格子状リブを有する CFRP サンドイッチ版の局部座屈に関する研究

LOCAL BUCKLING OF CFRP SANDWICH PANELS WITH LATTICED RIBS

立石 寧俊*, 山田 聖志**
Yasutoshi TATEISHI and Seishi YAMADA

Flat rectangular sandwich-type panels were tested in edgewise compression and under four points bending. The sandwich consisted of CFRP faces with latticed GFRP ribs and a phenol or an urethane foam core. First, local buckling (wrinkling) of the faces occurred in the experiments. The results of the experiments were summarized for buckling stress and buckling wavelength. Second, the local buckling stress for the sandwich panels with latticed ribs were obtained from the general theory of the stationary for the total potential energy. The obtained formulae show that the ribs and the core remarkably resist the local buckling of the face. Consequently the agreements between the theories and the experiments for buckling stress and buckling wavelength are discussed.

Keywords: CFRP Sandwich Panel, Local Buckling, Wrinkling, Latticed Ribs, Core

CFRP サンドイッチ版、局部座屈、リンクリング、格子状リブ、コア

1. 序論

CFRP (炭素繊維強化プラスチック) 材料は、比強度、比剛性に優れ、耐食性にも優れることから、航空機、船舶、自動車などの輸送機器の構造部材やスポーツ用品分野などで普及して来ている¹⁾。海外の土木分野では、軽量化や塩害対策、非磁性化の求められる道路橋の床版等へ FRP デッキを使用した例が見られる²⁾。一方、国内の建築分野では、耐食性に優れた CFRP 製立体トラスを屋内温水プールの屋根架構に使用した例³⁾や体育館屋根など既存の PCa 版を軽量化な一体成形の CFRP サンドイッチ屋根版に置き換えることで耐震性を向上させた例⁴⁾ などが、今後とも建築部材の軽量化やメンテナンスフリーの要求とともに増加していくものと考えられる。

FRP デッキの製造には、引抜成形による形材を接着して床版を構成する方法の他、減圧吸引成形法により大面積のサンドイッチ版を一体成形する方法⁵⁾ がある。本研究では後者の方法で製造されたサンドイッチ版を取り扱う。

サンドイッチ版が圧縮荷重を受ける場合、版全体が単一波形でたわむオイラー座屈や、コア材の剛性が表面材と比較して極端に小さい場合には表面材が座屈する局部座屈 (リンクリング) などの現象を生じることが知られている。また、曲げ荷重を受ける場合には、表面材とコア材の滑りや剥離、或いは圧縮側表面材の局部座屈など

の現象が生じる場合がある。表面材の局部座屈は表面材とコア材の剥離など重大な破壊様式の原因となる場合もあり、局部座屈荷重を推定しておくことは設計上重要と言える^{4), 6), 7)}。

サンドイッチ版の局部座屈をモデル化する場合、表面材とコア材の関係を弾性床上の梁としてとらえ、二次元的に取り扱う方法がある。Hoff⁸⁾らは、プラスチック積層紙の表面板とセルラーセルロースコア材の接着接合によるサンドイッチ版について、圧縮試験を行い、座屈モードに、サンドイッチ版の中立軸に対して、Symmetric と Skew の 2 つのタイプがあることを観察した。それぞれの座屈モードに対し、表面材及びコア材のひずみエネルギーと仕事の関係から座屈応力式を導き出した。彼らは、表面材の座屈変形がコア材の厚さ方向に影響する範囲、及び、座屈荷重と座屈波長の関係を明らかにした。Yusuff⁹⁾は、コア材を横方向等価ばねで表わし、コア材が薄く対称な座屈モードを示す場合と、コア材が厚い場合に分け、弾性床上の梁の基礎方程式から、それぞれの場合についての座屈応力式を導き出した。これらの論文では 2 次元的な取り扱いをしているため、表面材にリブなど縦補強材が存在する場合の座屈補剛効果については考慮していない。一方、三次元的な取り扱い方として、原口¹⁰⁾は弾性床下の矩形平板の変位問題を Levy 法で解き、座屈問題への応用を述べているが、矩形平板の座屈変形が、弾性床の深さ方

* 清水建設技術研究所 研究員・工修

** 豊橋技術科学大学建設工学系 助教授・工博

Research Engineer, Institute of Technology, Shimizu Corporation, M. Eng.
Assoc. Prof., Dept. of Architecture and Civil Engineering, Toyohashi University of Technology, Dr. Eng.

