不均等曲げせん断力を受ける周辺固定支持平板の弾性座屈耐力の導出 AN ANALYTICAL METHOD FOR ELASTIC BUCKLING STRENGTH OF CLUMPED PLATE UNDER UNEQUAL BENDING AND SHEAR

五十嵐 規矩夫*, 鈴木 琢也**

Kikuo IKARASHI and Takuya SUZUKI

In the past, various researches are performed about buckling of plate. But, about clumped plate under combine stress, few researches are performed. Because it is difficult to consider both clumped condition and combine stress. However, the buckling shape of beam is alike the one of clumped plate. So, it is important to understand buckling of clumped plate under unequal bending and shear owing to understanding the buckling behavior.

The purpose of this study is to show the method for elastic buckling strength of clumped plate under unequal bending and shear. For this problem, new function of deflection is proposed. And, energy method with it is proposed as method for this buckling problem. It is showed that it is easy to understand buckling strength and shape of clumped plate under combined stress with this method.

Keywords : *Elastic buckling, Shear, Unequal bending, Clumped plate, Energy method*

弾性座屈, せん断, 不均等曲げ, 周辺固定支持平板, エネルギー法

§ 1. 序

H形鋼梁の耐力, 塑性変形能力や崩壊性状についてはこれまでに多くの研究がなされてきており, その性状について多くの有益な知見が得られている^{1)~5)}。そのような中で, 文献6), 7) はウェブ幅厚比が大きくせん断力の影響を強く受ける梁の性状について取り扱い, その性状を明らかにするとともに, このような梁の最大耐力がウェブの座屈によって決定されていることを示している。また, そのウェブの座屈にはせん断のみではなく曲げ応力の影響も大きいことを明らかにしている。このことから, 梁の塑性変形能力や崩壊性状をより正確に把握するためには, せん断と曲げの複合応力を考慮した板の座屈性状をより詳細に把握する必要があると言える。

しかし, 梁に作用するせん断応力と曲げ応力を再現した平板の座屈についての研究は少なく, 弾性座屈性状すら十分に把握されているとは言えない。これに対し, 文献8) では不均等曲げせん断力を受ける四辺単純支持平板の弾性座屈について調べ, 簡便な耐力算定式を提案している。しかしながら, せん断力の影響の大きな梁は写真1に示すようにフランジが振れずにウェブの座屈のみで崩壊するものも存在する⁹⁾。この場合座屈波形は周辺固定支持のものに近くなると考えられる。現在一般的には, 周辺支持条件を単純支持としてのみウェブ板の座屈を取り扱っているものが多い。しかしこの扱いは, ウェブ板の座屈耐力を過小評価する可能性もあり, 十分であるとは考えられない。

このような梁の弾性座屈性状を求めるにはせん断および曲げの複合応力が作用する四辺固定支持平板の弾性座屈耐力評価も必要になると考えられるが, これまでに四辺固定支持平板の座屈解析は純せん断, 純曲げもしくは純圧縮といった単純な応力状態のものしか行われていない^{9), 10)}。せん断と曲げの複合応力を受ける四辺固定支持平板の座屈解析はその座屈波形が予測できるようなもの以外はほとんど行われていないというのが現状である。これは四辺固定の境界条件を導入すること自体が困難であり, さらに複合応力を導入した場合, 計算がより複雑なものになってしまうためであると考えられる。

しかし, せん断と曲げの複合応力を受ける四辺固定支持平板の座屈耐力を求めることができるならば, 梁の崩壊性状をより詳細に理解で

写真1・梁ウェブの座屈変形 (文献6)

* 東京工業大学大学院理工学研究科建築学専攻
助教授・博士(工学)

** 東京工業大学大学院理工学研究科建築学専攻
博士後期課程・修士(工学)

Assoc. Prof., Dept. of Architecture and Building Faculty of Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.
Graduate Student, Dept. of Architecture and Building Faculty of Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, M. Eng.

きる可能性がある。また、梁ウェブ周辺の境界条件が座屈耐力に与える影響を知るためにも、その上限値を知ることは重要である。

そこで本研究においては、独自の変位関数を提案しエネルギー法を用いることによって図1に示すような不均等曲げせん断力を受ける四辺固定支持平板の座屈耐力および座屈波形を算出する手法について論じることを目的とする。

§ 2. 本研究で提案する変位関数とその特性

エネルギー法による四辺固定支持平板の座屈解析が困難になる理由は、境界条件を満たす変位関数の設定が難しいためである。一般的にエネルギー法においては変位関数をそれぞれが境界条件を満たし直交関係にある無限級数の形で置く。しかしながら、固定支持の場合それらの条件を満たす無限級数を用いて座屈解析手法を示した研究は、著者が知る限り見当たらない。このため、固定支持においては、波形はある程度予測でき、多くの級数をとらずに済む比較的単純な外力条件のもののみが解かれ、波形を予測することが難しい複合応力の場合が解かれてこなかったと考えられる。

しかし、図1に示すような複合応力を受ける四辺固定支持平板の座屈荷重を求める場合、座屈波形を限定することは難しいため変位関数を無限級数の形で与えることが必要となる。そこで本研究では変位関数を以下の式のような形で置くことを提案する。なお、座標軸については図1に示すものとする。

$$w = \sum_i \sum_j a_{ij} u_i v_j \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$u_i = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$v_j = \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここで u_i は x のみの関数であり v_j は y のみの関数である。 u_i および v_j の波形のいくつかを図2に示す。 i または j によって波の数が表され、各境界において u_i および v_j は以下の条件を満たす。

$$x=0, a \text{ において, } u_i = 0 \quad \frac{du_i}{dx} = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$y=0, b \text{ において, } v_j = 0 \quad \frac{dv_j}{dy} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

したがって、この級数によって表された変位関数は四辺固定支持平板の境界条件である以下の式を満たす。

$$x=0, a \text{ において, } w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$y=0, b \text{ において, } w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

しかしながら、これらの級数には直交関係が存在しない。このため、これらの級数は、以下の式によって表される直交関数をもつ特性を持たない級数となる。

$$i \neq m \text{ において, } \int_0^a u_i \cdot u_m dx = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$j \neq n \text{ において, } \int_0^b v_j \cdot v_n dy = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

変位関数としておいたそれぞれの級数に直交関係が存在しない場合、(8),(9)式のような関係を用いることができないため座屈荷重を求める際に必要となるポテンシャルエネルギーの算出式が複雑になる。ま

