さらに最適解の力学特性を把握し、幾何学的非線形性を考慮した弾性非線形解析および形状初期不整に対する敏感性を検討を行うことで、解の有効性を検証した。構造物の力学的能力を十分に発揮できる形態を創生し、また施工性やデザイン性を考慮することは、今後需要が高まるであろう単層ラチス任意曲面シェルの可能性を広げる試みであり、設計段階初期のデザインにおける一つの指標を提案できると筆者らは考える。得られた結論を以下に示す。

- (1) ベジエ曲面を用いることで、スムーズな最適形状を得ることができ、部材長さに関する制約条件を与えることにより、非現実的な形状が得られ難くなる。
- (2) 線形座屈荷重を最大化することにより、2次曲げ応力を抑えた、軸力抵抗型の構造を持つラチスシェル形状となる。さらに、格子形状が直交でなくなる場合、テンションリングを持った構造となる。
- (3) 最適化を数段階に分け、部材をグルーピングしながら、部材長さの最大値と最小値の差を最小化することにより、線形座屈荷重を考慮しながら、部材種類の少ない形状を得ることができる。
- (4) 弾性非線形解析を行った結果、最適形状の非線形座屈荷重は初期形状と比べて増加しており、最適形状は幾何学的非線形を考慮した際にも有効な形状であると言える。
- (5) 最適形状は軸力抵抗型の構造となるため、形状初期不整に対する敏感度が大きくなる可能性が示唆されるものの、最適形状と初期形状では敏感度に差はなく、最適化を行ったことによる目立った敏感度の増大は見られない。

謝辞

本研究の一部は、平成14年度科学研究費補助金基盤研究(C)(2) (課題番号：14550560) によるものである。ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) 立石理恵, 小河利行, 大崎 純, 熊谷知彦: 線形座屈荷重を目的関数とした単層ラチスシェルの形状最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸), B-1, pp.763-764, 2002.8
- 2) T. Ogawa, M. Ohsaki, R. Tateishi and T. Kumagai: Shape Optimization of Single-layer Latticed Shells for Maximum Linear Buckling Loads, The Fifth International Conference of Space Structure, Vol. 2, pp.1345-1354, 2002
- 3) I.D. Faux and M.J. Pratt: Computational Geometry for Design and Manufacture, Ellis Horwood, 1979
- 4) G. Farin: Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 1988
- 5) D.F. Rogers and J.A. Adams: Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill, 1990
- 6) E. Barnhill (Ed.): Geometry Processing for Design and Manufacturing, SIAM, 1992
- 7) E. Ramm, K.-U. Bletzinger and R. Reitinger: Shape Optimization of Shell Structures, Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol. 34 n.2(n.112), pp.103-121, 1993
- 8) M. Ohsaki and M. Hayashi: Fairness Metrics for Shape Optimization of Ribbed Shells, Journal of International Association for Shell and Spatial Structures, Vol. 41 No. 1, pp.31-39, 2000
- 9) M. Ohsaki, T. Nakamura and M. Kohiyama: Shape Optimization of Double-Layer Space Truss Described by a Parametric Surface, International Journal of Space Structures, Vol. 12 No. 2, pp.109-119, 1997
- 10) 小河利行, 桑田真理子: 鉛直荷重を受ける剛接合単層ラチスドームの弾塑性座屈性状, 日本建築学会構造系論文集, 第506号, pp.131-138, 1998.4
- 11) 小河利行, 加藤史郎, 萩原真祐子, 立石理恵: 等分布荷重を受ける単層 HP ラチスシェルの座屈挙動と耐力評価, 日本建築学会構造系論文集, 第553号, pp.65-72, 2002.3
- 12) T. Ogawa, M. Ohsaki, Y. Nishikawa and R. Tateishi: Mechanical Properties of Two-way Grid Shells Optimized Considering Roundness and Elastic Stiffness, The Second China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems, pp. 201-206, 2002
- 13) 大森博司, 山本憲司: 応力分布を目的関数とする空間構造物の形状最適化に関する研究 その1 シェル構造への適用, 日本建築学会構造系論文集, 第496号, pp.67-73, 1997.6
- 14) 大森博司, 山本憲司: 応力分布を目的関数とする空間構造物の形状最適化に関する研究 その2 スペースフレームへの適用, 日本建築学会構造系論文集, 第503号, pp.77-83, 1998.1
- 15) W. Prager, J.E. Taylor: Problems of Optimal Structural Design, Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, pp.102-106, 1968
- 16) N. Olhoff and S.H. Rasmussen: On Single and Bimodal Optimum Buckling Loads of Clamped Columns, Int. J. Solids Struct., pp.605-614, 1977
- 17) N.S. Khot, V.B. Venkayya and L. Berke: Optimum Structural Design with Stability Constraints, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 1097-1114, 1976
- 18) 陳 沛 山, 川口 衛: スペースフレームの最大座屈荷重形態, 日本建築学会構造系論文集, 第489号, pp.41-46, 1996.11
- 19) M. Ohsaki and T. Nakamura: Optimum Design with Imperfection Sensitivity Coefficients for Limit Point Load, Structural Optimization, Vol. 8, pp.131-137, 1994
- 20) M. Ohsaki, K. Uetani and M. Takeuchi: Optimization of Imperfection-sensitive Symmetric Systems for Specified Maximum Load Factor, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 166, pp.349-362, 1998
- 21) M. Ohsaki: Optimization of Geometrically Nonlinear Symmetric Systems with Coincident Critical Points, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 48, pp.1345-1357, 2000
- 22) Recommendations for Reinforced Concrete Shells and Folded Plates, International Association for Shell and Spatial Structures, working group nr 5, 1979
- 23) 山田聖志, 竹内明子, 多田敬幸, 堤 和敏: 汎用構造解析コードによる RS 解析法と単層ラチスドームの座屈問題への適用, 日本建築学会構造系論文集, 第526号, pp.85-92, 1999.12
- 24) 小河利行, 桑田真理子: 形状初期不整の分布形状が剛接合単層ラチスドームの弾塑性座屈荷重に与える影響, 日本建築学会構造系論文集, 第531号, pp.109-115, 2000.5
- 25) M.P. Kamat, N.S. Khot and V.B. Venkayya: Optimization of Shallow Trusses Against Limit Point Instability, AIAA Journal, Vol. 22 No. 3, pp.403-408, 1984
- 26) R. Levy and H.-S. Perig: Optimization for Nonlinear Stability, Computers & Structures, Vol. 30 No. 3, pp.529-535, 1988
- 27) 山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 座屈荷重を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究: 日本建築学会構造系論文集, 第564号, pp.95-102, 2003.2
- 28) M. Ohsaki: Structural Optimization for Specified Nonlinear Buckling Load Factor, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 19, pp.163-179, 2002
- 29) 石川浩一郎, 池畑勝仙, 西村圭介: Geometric Potential 最小化によるラチスドームのグリッド分割法, 日本建築学会技術報告集, 第9号, pp. 83-88, 1999.12
- 30) 大澤義明, 木島安史: ドーム表面の不規則な三角形分割に関する研究, 日本建築学会計画系論文報告集, 第425号, pp.87-92, 1991.7
- 31) T. Tarnai: Optimization of Spherical Networks for Geodesic Domes, Proceeding Third International Conference of Space Structure, pp. 100-104, Elsevier Applied Science Publishers, 1984

(2003年1月10日原稿受理, 2003年5月26日採用決定)