向に影響する範囲や、座屈荷重に与える影響については考察していない。

著者らは、減圧吸引成形法で製造された格子状リブを有するCFRP表面材とフェノール発泡体コア材からなるサンドイッチ版について、構造実験を基に、耐震改修用屋根版を開発・実用化してきたが^{4),11)}、本研究では、フェノール発泡体コア材よりも、更に弾性係数が低いウレタン発泡体コア材を使用した場合について、圧縮及び曲げ実験による表面材の局部座屈についての実験結果を報告する。過去に実施したフェノール発泡体コア材を使用した場合の実験結果と併せ、座屈応力及び座屈半波長についてまとめる。また、格子状リブを有するサンドイッチ版の局部座屈応力を、Hoff, Yussuffらの方法を3次元に拡張し、Total Potential Energyの停留原理を用いて、陽な形の式として求める。得られた局部座屈応力式を用いて、座屈半波長、コア材の厚さと弾性係数、縦リブの間隔が局部座屈応力に与える影響を考察する。さらに、実験結果と比較することで、本式の有用性を明らかにする。

2. CFRP サンドイッチ版の基本構成と材料定数

CFRPサンドイッチ版は、図1に示す様に表面材、コア、リブで構成される。表面材の材料は、カーボン繊維とガラス繊維で強化したプラスチック（以下、表面材1）、又は、ガラス繊維のみの強化プラスチック（以下、表面材2）、リブの材料は、ガラス繊維強化プラスチック、コアの材料は、ウレタン樹脂発泡体、又は、フェノール樹脂発泡体である。表面材、コア、リブは、減圧吸引成形法によって、フェノール樹脂含浸後、オートクレーブによる加熱処理で一体化される。表1に、本研究で使用したサンドイッチ版構成部材の材料定数を示す。

図1 CFRP サンドイッチ版の構成

表1 材料定数 (Lは荷重方向、Tは荷重直交方向を表す)

	ヤング係数 N/mm ²		せん断弾性 係数 N/mm ²	ポアソン比	比重
	E _L	E _T	G _{LT}	ν	ρ
表面材1	30300	30300	5390	0.13	1.85
表面材2	24600	24600	5490	0.10	2.20
リブ	19600	12700	8160	0.42	1.92
ウレタン発泡体コア	2.8		1.4	0.01	0.027
フェノール発泡体コア	6.6		3.3	0.01	0.064

3. 圧縮実験

コアの材料にウレタン発泡体を使用し、表面材の材料に表面材1を使用したサンドイッチ版の圧縮実験について報告する。コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合については、文献11)に示し

ているが、本研究では比較のため、それら全結果をまとめ、表2(a)及び表2(b)に示すこととした。

3.1 試験体の形状と名称

図2に、試験体の寸法形状を示す。表面材の板厚は4mm、リブの板厚は2.2mmである。試験体中央部のリブの間隔は、横リブ間隔 $a_0=450\text{mm}$ 、縦リブ間隔 $b_0=400\text{mm}$ である。コア厚75mmとしたものをEC-U75シリーズ、コア厚100mmとしたものをEC-U100シリーズと呼ぶことにする。また、コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合については、リブの板厚2.2mm、コア厚100mmとして、試験体中央部のリブの間隔を、横リブ間隔 $a_0=350\text{mm}$ 、縦リブ間隔 $b_0=450\text{mm}$ としたものをEC-P100シリーズ、 $a_0=350\text{mm}$ 、 $b_0=225\text{mm}$ としたものをEC-P100Rシリーズと呼ぶことにする。なお、横リブ間隔 a_0 が、コア材の種類によって、450mmと350mmの2種類あるのは、第5章の表4(a)に示した理論座屈半波長 a と a_0 の比をほぼ一定にして、荷重直交方向の拘束の影響を同様にするためである。表2(a)に示すようにEC-U100シリーズは2体、EC-U75シリーズは7体、EC-P100シリーズは3体、EC-P100Rシリーズは3体の、合計15体を実験した。試験体数の多いシリーズは、実験当時、実用性が高いと判断されたもので、耐力のばらつき等のデータをできる限り豊富に取ることを目的としたものである。

3.2 実験方法

写真1に示す様に6MNアムスラー型試験機で試験体に圧縮荷重をかけた。サンドイッチ版の圧縮実験では、初期不整合等があると表裏2つの表面材のどちらかが先に座屈変形することが考えられるので、図2に示す様に、両表面材にひずみゲージを貼り付けた。

図2 圧縮実験の試験体の形状とひずみゲージの番号

3.3 実験結果

3.3.1 荷重-ひずみ曲線

本研究では載荷中のひずみの計測を詳細に行うことで、荷重-ひずみ曲線において非線形性が顕著に表われた時点を特定し、その時点

を局部座屈の発生とみなす文献12)の方法を採用する。

図3に荷重-ひずみ曲線の例を示す。コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合には(図3(b))、局部座屈荷重が生ずるとほぼ等しい荷重で最大耐力に至ったのに対し、ウレタン発泡体を使用した場合(図3(a))では、局部座屈の発生以降も耐力の上昇が見られた。

3.3.2 座屈半波長

写真1に、コアの材料にウレタン発泡体を使用した試験体の表面材の座屈変形の一例を示す。全試験体で、表面材の局部座屈が観察された。座屈変形の観察は、コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合よりも、ウレタン発泡体を使用した場合の方が比較的容易であった。実験で採用した座屈半波長は、座屈変形を視覚的にとらえることができた状態での写真撮影から、原則として、座屈波形の山から山の1波長を測り、その半分を座屈半波長 a として採用した。