図1 ウェブに作用する応力分布

$$u_i = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} \quad v_k = \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b}$$

図2 本研究で提案する変位関数の波形

た、直交性がないために多くの級数をとっても真の座屈波形を表現できず、精確な座屈荷重が算出されない可能性もある。

しかし、本研究においては境界条件を満たすこと、 i, j によって波形の形が容易に理解できることに着目し、この変位関数を用いて、エネルギー法によって複合応力を受ける四辺固定支持平板の座屈耐力を求めることとした。

§ 3. エネルギー法による一般式の展開

前章において変位関数が定義された。本章においてはエネルギー法による一般的な解法原理について述べ、板要素に複合応力が作用し座屈を生じる場合の一般関係式を導出する。

3.1 座屈応力度

板に作用する直応力度およびせん断応力度分布は以下のようによく。なお座標軸は図1によるものとし、直応力については引張側を正、せん断応力については図1に示す向きを正とする。ここで、 σ_{x1} , τ_{xy1} はそれぞれの最大応力度である。

$$\sigma_x = \sigma_{x1} f(x, y) \quad \tau_{xy} = \tau_{xy1} g(x, y) \quad \dots \dots \dots (10)$$

続いて、 τ_{xy1} を σ_{x1} を基準として以下のように表す。

$$\tau_{xy1} = \alpha \sigma_{x1} \quad \dots \dots \dots (11)$$

したがって、(11)式を(10)式に代入することで、応力度分布は以下のように表すことができる。

$$\sigma_x = \sigma_{x1} f(x, y) \quad \tau_{xy} = \alpha \sigma_{x1} g(x, y) \quad \dots \dots \dots (12)$$

そして、座屈時の σ_{x1} を基準となる応力度 σ_c の倍数で表し、この倍数 k を座屈係数とする。すなわち、

$$(\sigma_{x1})_{cr} = k \sigma_c \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$\text{ここで、} \sigma_c = \frac{\pi^2 D}{t b^2} \quad \dots \dots \dots (14)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots \dots \dots (15)$$

ここで t は板厚、 E はヤング率、 ν はポアソン比をそれぞれ表している。これより、座屈時の応力度分布は以下の式によって表されるものとなる。

$$(\sigma_x)_{cr} = k \sigma_c f(x, y) \quad (\tau_{xy})_{cr} = k \alpha \sigma_c g(x, y) \quad \dots \dots \dots (16)$$

したがって、想定する板に作用する応力度分布から $f(x, y)$ 、 $g(x, y)$ 、 α を定めれば、応力度分布は座標 x および y と座屈係数 k によって表される関数となる。

3.2 解法原理

エネルギー理論によれば、座屈条件は座屈曲面仮想変位 w に伴う二次のエネルギー変化が零になることから以下の式で表される⁹⁾。

$$\frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ + \frac{1}{2} k \sigma_c t \int_0^a \int_0^b \left[f(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\alpha g(x, y) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad \dots \dots (17)$$

さらにこの式は I_1 、 I_2 を用いて以下のように書き換えられる。

$$I_1 + k I_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (18)$$

ここで、

$$I_1 = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (19)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sigma_c t \int_0^a \int_0^b \left[f(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\alpha g(x, y) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad \dots \dots \dots (20)$$

(18)式において k の値を極小とする条件から、次の一般座屈条件式が得られる。

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_{mn}} + k \frac{\partial I_2}{\partial a_{mn}} = 0 \quad \dots \dots \dots (21)$$

この式は全ての a_{mn} において成り立つ。したがって、想定する変位関数の項数だけ(21)式の形で座屈条件式が得られる。

また、(1)式を(19)、(20)式に代入し、それぞれ a_{mn} で微分すると、

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_{mn}} = D \sum_i \sum_j a_{ij} \int_0^a \int_0^b \left\{ (\dot{u}_i v_j + u_i \dot{v}_j) (\ddot{u}_m v_n + u_m \ddot{v}_n) \right. \\ \left. - (1-\nu) (\ddot{u}_m v_n u_i \dot{v}_j + \dot{u}_i v_j u_m \ddot{v}_n + 2\dot{u}_i \dot{v}_j u_m \ddot{v}_n) \right\} dx dy \quad \dots \dots \dots (22)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_{mn}} = \sigma_c t \sum_i \sum_j a_{ij} \int_0^a \int_0^b \left\{ f(x, y) (\dot{u}_i v_j u_m v_n) \right. \\ \left. + \alpha g(x, y) (\ddot{u}_m v_n u_i \dot{v}_j + \dot{u}_i v_j u_m \ddot{v}_n) \right\} dx dy \quad \dots \dots \dots (23)$$

$$\text{ここで、} \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} \quad \ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad \dot{v}_j = \frac{\partial v_j}{\partial y} \quad \ddot{v}_j = \frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} \quad \dots \dots \dots (24)$$

となり、 $\partial I_1 / \partial a_{mn}$ 、 $\partial I_2 / \partial a_{mn}$ ともに各 a_{ij} の一次式となる。

したがって、(21)式の形で表される一次同次方程式は二つの正方行列 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ によって以下のように表すことができる。

$$\mathbf{A} \{a_{ij}\} + k \mathbf{B} \{a_{ij}\} = 0 \quad \dots \dots \dots (25)$$

ここで、 A_{ijmn} 、 B_{ijmn} を、それぞれ(19)および(20)式を a_{mn} で微分した時の a_{ij} の係数として定義する。これらはそれぞれ行列 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ を構成する各成分となる。一例として、図3に A_{ijmn} による行列 $\mathbf{A}$ の構成を示す。

これらは、(22)、(23)式よりそれぞれ

$$A_{ijmn} = D \int_0^a \int_0^b \left\{ (\dot{u}_i v_j + u_i \dot{v}_j) (\ddot{u}_m v_n + u_m \ddot{v}_n) \right. \\ \left. - (1-\nu) (\ddot{u}_m v_n u_i \dot{v}_j + \dot{u}_i v_j u_m \ddot{v}_n + 2\dot{u}_i \dot{v}_j u_m \ddot{v}_n) \right\} dx dy \quad \dots \dots (26)$$

$$B_{ijmn} = \sigma_c t \int_0^a \int_0^b \left\{ f(x, y) (\dot{u}_i v_j u_m v_n) + \alpha g(x, y) (\ddot{u}_m v_n u_i \dot{v}_j + \dot{u}_i v_j u_m \ddot{v}_n) \right\} dx dy \quad \dots \dots \dots (27)$$