表2(a)に、各試験体の座屈半波長を示す。表2(b)に、各シリーズの座屈半波長の平均値と標準偏差を示す。いずれも、平均値に対する標準偏差の割合は6~22%であり、写真撮影を通して得られたものとしては、ばらつきはそれ程大きくないと言える。

(a) ウレタン発泡体コアの場合 (EC-U75-4)

(b) フェノール発泡体コアの場合 (EC-P100-1)

図3 圧縮実験の荷重-ひずみ曲線の例

3.3.3 局部座屈応力

表2(a)に、各試験体の局部座屈の発生荷重 P_c と、局部座屈応力 σ_c を示す。局部座屈応力 σ_c は、 P_c を試験体の表面材の全断面で除した値とした。表2(b)に、各シリーズの局部座屈応力の平均値と標準偏差を示す。各シリーズの平均値に対する標準偏差の割合は、各シリーズで高々12%程度であり、座屈応力についても、ばらつきは小さいと言える。

4. 曲げ実験

コアの材料にウレタン発泡体を使用し、表面材の材料に表面材1又は表面材2を使用したサンドイッチ版の曲げ実験について報告する。コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合については、文

写真1 圧縮実験の様子と表面材の局部座屈変形 (EC-U75-4)

表2(a) 圧縮実験の結果

h_c : コア厚, a_0 : 横リブ間隔, b_0 : 縦リブ間隔, A : 表面材の全断面積, P_c : 局部座屈荷重, σ_c : 局部座屈応力, a : 座屈半波長

ID	h_c mm	a_0 mm	b_0 mm	A mm ²	P_c kN	σ_c N/mm ²	a mm
EC-U100-1	100	450	400	7160	417.5	58.3	140
EC-U100-2	100	450	400	7160	443.0	61.9	120
EC-U75-1	75	450	400	6960	422.5	60.7	200
EC-U75-2	75	450	400	6976	340.5	48.8	200
EC-U75-3	75	450	400	6972	323.5	46.4	160
EC-U75-4	75	450	400	6972	349.8	50.2	130
EC-U75-5	75	450	400	6960	316.1	45.4	140
EC-U75-6	75	450	400	6972	382.0	54.8	120
EC-U75-7	75	450	400	6976	344.5	49.4	140
EC-P100-1	100	350	450	3644	308.0	84.5	140
EC-P100-2	100	350	450	4452	281.5	63.2	120
EC-P100-3	100	350	450	4456	353.0	79.2	130
EC-P100R-1	100	350	225	4564	532.2	116.1	125
EC-P100R-2	100	350	225	4564	509.1	111.5	90
EC-P100R-3	100	350	225	4556	647.3	142.1	80

表2(b) 圧縮実験の結果の平均値と標準偏差

試験体 シリーズ	局部座屈応力		座屈半波長	
	平均値 N/mm ²	標準偏差 N/mm ²	平均値 mm	標準偏差 mm
EC-U100	60.1	—	130	—
EC-U75	50.8	4.9(10)	156	30(19)
EC-P100	75.6	9.1(12)	130	8(6)
EC-P100R	123.4	13.4(11)	93	21(22)

注: () は、標準偏差/平均値×100 (%) を表わす。

献 4) に示しているが、本研究では比較のため、それら全結果をまとめ、表 3(a)及び表 3(b)に示すこととした。

4.1 試験体の形状と名称

図 4 に、試験体の寸法形状を示す。4 点曲げ実験のスパン中央付近で、座屈を発生させるため、試験体が油圧ジャッキ先端の鋼材に直接接する位置と試験体を支持する位置の間では、縦リブの数量を増やして補強した。

表面材の材料に表面材 1 を使用し、表面材の板厚を 4mm、リブの板厚を 2.2mm、試験体中央部のリブの間隔を、横リブ間隔 $a_0=450\text{mm}$ 、縦リブ間隔 $b_0=400\text{mm}$ とし、コア厚 75mm としたものを EOB-U75 シリーズと呼ぶことにする。また、表面材の材料に表面材 2 を使用し、表面材の板厚を 8mm、リブの板厚を 2.2mm、試験体中央部のリブの間隔を、横リブ間隔 $a_0=400\text{mm}$ 、縦リブ間隔 $b_0=400\text{mm}$ とし、コア厚 200mm としたものを EOB2-U200 シリーズと呼ぶことにする。一方、コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合には、コア厚 75mm、試験体中央部のリブの間隔を、横リブ間隔 $a_0=450\text{mm}$ 、縦リブ間隔 $b_0=400\text{mm}$ としたものを EOB-P75 シリーズ、 $a_0=450\text{mm}$ 、 $b_0=200\text{mm}$ としたものを EOB-P75R シリーズと呼ぶことにする。表 3(a)に示すように EOB-U75 シリーズは 3 体、EOB2-U200 シリーズは 2 体、EOB-P75 シリーズは 9 体、EOB-P75R シリーズは 6 体の、合計 20 体を実験した。試験体数の多いシリーズは、現状での実用性が高いと判断されたもので、耐力のばらつき等のデータをできる限り豊富に取ることを目的としたものである。

4.2 実験方法

写真 2 に示す様に、4 点曲げ実験を行った。加力は、鋼製フレームに固定された 2 つの 200kN 油圧ジャッキで行った。荷重値は油圧ジャッキ先端のロードセルから読み取った。図 4 に、ひずみゲージの貼り付け位置とその番号を示す。

4.3 実験結果

4.3.1 荷重-ひずみ曲線

図 5 に荷重-ひずみ曲線の例を示す。曲げ実験では、2 つのジャッキを使用したので、荷重値としては、両者の平均値を採用した。局部座屈の発生点の定義は、圧縮実験の場合と同様とした。圧縮実験の場合と同様、コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合には局部座屈荷重が生ずるとはほぼ等しい荷重で最大耐力に至ったのに対し、ウレタン発泡体を使用した場合(図 5)では局部座屈の発生以降も耐力の上昇が見られた。

4.3.2 座屈半波長

写真 3 に、EOB-U75 シリーズ、EOB2-U200 シリーズの表面材の座屈変形の例を示す。全試験体の圧縮側表面材で、局部座屈が観察された。圧縮実験の場合と同様、座屈変形の観察は、コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合よりも、ウレタン発泡体を使用した場合の方が比較的容易であった。座屈半波長 a の測定法は、圧縮実験の場合と同様とした。

表 3(a)に、各試験体の座屈半波長を示す。コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合には、座屈変形が判明しないまま終局耐力に至る場合もあった。そうした場合には、表 3(a)中の座屈半波長 a の欄に記号-で表わしている。表 3(b)に、各シリーズの座屈半波長の平均値と標準偏差を示す。平均値に対する標準偏差は 6~10%であり、ばらつきが小さいと言える。

4.3.3 局部座屈応力

表 3(a)に、各試験体の局部座屈の発生荷重 P_c と、局部座屈応力 σ_c

図 4 曲げ実験の試験体の形状とひずみゲージの番号

写真 2 曲げ実験 (セットアップ時)

を示す。局部座屈応力 σ_c は、 P_c を用いて次式として評価した。

$$\sigma_c = P_c L \xi / I$$

ここに、 L は支持点から荷重点までの距離、 I はサンドイッチ版全体の断面 2 次モーメント、 ξ はサンドイッチ版断面の図心から最外縁までの距離である。

表 3(b) に、各シリーズの局部座屈応力の平均値と標準偏差を示す。平均値に対する標準偏差の割合は、高々 10% 程度であり、ばらつきは小さいと言える。

5. Total Potential Energy (TPE) の停留原理に基づくサンドイッチ版の理論的局部座屈応力

サンドイッチ版の局部座屈については Hoff⁸⁾, Yusuff⁹⁾らの解が知られており、文献 13 に設計式として紹介されている。しかし、荷重方向と版厚方向の 2 次元でモデル化しているため、本研究のように縦リブで補強されたサンドイッチ版に対しては、その効果を考慮す

ることができない。本研究では、Hoff, Yusuff らの方法を 3 次元に拡張し、縦リブが存在する場合について、Total Potential Energy (以下、TPE) の停留原理から定式化を行う。なお、本実験のケースを有限要素法で座屈解析する場合、パラメータが非常に多いこと、コアのメッシュを板厚方向に何分割するかとか、コアと表面材の接合要素をどうモデル化するかなど難しい問題がある。本研究では、事前に、予備的解析としてのみ扱った。

5.1 局部座屈モード

表面材の板厚を t 、コア材の厚さを h_c 、表面材の座屈に対して、コア材が有効に抵抗する厚さ方向の距離を h とする。コア厚がある程度大きい場合には、コアの内部には図 6 の様に、表面材の座屈変形に無関係な領域が存在することが想定され、その時、両表面材はそれぞれ独立に座屈変形が生ずる。

図 7 の様に x 、 y 、 z 座標をとり、それぞれの方向の座屈 (増分)

図 5 荷重－ひずみ曲線の例 (EOB-U75-1)