と表せる。また、(27)式に(14)式を代入すると

$$B_{ijmn} = \frac{\pi^2}{b^2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ f(x, y) (\dot{u}_i v_j u_m v_n) + \alpha g(x, y) (\ddot{u}_m v_n u_i \dot{v}_j + \dot{u}_i v_j u_m \ddot{v}_n) \right\} dx dy \quad \dots \dots \dots (28)$$

となる。ここで、行列 $\mathbf{A}'$ 、 $\mathbf{B}'$ を

$$\mathbf{A} = \frac{D\pi^2}{b^2} \mathbf{A}' \quad \dots \dots \dots (29)$$

$$\mathbf{B} = \frac{D\pi^2}{b^2} \mathbf{B}' \quad \dots \dots \dots (30)$$

と定め、これらの各成分をそれぞれ A'_{ijmn} 、 B'_{ijmn} とすると、 A'_{ijmn} 、 B'_{ijmn} はそれぞれ以下ようになる。

$$A'_{ijmn} = \frac{b^2}{\pi^2} \int_0^a \int_0^b \left\{ (\dot{u}_i v_j + u_i \dot{v}_j) (\ddot{u}_m v_n + u_m \ddot{v}_n) \right. \\ \left. - (1-\nu) (\ddot{u}_m v_n u_i \dot{v}_j + \dot{u}_i v_j u_m \ddot{v}_n + 2\dot{u}_i \dot{v}_j u_m \ddot{v}_n) \right\} dx dy \quad \dots \dots (31)$$

$$B'_{ijmn} = \int_0^a \int_0^b \left\{ f(x, y) (\dot{u}_i v_j u_m v_n) + \alpha g(x, y) (\ddot{u}_m v_n u_i \dot{v}_j + \dot{u}_i v_j u_m \ddot{v}_n) \right\} dx dy \quad \dots \dots \dots (32)$$

また、(29)、(30)式より(25)式は次のように表される。

$$\{\mathbf{A}' + k\mathbf{B}'\} \{a_{ij}\} = 0 \quad \dots \dots \dots (33)$$

(34)式において $\{a_{ij}\}$ が $\{0\}$ 以外の解を持つ時、 k は固有値、 $\{a_{ij}\}$ は固有ベクトルとして解が与えられる。よって、この(33)式の固有値のうち最も小さなものが板の座屈係数となり、その時の固有ベクトル $\{a_{ij}\}$ から座屈波形が定まる。

3.3 マトリックスの決定

行列 $\mathbf{A}'$ 、 $\mathbf{B}'$ を(31)式および(32)式によって定義すれば、(33)式の固有値問題を解くことによって座屈係数、座屈波形とも求まる。しかし、本研究で提案する変位関数を用いる場合、行列 $\mathbf{A}'$ 、 $\mathbf{B}'$ の各要素を定義

A	i \ j	1	1	...	i
		1	2	...	1
m \ n	1 \ 1	A_{1111}	A_{1211}		A_{ij11}
	1 \ 2	A_{1112}	A_{1212}		A_{ij12}
	...				
m \ n		A_{1lmn}	A_{12mn}		A_{ijmn}

図3 A_{ijmn} による行列 $\mathbf{A}$ の構成

するには複雑な積分問題を解く必要が生じる。これは本研究で提案する変位関数に用いる級数が直交条件を満たしていないためである。このために四辺単純支持の場合に比べて行列の各要素はかなり複雑なものになる。ここではその各要素の算出過程について述べる。

まず、 $\mathbf{A}'$ について考える。今、

$$\begin{aligned} U_1(i, m) &= \int_0^b u_i \cdot u_m dx & V_1(j, n) &= \int_0^b v_j \cdot v_n dy \\ U_2(i, m) &= \int_0^b \dot{u}_i \cdot \dot{u}_m dx & V_2(j, n) &= \int_0^b \dot{v}_j \cdot \dot{v}_n dy \\ U_3(i, m) &= \int_0^b \ddot{u}_i \cdot \ddot{u}_m dx & V_3(j, n) &= \int_0^b \ddot{v}_j \cdot \ddot{v}_n dy \\ U_4(i, m) &= \int_0^b \ddot{\ddot{u}}_i \cdot \ddot{\ddot{u}}_m dx & V_4(j, n) &= \int_0^b \ddot{\ddot{v}}_j \cdot \ddot{\ddot{v}}_n dy \end{aligned} \quad (34)$$

とおくと、(31)式の第1項および第2項はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{b^2}{\pi^2} \{ U_3(i, m) \cdot V_1(j, n) + U_4(i, m) \cdot V_4(j, n) + U_1(i, m) \cdot V_3(j, n) + U_4(m, i) \cdot V_4(j, n) \} \quad (35)$$

$$\frac{b^2}{\pi^2} (1 - \nu) \{ U_4(m, i) \cdot V_4(j, n) + U_4(i, m) \cdot V_4(n, j) - 2 \cdot U_2(i, m) \cdot V_2(n, j) \} \quad (36)$$

なお、それぞれの積分結果についてはappendixを参照するものとする。appendixより(34)式は全て対称式となるので、(35)、(36)式はそれぞれ以下のように表せる。

$$\frac{b^2}{\pi^2} \{ U_3(i, m) \cdot V_1(j, n) + U_1(i, m) \cdot V_3(j, n) + 2 \cdot U_4(i, m) \cdot V_4(j, n) \} \quad (37)$$

$$\frac{b^2}{\pi^2} (1 - \nu) \{ 2 \cdot U_4(i, m) \cdot V_4(n, j) - 2 \cdot U_2(i, m) \cdot V_2(n, j) \} \quad (38)$$

さらに、appendixより

$$U_2(i, m) = -U_4(i, m) \quad V_2(j, n) = -V_4(j, n) \quad (39)$$

であるので、結局(38)式は零となる。したがって、

$$A'_{ijmn} = \frac{b^2}{\pi^2} \{ U_3(i, m) \cdot V_1(j, n) + U_1(i, m) \cdot V_3(j, n) + 2 \cdot U_4(i, m) \cdot V_4(j, n) \} \quad (40)$$

なお、(34)式の対称性は変位関数を単純支持平板の一般式、

$$u_i = \sin \frac{i\pi x}{a} \quad v_j = \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (41)$$