表 3(a) 曲げ実験の結果

h_c : コア厚, a_0 : 横リブ間隔, b_0 : 縦リブ間隔,

B : 試験体の幅, H : 試験体の厚さ,

P_c : 局部座屈荷重, σ_c : 局部座屈応力, a : 座屈半波長

ID	h_c mm	a_0 mm	b_0 mm	B mm	H mm	P_c kN	σ_c N/mm ²	a mm
EOB-U75-1	75	450	400	832	84	17.52	62.1	125
EOB-U75-2	75	450	400	829	84	22.09	78.6	110
EOB-U75-3	75	450	400	835	84	19.50	68.9	120
EOB2-U200-1	200	400	400	799	218	94.03	78.3	200
EOB2-U200-2	200	400	400	799	217	93.71	78.4	220
EOB-P75-1	75	450	400	801	80	24.51	95.3	120
EOB-P75-2	75	450	400	795	81	20.02	77.3	150
EOB-P75-3	75	450	400	796	81	19.43	75.0	140
EOB-P75-4	75	450	400	799	83	23.97	89.7	—
EOB-P75-5	75	450	400	797	83	26.89	100.9	—
EOB-P75-6	75	450	400	811	83	22.32	82.3	120
EOB-P75-7	75	450	400	808	83	27.41	101.4	150
EOB-P75-8	75	450	400	807	83	24.77	91.8	—
EOB-P75-9	75	450	400	811	83	25.87	95.4	—
EOB-P75R-1	75	450	200	798	81	25.49	98.1	—
EOB-P75R-2	75	450	200	796	81	26.16	100.9	—
EOB-P75R-3	75	450	200	798	80	23.84	93.0	—
EOB-P75R-4	75	450	200	795	84	31.95	118.6	—
EOB-P75R-5	75	450	200	799	83	26.32	103.5	—
EOB-P75R-6	75	450	200	797	84	29.79	110.3	—

(a) EOB-U75-2 (数値は、写真から測定した座屈波長)

(b) EOB2-U200-1 (数値は、写真から測定した座屈波長)

写真 3 曲げ荷重時の表面材の座屈変形の例 (単位 mm)

表 3(b) 曲げ実験の結果の平均値と標準偏差

試験体 シリーズ	局部座屈応力		座屈半波長	
	平均値 N/mm ²	標準偏差 N/mm ²	平均値 mm	標準偏差 mm
EOB-U75	69.9	6.8(10)	115	7(6)
EOB2-U200	78.4	—	210	—
EOB-P75	89.9	9.2(10)	136	14(10)
EOB-P75R	104.1	8.4(8)	—	—

注 1: () は、標準偏差/平均値×100 (%) を表す。

注 2: EOB-P75 の座屈半波長については、座屈波長が測定できたデータを採用。

変位を (u, v, w) とする。局部座屈が発生する x 方向、 y 方向の座屈半波長を、それぞれ a, b とし、座屈モードを次式で仮定する。なお、 w は表面材の中立軸における z 方向の座屈変形である。この場合、座屈波形の節となる線は、四辺単純支持の境界条件とみなすことができる。

$$\text{表面材部: } u=0, v=0, w=\alpha \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (1)$$

$$\text{コア部: } u_c=0, v_c=0, w_c=\frac{z}{h} \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

ここで、 α は未定係数である。

板座屈の場合、 $u=v=0$ となるので、結果として増分線形面内ひずみエネルギー $U_{2m}=0$ である。

図6 サンドイッチ版表面材の座屈

図7 座屈モードの仮定

5.2 表面材の増分曲げひずみエネルギー: U_{2b}

増分ひずみ $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$ と増分変位 (u, v, w) の関係および応力 (m_x, m_y, m_{xy}) を用いて、表面材の増分曲げひずみエネルギー U_{2b} は、次式として表わせる。

$$U_{2b} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a (m_x \kappa_x + m_y \kappa_y + 2m_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \quad (3)$$

ここに、

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

$$m_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \quad m_y = D(\kappa_y + \nu \kappa_x), \quad m_{xy} = D(1-\nu) \kappa_{xy} \quad (5)$$

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E = \text{表面材のヤング係数}, \quad \nu = \text{表面材のポアソン比}$$

式(4),(5)を式(3)に代入し、式(1)を用いると、

$$\begin{aligned} U_{2b} &= \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a (\kappa_x^2 + 2\nu \kappa_x \kappa_y + \kappa_y^2 + 2(1-\nu) \kappa_{xy}^2) dx dy \\ &= \alpha^2 \cdot \frac{D\pi^4}{8ab} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

5.3 表面材の線形化された増分面内ひずみエネルギー: V_{2m}

表面材の線形化された増分面内ひずみエネルギー V_{2m} は、増分面内ひずみ $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy})$ の非線形項 $(\epsilon_x^{dd}, \epsilon_y^{dd}, \epsilon_{xy}^{dd})$ 及び増

分面内合応力 (n_x, n_y, n_{xy}) の非線形項 $(n_x^{dd}, n_y^{dd}, n_{xy}^{dd})$ と、座屈前平衡状態のひずみ $(\epsilon_x^F, \epsilon_y^F, \epsilon_{xy}^F)$ や応力 (n_x^F, n_y^F, n_{xy}^F) を用いて次式として書ける¹⁴⁾。

$$\begin{aligned} V_{2m} &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a (n_x^F \epsilon_x^{dd} + n_y^F \epsilon_y^{dd} + 2n_{xy}^F \epsilon_{xy}^{dd} \\ &\quad + n_x^{dd} \epsilon_x^F + n_y^{dd} \epsilon_y^F + 2n_{xy}^{dd} \epsilon_{xy}^F) dx dy \\ &= \int_0^b \int_0^a (n_x^F \epsilon_x^{dd} + n_y^F \epsilon_y^{dd} + 2n_{xy}^F \epsilon_{xy}^{dd}) dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

本問題では、座屈前の平衡状態は次式としておける。

$$n_x^F = -\sigma t, \quad n_y^F = 0, \quad n_{xy}^F = 0 \quad (8)$$

よって、

$$V_{2m} = \int_0^b \int_0^a (-\sigma t) \epsilon_x^{dd} dx dy \quad (9)$$

$$\epsilon_x^{dd} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \text{ を用いると、式(1)より } V_{2m} \text{ は次式で表わされる。}$$

$$V_{2m} = -\alpha^2 \frac{bt\pi^2}{8a} \cdot \sigma \quad (10)$$

ここで、コアが無い場合 ($h=0$) には、TPE は $\Pi \equiv U_{2b} + V_{2m}$ であるので、その停留条件より、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \alpha \cdot \frac{b\pi^2}{4a} \cdot \left[\frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 - \sigma t \right] = 0$$

上式が未定係数 α のいかにかわらず成立するときの荷重 $\sigma = \sigma_0$ が座屈応力であるので、コアが無い場合、即ち、四辺単純支持の矩形板の座屈応力 σ_0 は、次式で表わされる。

$$\sigma_0 = \frac{D\pi^2}{t b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 \quad (11)$$

5.4 コア材についての等価ばねの導入

コア材について、コア厚方向の単位面積当りのばね定数 c を考え、そうしたばねで、表面材が、厚さ方向に支持されている状態を考える。このとき、表面材の座屈変位によって、コア材に蓄積する増分ひずみエネルギーは、次式として表わされる。

$$U_{2c} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a c w^2 dx dy \quad (12)$$

式(1)より、

$$U_{2c} = \alpha^2 \cdot \frac{ab}{8} \cdot c \quad (13)$$

よって、コアを有する場合の TPE は $\Pi \equiv U_{2b} + V_{2m} + U_{2c}$ であり、その停留条件より

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \frac{ab\alpha}{4} \cdot \left[\frac{\pi^2}{a^2} \left\{ \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 - \sigma t \right\} + c \right] = 0$$

上式が未定係数 α のいかにかわらず成立する条件より、コア材が存在するときの表面材の局部座屈応力は、式(11)を用いて、次式のように表わせる。

$$\sigma_c = \sigma_0 + \frac{a^2}{t \pi^2} \cdot c \quad (14)$$

U_{2c} は、コアの z 方向の垂直ひずみエネルギー成分 U_{2a} とコアのせん断ひずみエネルギー成分 U_{2s} の和で表現できるので、

$$U_{2c} \equiv U_{2a} + U_{2s} \quad (15)$$

U_{2a} について、

$$U_{2a} = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^b \int_0^a \sigma_z^c \varepsilon_z^c dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^b \int_0^a E_c (\varepsilon_z^c)^2 dx dy dz$$

ここに、 E_c = コアのヤング係数、 $\varepsilon_z^c = \frac{\partial w_c}{\partial z}$

式(2)を用いて、 U_{2a} は、次式で表わされる。

$$U_{2a} = \alpha^2 \cdot \frac{ab}{8} \cdot \frac{E_c}{h} \quad (16)$$

U_{2s} について、

$$\begin{aligned} U_{2s} &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^b \int_0^a (2\tau_{xz}^c \varepsilon_{xz}^c + 2\tau_{yz}^c \varepsilon_{yz}^c) dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^b \int_0^a 4G_c \left((\varepsilon_{xz}^c)^2 + (\varepsilon_{yz}^c)^2 \right) dx dy dz \end{aligned}$$

ここに、 $G_c = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)}$ は、コアのせん断弾性係数である。

一方、式(2)を用いて、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz}^c &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_c}{\partial x} + \frac{\partial u_c}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_c}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{z}{h} \alpha \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \varepsilon_{yz}^c &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_c}{\partial y} + \frac{\partial u_c}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_c}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{z}{h} \alpha \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{aligned}$$

であるから、 U_{2s} は、次式で表わされる。

$$U_{2s} = \alpha^2 \frac{G_c h \pi^2}{24} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad (17)$$

式(13),(16),(17)を式(15)へ代入し、 c について整理すれば、等価ばね定数 c は、次式で表わされる

$$c = \frac{E_c}{h} + \frac{G_c h \pi^2}{3ab} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad (18)$$

ところで、式(14)から分かるように、 σ_c は c に関して増加関数であるので、 c が最小値をとるときが、求めるべき座屈応力である。

$\frac{dc}{dh} = 0$ なる最小条件をとれば、

$$\frac{dc}{dh} = -\frac{E_c}{h^2} + \frac{\pi^2 G_c}{3ab} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 0$$

上式を h について解くと、 h は、次式で表わされる。

$$h = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3E_c}{G_c}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (19)$$

式(19)を式(18)へ代入して整理すれば、

$$c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \sqrt{E_c G_c} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \quad (20)$$

式(20),(11)を式(14)へ代入すれば、

$$\sigma_c = \frac{D\pi^2}{t b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{E_c G_c}}{t} \cdot \frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (21)$$