とした場合にも成り立つ。これより、四辺固定支持だけではなく、四辺単純支持、あるいは二辺固定-二辺単純支持という境界条件においても(39)式の値は零となり、 A'_{ijmn} は(40)式によって表される。

続いて、行列 $\mathbf{B}'$ について考える。行列 $\mathbf{B}'$ は(32)式からも分かるように応力度分布関数の影響を受ける。したがって、外力条件によって必要な積分計算が異なる。このため、行列 $\mathbf{B}'$ については次章以降のそれぞれの外力条件に対して適宜、算出式を示すこととする。なお、その際に生じる積分計算についてもappendixを参照することとする。

§ 4. 本研究で提案する変位関数の妥当性

2章で述べたように、本研究で四辺固定支持平板の変位関数として用いた級数はそれぞれに直交関係を持たない。このため、その妥当性についての検証が必要となる。本章では3章までに述べられた手法を用いて四辺固定支持平板が純圧縮、純せん断、純曲げ応力を受ける際の座屈係数を算出し、既往の研究結果¹⁰⁾と比較することにより、本研究で提案する変位関数の妥当性について検証する。なお純曲げについては四辺固定支持平板の研究結果がないため、二辺固定支持-二辺単純支持のものについても算出し検証を行う。なお、この解析においては(1)~(3)式で表される級数を*i, j*ともに1~20までとって座屈係数を算出している。また、級数項の増大による解の収束性の確認も行う。

4.1 純圧縮応力下

純圧縮の場合の応力度分布は以下の式で表現される。

$$\sigma_x = \sigma_{x1} \quad \tau_{xy} = 0 \quad (42)$$

したがって、

$$f(x, y) = 1 \quad \alpha g(x, y) = 0 \quad (43)$$

となる。これより、行列 $\mathbf{B}'$ の各成分 B'_{ijmn} は(32)式より

$$B'_{ijmn} = \int_0^a \int_0^b \dot{u}_i v_j \dot{u}_m v_n dx dy \quad (44)$$

さらに(34)式より

$$B'_{ijmn} = U_2(i, m) \cdot V_1(j, n) \quad (45)$$

となる。この(45)式と(40)式から(33)式の一般固有値問題の二つの行列が定まり、純圧縮の場合の座屈係数を求めることができる。

その結果を既往の研究結果¹⁰⁾とともに図4に示す。

4.2 純せん断応力下

純せん断の場合の応力度分布は以下の式で表現される。

$$\sigma_x = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{xy1} \quad (46)$$

したがって、

$$f(x, y) = 0 \quad \alpha g(x, y) = 1 \quad (47)$$

となる。これより、行列 $\mathbf{B}'$ の各成分 B'_{ijmn} は(32)式から

$$B'_{ijmn} = \int_0^a \int_0^b (\dot{u}_m v_n u_i \dot{v}_j + \dot{u}_i v_j u_m \dot{v}_n) dx dy \quad (48)$$

ここで、

$$U_5(i, m) = \int_0^a \dot{u}_i \cdot \dot{u}_m dx \quad V_5(j, n) = \int_0^b \dot{v}_j \cdot \dot{v}_n dy \quad (49)$$

とおくと、(48)式は

$$B'_{ijmn} = U_5(m, i) V_5(j, n) + U_5(i, m) V_5(n, j) \quad (50)$$

となる。またappendixより(49)式はそれぞれ、

$$U_5(i, m) = -U_5(m, i) \quad V_5(j, n) = -V_5(n, j) \quad (51)$$

の関係を満たす。したがって(50)式は結局

$$B'_{ijmn} = 2U_5(m, i) V_5(j, n) \quad (52)$$

となる。この(52)式と(33)、(40)式から純圧縮の場合と同様に純せん断の場合の座屈係数を求めることができる。

その結果を既往の研究結果¹⁰⁾とともに図5に示す。

4.3 純曲げ応力下

純曲げの場合の応力度分布は以下の式のようになる。

$$\sigma_x = \sigma_{x1} \left(1 - \frac{2}{b} y\right) \quad \tau_{xy} = 0 \quad (53)$$

したがって、

$$f(x, y) = 1 - \frac{2}{b} y \quad \alpha g(x, y) = 0 \quad (54)$$

となる。これより行列 $\mathbf{B}'$ の各成分 B'_{ijmn} は(32)式より

$$B'_{ijmn} = \int_0^a \int_0^b \left(1 - \frac{2}{b} y\right) (\dot{u}_i v_j \dot{u}_m v_n) dx dy \quad (55)$$

さらに、

$$U_6(i, m) = \int_0^a x \cdot \dot{u}_i \cdot \dot{u}_m dx \quad V_6(j, n) = \int_0^b y \cdot \dot{v}_j \cdot \dot{v}_n dy \quad (56)$$

とおくと、式(55)は

$$B'_{ijmn} = U_2(i, m) \cdot (V_1(j, n) - \frac{2}{b} V_6(j, n)) \quad (57)$$

となる。この(57)式と(33)、(40)式から純圧縮の場合と同様に純曲げの場合の座屈係数を求めることができる。なお、純曲げについては既往の研究結果がないためx軸に平行な二辺を固定-他の二辺を単純支持とした場合についても計算を行った。このときx方向の変位関数 u_i は

$$u_i = \sin \frac{i\pi y}{a} \quad (58)$$

図4 純圧縮座屈係数

図5 純せん断座屈係数

図6 純曲げ座屈係数

とにおいて計算する。 u_i を(58)式のようにおく場合、二つの正方行列を作る過程で(40)式、(57)式中の各 U が本研究のものと異なるが、この場合の各 U については既往の研究⁹⁾を参照するものとする。二辺固定-二辺単純支持の場合はこれを参照し、座屈係数を求めることとする。これらの解析結果を既往の研究結果¹⁰⁾とともに図6に示す。なお、辺長比が無大になる場合の二辺固定-二辺単純支持の座屈係数の収束値についても併せて示す。二辺固定-二辺単純支持の座屈耐力は、辺長比が無大の領域において四辺固定支持の座屈耐力を近似できると考えられる。