式(21)が、サンドイッチ版における一般的な場合の局部座屈応力の解である。第1項は、座屈半波長 a, b によって四辺が単純支持されたコア無し矩形板の座屈応力であり、第2項が、座屈半波長 a, b で表わされた格子状リブ及びコア材の座屈補剛によって付加された座屈応力分である。

なお、式(19)で得られた h の値が h_c より大きい場合には、 U_{2a} と U_{2s} の z についての積分区間を $0 \sim h_c$ とすればよい。従って、このときの等価ばね c は、式(18)の h を h_c として次式で与えられる。

$$c = \frac{E_c}{h_c} + \frac{G_c h_c}{3} \cdot \frac{\pi^2}{ab} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad (22)$$

式(22)を式(14)へ代入すれば、

$$\sigma_c = \frac{D\pi^2}{t b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \left\{ \frac{E_c}{h_c} \frac{a^2}{\pi^2} + \frac{G_c h_c}{3t} \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right\} \quad (23)$$

5.5 最小座屈応力と座屈半波長

実験で用いたリブ間隔を参照し、座屈半波長 a, b の範囲を $0 < a \leq 450$ 、 $0 < b \leq 450$ とする。予備解析から、この範囲の a, b では、局部座屈応力 σ_c を表わす式(21)及び式(23)は、 b に関して単調減少関数となる。従って、局部座屈応力 σ_c の最小値を求めるには、 b に最大値 b_0 (縦リブ間隔)を採用すればよい。停留条件 $d\sigma_c/da=0$ から a を求め、その a を用いて各式の最小値が得られる。式(23)については、停留条件を満たす a は解析的に求まり、次式で与えられる。

$$a = \sqrt[4]{\frac{D\pi^2}{b^4 + \frac{E_c}{h_c \pi^2} + \frac{G_c h_c}{3b^2}}} \quad (24)$$

一方、式(21)の停留条件を満たす a を解析的に求めることは難しく、数値解析的に解くことになる。結局、 $b=b_0$ としたとき式(21)の停留条件は、 a の10次方程式となる。本研究では、これをNewton-Raphson法により解いた。なお、 a の初期値には、式(24)で得られる値を用いた。局部座屈応力の最小値(停留値)を、圧縮及び曲げの各実験のケースについて、それぞれ表4(a),(b)に示す。停留点を与える a が、 h の条件を満たさない場合についても、参考のため、()付き数値で示している。

5.6 縦リブ及びコア材の座屈補剛効果

表4(a),(b)に示した局部座屈応力の最小値を、Hoff⁸⁾の座屈応力解と比較する。縦リブの間隔が小さい場合に、本研究の理論値との差が大きくなり、本研究で考慮した縦リブの座屈補剛効果が現われている。縦リブ間隔 b_0 を半分にした実験のケースでは、表4(a)のEC-P100とEC-P100Rを比較した場合で約21%、表4(b)のEOB-P75とEOB-P75Rを比較した場合で約26%座屈応力が増加することが分かる。一方、コアの材料(弾性係数)が局部座屈応力に与える影響については、表4(b)のEOB-P75とEOB-U75を比較した場合、コアの材料にフェノール発泡体を使用した場合が、ウレタン発泡体を使用した場合に対し、座屈応力が約64%増加することが分かる。

$b=b_0$ としたときの、局部座屈応力 σ_c と座屈半波長 a の関係を表した座屈応力スペクトルを、圧縮荷重の場合を図8(a),(b),(c),(d)に、曲げ荷重の場合を図9(a),(b),(c),(d)に示す。このスペクトル曲線は、 $h \leq h_c$ のとき式(21)を用いて、 $h_c < h$ のとき式(23)を用いて描かれてい

る。コア材の無い場合、この様なスペクトル曲線は、 a に対して減少曲線となることはよく知られている。それに對し、本スペクトル曲線は下に凸の曲線であることが注目される。即ち、座屈半波長 a が、極小点をとる値より大きくなれば座屈応力が増加することを意味している。これは式(21)及び式(23)の第二項から分かるように、コア材の座屈補剛効果が、 a の 2 乗に比例して増加することによる。表 4 の中で、 σ_A は、式(21)及び式(23)の第二項から得られる縦リブ及びコア材の座屈補剛によって付加された座屈応力分である。本研究で扱った試験体の場合、コアのヤング係数は、表面材のヤング係数の約 10^{-4} 倍しかなく、構造材として荷重をほとんど負担しないが、表面材の局部座屈に抵抗する効果については、コア無し矩形板の座屈応力 σ_0 と同等以上の極めて大きな座屈補剛効果を有していることが分かる。

6. 理論と実験の比較

表 5 は、局部座屈応力についての実験の平均値と理論最小値を比較したものである。実験の平均値と理論最小値はほぼ一致していると言える。EOB-U75 では、実験値は理論最小値に対し、やや高い値をとっている。これは実験後の試験体断面の調査で、試験体側面部のリブが、製造過程で肉厚となっていたことが判明し、そのために、境界条件が半剛接的に作用したものと考えられる。