4.4 変位級数の項数と解の収束性

図4～図6より純圧縮、純せん断、純曲げ応力状態のいずれの場合においても、本研究の解析結果と既往の研究の結果とは良い対応を示していることが分かる。本研究で変位関数として提案する級数は直交関係は満たしていないものの、 i, j をそれぞれ1～20までとって計算すれば、様々な波形の座屈に対して十分な精度によって座屈係数を算出できている。しかし、これほど多くの級数項を用いなくても座屈係数を精度良く算出することは十分可能であると考えられる。そこで、本節では級数項の増加による解の収束性についての確認を行い、座屈耐力を算出する上で適切な級数項数について論じる。なお、この検証には、波形の最も複雑なものとして純せん断の場合を用いている。

まず、 x 方向の変位級数の項数 i の増加による解の収束性について考える。 y 方向の変位級数の項数 j を一定にし、 i を1～20まで増加させた時の座屈係数の収束の様子を図7に示す。なお、解の収束性は辺長比 $\lambda (=a/b)$ によって変化すると考えられるため、 $\lambda = 2$ および $\lambda = 10$ のそれぞれについて座屈係数の収束性を示している。また、それぞれの λ における座屈係数の近似値¹¹⁾についても併せて示す。図よりいずれの λ においても j の値に関係なく、ある i において解は十分収束するようになる。必要な x 方向の変位級数の項数は、 y 方向の変位級数の項数に関係なく、 λ によってほぼ決定されることが考えられる。そこで、 λ との関係について考える。四辺単純支持の場合には x 方向の波の数は λ とおおむね等しくなることから、少なくとも i は λ 程度必要であると考えられる。しかし、図7よりどちらの λ においても $i = \lambda$ では十分収束しているとは言えず、 λ の1.5倍から2.0倍程度の項数が必要となることが分かる。これは、固定支持の場合には、単純支持の場合に比べて、各辺から拘束を受け座屈波形が複雑になるためであると考えられる。

つづいて、 y 方向の変位級数の項数 j の増加による解の収束性について考える。図8に x 方向の変位級数の項数 i を一定にし、 j を1～20まで増加させた時の座屈係数の収束の様子を示す。なお、前述の結

図7 級数項の増加と解の収束性(x方向)

図8 級数項の増加と解の収束性(y方向)

果より、 i は λ の2倍としている。図より i を適切にとれば、 j を大きな値としなくとも十分な精度で収束することが分かる。 $j = 3$ とした場合でも図中に示した近似解との誤差は、 $\lambda = 2$ で3.2%、 $\lambda = 10$ で3.7%程度の小さいものである。また、解が十分に収束する y 方向の変位級数の項数は λ の値によらず、ほぼ一定である。これは辺長比が1以上であれば、 y 方向の座屈波形は辺長比によらず常に1波となり、 λ によってほとんど変化しないためであると考えられる。よって $\lambda \geq 1$ の範囲においては、 j の値は5、あるいは6程度としておけば十分な精度で解は得られると言える。

以上より、本研究で提案する変位関数を用いて十分正確な値を得るためには、 i の値は λ の2倍程度、 j の値は6程度とする必要があると言える。ただし、これは辺長比が1以上となる場合においてであり、

1 以下となり y 方向に多くの波を生じる場合においては j の値を多くとる必要があると考えられる。しかし、この場合はこれまでの議論の x と y を入れ替えればよいと考えられるため、解を十分収束させるための適切な i および j については以下になる。

$$\lambda \geq 1 \text{ のとき} \quad i = 2\lambda \quad j = 6 \quad \dots \dots \dots (59)$$

$$\lambda \leq 1 \text{ のとき} \quad i = 6 \quad j = 2(1/\lambda) \quad \dots \dots \dots (60)$$

ただし、 i または j が 6 未満となる場合には 6 とする。

以上のように本研究で変位関数として提案する級数は直交関係を満たしていないものの、収束性もよく、 i, j を適切にとって計算すれば、様々な波形の座屈に対して十分な精度によって座屈係数を算出できる。したがって、この変位関数をエネルギー法に適用することによって座屈固有値を求める手法は十分妥当であると言える。

§ 5. 不均等曲げせん断力を受ける四辺固定支持平板の座屈荷重算出のための一般的解法

前章において本研究で提案する変位関数の妥当性は示された。本章では図 9 に示すような不均等曲げせん断力を受ける H 形断面梁ウェブを、四辺固定支持平板と見なし、その座屈荷重を算出する手法について述べる。

変位関数および解法原理については 2 章および 3 章の通りである。したがって、応力状態から行列 $\mathbf{B}'$ が定まれば (33), (40) 式によって座屈係数が算出される。

図 1 および図 9 より x 方向の直応力度すなわち曲げ応力度 σ_x は、

$$\sigma_x = \sigma_{x1} \left(1 - \frac{\beta}{a} x \right) \left(1 - \frac{2}{b} y \right) \quad \dots \dots \dots (61)$$

と表せる。

ここで、 β は曲げ応力の x 軸方向の勾配を表しており、

$$M_1 + M_2 = \beta M_1 \quad \dots \dots \dots (62)$$

$$\therefore M_2 = -(\beta - 1)M_1 \quad \dots \dots \dots (63)$$

である。 $\beta=0$ なら純曲げ、 $\beta=2$ で逆対称曲げとなる。

また、 σ_{x1} は $x=0, y=0$ での曲げ応力度であり、最大曲げ応力度である。したがって、梁左端に作用するモーメント M_1 を用いて

$$\sigma_{x1} = \frac{M_1}{Z} = \frac{2M_1}{bl} \quad \dots \dots \dots (64)$$

と表せる。ここで Z は H 形断面梁の断面係数であり、 I は断面二次モーメントである。なお、本研究においてはこれらの断面定数は、H 形断面梁のウェブおよびフランジを図 9 に示すようにそれぞれ面積の集中した線材と考えて算出するものとする。

つづいて、せん断応力度分布について考える。せん断応力度分布は

図 9 不均等曲げおよびせん断を受ける H 形断面梁

梁断面に作用するせん断力 Q によって次の式のように表せる。

$$\tau_{xy} = \frac{QS}{bI} = \frac{Q}{A_w} \left\{ \frac{I_f}{I} + \frac{I_w}{I} \cdot \frac{6}{b^2} y(b-y) \right\} \quad \dots \dots \dots (65)$$

ここで、 I_f, I_w はそれぞれ梁のフランジおよびウェブによる断面二次モーメントであり、 A_w はウェブの断面積である。ここで Q/A_w は梁に作用する平均せん断応力度であるので $\bar{\tau}$ とおくと、せん断応力度分布は次のように表せる。

$$\tau_{xy} = \bar{\tau} \left\{ \frac{I_f}{I} + \frac{I_w}{I} \cdot \frac{6}{b^2} y(b-y) \right\} \quad \dots \dots \dots (66)$$

$$\text{ただし、} \quad \bar{\tau} = \frac{Q}{A_w} \quad \dots \dots \dots (67)$$

このようにして、(61) 式および (66) 式の形で直応力度分布、せん断応力度分布がそれぞれ表されるがこれらはそれぞれ独立ではない。 σ_{x1} と $\bar{\tau}$ の間には従属関係があるのは明らかである。その関係について考える。H 形断面梁に作用する曲げモーメントとせん断力の関係より、

$$Q = (M_1 + M_2)/a \quad \dots \dots \dots (68)$$

(63) 式より

$$Q = \beta M_1/a \quad \dots \dots \dots (69)$$

さらに (64) 式、(67) 式を代入すると、

$$\bar{\tau} A_w = \frac{\beta}{a} \cdot \frac{2I}{b} \cdot \sigma_{x1} \quad \dots \dots \dots (70)$$

$$\therefore \bar{\tau} = \frac{2I\beta}{abA_w} \cdot \sigma_{x1} = \frac{\beta}{\lambda} \cdot \frac{2I}{b^2 A_w} \cdot \sigma_{x1} \quad \dots \dots \dots (71)$$

ここで λ はウェブの辺長比である。

$$\lambda = a/b \quad \dots \dots \dots (72)$$

(71) 式は曲げ応力勾配を表す β 、辺長比 λ と $2I/b^2 A_w$ によって、平均せん断応力度 $\bar{\tau}$ と最大曲げ応力度 σ_{x1} との関係を表すものである。ここで $2I/b^2 A_w$ は断面によって定まる値であり、取り扱う H 形断面によって変化する。そこでこの値をせん断曲げ比 η とおく⁸⁾。すなわち、

$$\eta = \frac{2I}{b^2 A_w} \quad \dots \dots \dots (73)$$

$$\therefore \bar{\tau} = \frac{\eta\beta}{\lambda} \cdot \sigma_{x1} \quad \dots \dots \dots (74)$$

ここで、 I を A_f, A_w によって表すと

$$I = I_f + I_w = \frac{b^2 A_f}{2} + \frac{b^2 A_w}{12} \quad \dots \dots \dots (75)$$

よって、(73) 式より

$$\therefore \eta = \frac{A_f}{A_w} + \frac{1}{6} \quad \dots \dots \dots (76)$$

となりせん断曲げ比 η はフランジとウェブの断面積比によって表せることが分かる。また、(73) 式中の A_w を I_w で表すと

$$\eta = \frac{2I}{b^2 A_w} = \frac{1}{6} \cdot \frac{I}{I_w} \quad \dots \dots \dots (77)$$

であるので、(66) 式中の $I_w/I, I_f/I$ は以下のように表すことができる。

$$\frac{I_w}{I} = \frac{1}{6\eta} \quad \frac{I_f}{I} = 1 - \frac{I_w}{I} = 1 - \frac{1}{6\eta} \quad \dots \dots \dots (78)$$

したがって (61), (66), (74), (78) 式より、直応力度分布とせん断応力度分布は梁せい b 、せん断曲げ比 η 、辺長比 λ 、曲げ勾配定数 β 、最大曲げ応力度 σ_{x1} により以下のように表せる。

$$\sigma_x = \sigma_{x1} \left(1 - \frac{\beta}{b\lambda} x \right) \left(1 - \frac{2}{b} y \right) \quad \dots \dots \dots (79)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{x1} \frac{\eta\beta}{\lambda} \left\{ \left(1 - \frac{1}{6\eta}\right) + \frac{1}{6\eta} \cdot \frac{6}{b^2} y(b-y) \right\} \quad \dots \quad (80)$$

(79), (80)式によって応力分布が定められたので, つづいて行列 $\mathbf{B}'$ の各成分 B'_{ijmn} について考える。(16)式および(79), (80)式より

$$f(x, y) = \left(1 - \frac{\beta}{b\lambda} x\right) \left(1 - \frac{2}{b} y\right) \quad \dots \quad (81)$$

$$\alpha g(x, y) = \frac{\beta}{\lambda} \left\{ \left(\eta - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6\eta} y(b-y) \right\} \quad \dots \quad (82)$$

となる。したがって B'_{ijmn} は次のように表せる。

$$B'_{ijmn} = \int_0^b \int_0^b \left\{ \left(1 - \frac{\beta}{b\lambda} x\right) \left(1 - \frac{2}{b} y\right) (\dot{u}_i v_j \dot{u}_m v_n) + \frac{\beta}{\lambda} \left\{ \left(\eta - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6\eta} y(b-y) \right\} (\dot{u}_m v_n \dot{u}_i v_j + \dot{u}_i v_j \dot{u}_m v_n) \right\} dx dy \quad \dots \quad (83)$$

ここで, (83)式の直応力度による項を S_1 , せん断応力度による項を S_2 とおき, さらに,

$$\begin{aligned} U_7(i, m) &= \int_0^b x \cdot \dot{u}_i \cdot \dot{u}_m dx & V_7(j, n) &= \int_0^b y \cdot \dot{v}_j \cdot \dot{v}_n dy \\ U_8(i, m) &= \int_0^b x \cdot \dot{u}_i \cdot u_m dx & V_8(j, n) &= \int_0^b y \cdot \dot{v}_j \cdot v_n dy \\ U_9(i, m) &= \int_0^b x^2 \cdot \dot{u}_i \cdot u_m dx & V_9(j, n) &= \int_0^b y^2 \cdot \dot{v}_j \cdot v_n dy \end{aligned} \quad \dots \quad (84)$$

とおくと, S_1, S_2 はそれぞれ以下のように書き換えられる。

$$S_1 = \left\{ U_2(i, m) - \frac{\beta}{b\lambda} U_7(i, m) \right\} \left\{ V_1(j, n) - \frac{2}{b} V_6(j, n) \right\} \quad \dots \quad (85)$$

$$S_2 = \frac{\beta}{\lambda} \left[U_5(m, i) \left\{ \left(\eta - \frac{1}{6}\right) V_5(j, n) + \frac{1}{b} V_8(j, n) - \frac{1}{b^2} V_9(j, n) \right\} + U_5(i, m) \left\{ \left(\eta - \frac{1}{6}\right) V_5(n, j) + \frac{1}{b} V_8(n, j) - \frac{1}{b^2} V_9(n, j) \right\} \right] \quad \dots \quad (86)$$

また, (53)式より S_2 は更に次のように書き換えられる。

$$S_2 = \frac{\beta}{\lambda} \cdot U_5(m, i) \left[2\left(\eta - \frac{1}{6}\right) V_5(j, n) + \frac{1}{b} \{V_8(j, n) - V_8(n, j)\} - \frac{1}{b^2} \{V_9(j, n) - V_9(n, j)\} \right] \quad \dots \quad (87)$$

したがって, (85), (87)式を用い, appendix を参照することによって行列 $\mathbf{B}'$ が定められる。この行列と(40)式によって定められる行列 $\mathbf{A}'$ を(33)式の固有値問題に代入し, 固有値を求めることで, 不均等曲げせん断力を受ける四辺固定支持平板の座屈係数が求められ, その時の固有ベクトルから座屈波形が求められる。

また, appendix に示した関数 Φ を用いると(85), (87)式から A'_{ijmn} , B'_{ijmn} はそれぞれ次のようになる。

$$A'_{ijmn} = \frac{1}{\lambda^2 \pi^2} \{ \Phi_3(i, m) \cdot \Phi_1(j, n) + \Phi_1(i, m) \cdot \Phi_3(j, n) + 2\Phi_2(i, m) \cdot \Phi_2(n, j) \} \quad \dots \quad (88)$$

$$B'_{ijmn} = \frac{1}{\lambda} \{ \Phi_2(i, m) - \beta \Phi_3(i, m) \} \{ \Phi_1(j, n) - 2\Phi_6(j, n) \} + \frac{\beta}{\lambda} \cdot \Phi_3(m, i) \left[2\left(\eta - \frac{1}{6}\right) \Phi_3(j, n) + \{ \Phi_8(j, n) - \Phi_8(n, j) \} - \{ \Phi_9(j, n) - \Phi_9(n, j) \} \right] \quad (89)$$

各 $\Phi(p, q)$ は p と q のみの関数であることから, 行列 $\mathbf{A}'$, および $\mathbf{B}'$ は板の辺長比 λ , せん断曲げ比 η , 曲げ勾配定数 β からなる行列となる。したがって, (33)式によって求める座屈係数 k の値はこれら λ , η , β によってのみ決定されることが分かる。

一例として, 図10に本解析手法で求めた板のせん断座屈係数曲線を $\beta=2.0$, $\beta=1.0$ のそれぞれについて示す。せん断座屈係数は平均せん断応力度に対する座屈係数である。せん断曲げ比 η は1.0および2.0としている。この値は現実のH形断面部材におけるせん断曲げ比の範囲0.5~2.5⁸⁾に収まるように選んだ。なお, 文献8)において求められた, 四辺単純支持の場合のせん断座屈係数についても併せて示す。

純せん断応力を受ける場合に比べて曲げ応力度やせん断応力度分布

図10 不均等曲げせん断力を受ける四辺固定支持平板の座屈曲線

が変化することにより座屈曲線にかなりの違いが現れることが分かる。その傾向を見ると, λ が小さくせん断力の影響の大きな領域においては純せん断の座屈曲線に沿い, λ が大きく曲げの影響が強くなる領域においては純せん断の座屈曲線を大きく下回ることが分かる。これは, 文献8)における不均等曲げせん断力を受ける四辺単純支持平板の座屈曲線と同じような傾向である。不均等曲げせん断力を受ける四辺固定支持平板の弾性座屈性状に関する詳細な考察は別報にて報告予定である。

§ 6. 結

本研究はこれまで十分な研究がなされてきていない不均等曲げせん断力を受ける四辺固定支持平板の弾性座屈応力およびその座屈波形を算出する一般的手法を示した。

本研究では四辺固定支持平板の変位関数を無限級数の形で提案し, それをエネルギー法に適用することによって複合応力を受ける四辺固定支持平板の座屈応力を求める手法の導出を行った。また, 既往の研究結果が存在する比較的単純な外力条件による手法についても同様に述べ, その解析結果を既往の研究成果と比較することによって本研究で提案する変位関数の収束性, 妥当性を示した。

本研究の手法を用いることによって, 不均等曲げせん断力を受ける四辺固定支持平板の座屈応力度は, 板のアスペクト比, 曲げ応力勾配, せん断曲げ比を定めることによって, 多くの級数項をとらず比較的容易に求めることができる。また, 本研究で提案した変位関数は四

辺固定支持平板の一般的な変位関数であり様々な波形に対応できる。このため、この変位関数をエネルギー法に適用することによって、これまでなされてこなかった様々な複合応力を受ける四辺固定支持平板の座屈応力を求めることも可能になると考えられる。

参考文献

- 1) 鈴木敏郎, 小野徹郎: 塑性設計梁に関する実験的研究(1~3), 日本建築学会論文報告集, 第168号, pp.77~84, 1970.2, 第171号, pp.31~36, 1970.5, 第175号, pp.69~74, 1970.9
- 2) 加藤 勉, 秋山 宏, 帯 洋一: 局部座屈を伴うH形梁部材の変形, 日本建築学会論文報告集, 第257号, pp.49~58, 1977.7
- 3) 加藤 勉, 中尾雅躬: 局部座屈に支配されるH形断面部材の耐力と変形能力, 日本建築学会構造系論文集, 第458号, pp.127~136, 1994.4
- 4) 奥田香二, 今井克彦, 黒羽啓明, 小川厚治: 幅厚比の大きいH形断面曲げ材の変形挙動予測に関する研究, 日本建築学会構造系論文報告集, 第411号, pp.83~96, 1990.5
- 5) 鈴木敏郎, 小野徹郎, 金箱温春: せん断曲げを受ける鉄骨H形断面梁の局部座屈挙動と塑性変形能力, 日本建築学会論文報告集, 第260号, pp.91~98, 1977.10
- 6) 鈴木敏郎, 五十嵐規矩夫, 常木康弘: せん断曲げを受けるH形鋼梁の崩壊形式と塑性変形能力に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第547号, pp.185~191, 2001.9
- 7) 鈴木敏郎, 五十嵐規矩夫, 常木康弘: H形鋼梁ウェブ要素の弾塑性せん断座屈挙動に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第556号, pp.151~158, 2002.6
- 8) 五十嵐規矩夫: 不均等曲げせん断力を受けるH形鋼梁ウェブの座屈耐力評価-周辺単純支持平板としての弾性座屈耐力評価-, 日本建築学会構造系論文集, 第565号, pp.135~141, 2003.3
- 9) Timoshenko & Gere: Theory of Elastic Stability, 1963
- 10) 長柱研究委員会: 弾性安定要覧, 1969
- 11) 日本建築学会: 鋼構造座屈設計指針, 1996

-appendix-

変位関数 u_i および v_j を以下のおくとき,

$$u_i = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} \quad v_j = \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b}$$

各積分関数を以下に示す。

$$U_1(i, m) = a \Phi_1(i, m) \quad V_1(j, n) = b \Phi_1(j, n)$$

$$U_2(i, m) = \frac{1}{a} \Phi_2(i, m) \quad V_2(j, n) = \frac{1}{b} \Phi_2(j, n)$$

$$U_3(i, m) = \frac{1}{a^3} \Phi_3(i, m) \quad V_3(j, n) = \frac{1}{b^3} \Phi_3(j, n)$$

$$U_4(i, m) = \frac{1}{a} \Phi_4(i, m) \quad V_4(j, n) = \frac{1}{b} \Phi_4(j, n)$$

$$U_5(i, m) = \Phi_5(i, m) \quad V_5(j, n) = \Phi_5(j, n)$$

$$U_6(i, m) = a^2 \Phi_6(i, m) \quad V_6(j, n) = b^2 \Phi_6(j, n)$$

$$U_7(i, m) = \Phi_7(i, m) \quad V_7(j, n) = \Phi_7(j, n)$$

$$U_8(i, m) = a \Phi_8(i, m) \quad V_8(j, n) = b \Phi_8(j, n)$$

$$U_9(i, m) = a^2 \Phi_9(i, m) \quad V_9(j, n) = b^2 \Phi_9(j, n)$$

$$\Phi_1(p, q) = \begin{cases} \frac{3}{8} & (p = q = 1) \\ \frac{1}{4} & (p = q \neq 1) \\ -\frac{1}{8} & (p - q = \pm 2) \\ 0 & (else) \end{cases}$$

$$\Phi_2(p, q) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{4}(p^2+1) & (p = q) \\ \frac{\pi^2}{32}(p+q)^2 & (p-q=\pm 2) \\ 0 & (else) \end{cases}$$

$$\Phi_3(p, q) = \begin{cases} \frac{\pi^4}{4}(p^4+6p^2+1) & (p = q) \\ -\frac{\pi^4}{32}(p+q)^4 & (p-q=\pm 2) \\ 0 & (else) \end{cases}$$

$$\Phi_4(p, q) = -\Phi_2(p, q)$$

$$\Phi_5(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left\{ \frac{2p}{p+q} - \frac{p+1}{p+q+2} - \frac{p-1}{p+q-2} - \frac{2p}{p-q} + \frac{p+1}{p-q+2} + \frac{p-1}{p-q-2} \right\} & (p+q : odd) \\ 0 & (p+q : even) \end{cases}$$

$$\Phi_6(p, q) = \begin{cases} \frac{3}{16} & (p = q = 1) \\ \frac{1}{8} & (p = q \neq 1) \\ -\frac{1}{16} & (p - q = \pm 2) \\ 0 & (p \neq q, p - q \neq \pm 2, p + q : even) \\ \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{2}{(p+q)^2} - \frac{1}{(p+q+2)^2} - \frac{1}{(p+q-2)^2} - \frac{2}{(p-q)^2} + \frac{1}{(p-q+2)^2} + \frac{1}{(p-q-2)^2} \right\} & (else) \end{cases}$$

$$\Phi_7(p, q) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8}(p^2+1) & (p = q) \\ -\frac{\pi^2}{64}(p+q)^2 & (p - q = \pm 2) \\ 0 & (p \neq q, p - q \neq \pm 2, p + q : even) \\ \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{2(pq-1)}{(p+q)^2} - \frac{(p+1)(q+1)}{(p+q+2)^2} - \frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-2)^2} - \frac{2(pq+1)}{(p-q)^2} + \frac{(p+1)(q-1)}{(p-q+2)^2} + \frac{(p-1)(q+1)}{(p-q-2)^2} \right\} & (else) \end{cases}$$

$$\Phi_8(p, q) = \begin{cases} \frac{3}{16} & (p = q = 1) \\ \frac{1}{8} & (p = q \neq 1) \\ -\frac{1}{64} \left\{ \frac{16}{p+q} - \frac{4(p+q)}{pq} - 3(p+q) - 4 \right\} & (p - q = \pm 2) \\ \frac{1}{8} \left\{ \frac{2p}{p+q} - \frac{p+1}{p+q+2} - \frac{p-1}{p+q-2} - \frac{2p}{p-q} + \frac{p+1}{p-q+2} + \frac{p-1}{p-q-2} \right\} & (p \neq q, p - q \neq \pm 2, p + q : odd) \\ \frac{1}{8} \left\{ \frac{2p}{p+q} - \frac{p+1}{p+q+2} - \frac{p-1}{p+q-2} - \frac{2p}{p-q} + \frac{p+1}{p-q+2} + \frac{p-1}{p-q-2} \right\} & (else) \end{cases}$$

$$\Phi_9(p, q) = \begin{cases} \frac{3}{16} & (p = q = 1) \\ \frac{1}{8} & (p = q \neq 1) \\ -\frac{1}{64} \left\{ \frac{16}{p+q} - \frac{4(p+q)}{pq} - 3(p+q) - 4 \right\} & (p - q = \pm 2) \\ \frac{1}{8} \left\{ \frac{2p}{p+q} - \frac{p+1}{p+q+2} - \frac{p-1}{p+q-2} - \frac{2p}{p-q} + \frac{p+1}{p-q+2} + \frac{p-1}{p-q-2} \right\} & (p \neq q, p - q \neq \pm 2, p + q : even) \\ \frac{1}{8} \left\{ \frac{2p}{p+q} - \frac{p+1}{p+q+2} - \frac{p-1}{p+q-2} - \frac{2p}{p-q} + \frac{p+1}{p-q+2} + \frac{p-1}{p-q-2} \right\} & (else) \end{cases}$$

(2003年1月10日原稿受理, 2003年6月9日採用決定)