図 8、図 9 に実験結果をプロットし、理論曲線（座屈応力スペクトル）と比較する。実験結果は、黒丸でプロットした。なお、フェノール発泡体コア材を使用した曲げ実験で、座屈半波長が測定できなかった試験体については、理論的に最小座屈応力を与える座屈半波長を用いて、記号 $\times$ でプロットした。各シリーズにおいて、理論曲線と実験結果はよく一致していると言える。

表 5 局部座屈応力の実験値と理論最小値の比較

試験体 シリーズ*	コア材	実験平均値 N/mm ²	理論最小値 N/mm ²	実験 /理論
EC-U100	ウレタン	60.1	51.8	1.16
EC-U75	ウレタン	50.8	53.7	0.95
EC-P100	フェノール	75.6	85.6	0.88
EC-P100R	フェノール	123.4	104.0	1.19
EOB-U75	ウレタン	69.9	53.7	1.30
EOB2-U200	ウレタン	78.4	73.5	1.07
EOB-P75	フェノール	89.9	87.8	1.02
EOB-P75R	フェノール	104.1	110.6	0.94

7. 結論

本研究では、減圧吸引成形法で製造された格子状リブを有する CFRP サンドイッチ版について圧縮及び曲げ実験を行い、表面材の局部座屈について、座屈応力及び座屈半波長を計測した。さらに、Total Potential Energy の停留原理から、表面材の局部座屈応力に関し、陽な形で定式化を行い、縦リブ及びコア材の座屈補剛効果を理論的に明らかにした。座屈応力と座屈半波長の関係を示す理論曲線（座屈応力スペクトル）と実験結果はよく一致し、本式の有効性を確かめることができた。

謝辞

本研究を進めるにあたり、試験体、物性データの提供など東レ(株) LSS 開発推進グループの近藤敏行氏、松浦正史氏、安倍一峰氏には、

表 4 局部座屈応力の停留点の値

h_c : コア厚(mm), b_0 : 縦リブ間隔(mm), t : 表面材の板厚(mm),
 a : 座屈半波長(mm),
 h : 座屈の影響を受けるコア厚(mm),
 σ_0 : 四辺単純支持矩形板の座屈応力(N/mm²),
 σ_A : リブ及びコア材の座屈抵抗応力(N/mm²),
 σ_c : サンドイッチ版の局部座屈応力(N/mm²)

(a) 圧縮実験のシリーズ

試験体シリーズ*		EC-U100	EC-U75	EC-P100	EC-P100R
コアの材料		ウレタン発泡体		フェノール発泡体	
表面材の材料		表面材 1	表面材 1	表面材 1	表面材 1
t		4	4	4	4
b_0		400	400	450	225
h_c		100	75	100	100
式(21)の 停留値 $h \leq h_c$	a (NR 法)	155	155	120	110
	h (式(19))	117.0	117.0	90.1	77.2
	σ_0	(22.3)	(22.3)	32.6	51.3
	σ_A	(29.2)	(29.2)	53.0	52.7
	σ_c (式(21))	(51.5)	(51.5)	85.6	104.0
式(23)の 停留値 $h_c < h$	a (式(24))	150	141	122	114
	h (式(19))	113.9	107.9	92.0	79.5
	σ_0	23.4	25.6	(31.3)	(49.1)
	σ_A	28.4	28.1	(54.5)	(56.5)
	σ_c (式(23))	51.8	53.7	(85.8)	(105.6)
Hoff ⁸⁾	h	134.3	134.3	96.0	
	a	166	166	123	
	σ_c	47.6	55.0	73.1	

(b) 曲げ実験のシリーズ

試験体シリーズ*		EOB-U75	EOB2-U200	EOB-P75	EOB-P75R
コアの材料		ウレタン発泡体		フェノール発泡体	
表面材の材料		表面材 1	表面材 2	表面材 1	表面材 1
t		4	8	4	4
b_0		400	400	400	200
h_c		75	200	75	75
式(21)の 停留値 $h \leq h_c$	a (NR 法)	155	274	119	108
	h (式(19))	117.0	183.1	88.6	73.9
	σ_0	(22.3)	47.6	(34.2)	58.2
	σ_A	(29.2)	25.9	(53.0)	52.4
	σ_c (式(21))	(51.5)	73.5	(87.2)	110.6
式(23)の 停留値 $h_c < h$	a (式(24))	141	277	114	108
	h (式(19))	107.9	184.1	85.7	74.0
	σ_0	25.6	(47.3)	36.3	(58.1)
	σ_A	28.1	(26.3)	51.5	(52.5)
	σ_c (式(23))	53.7	(73.6)	87.8	(110.6)
Hoff ⁸⁾	h	134.3	281.9	96.0	
	a	166	348	123	
	σ_c	55.0	45.5	84.4	

注) NR 法: Newton-Raphson 法

多大なご協力を頂きました。また、実験に際し、清水建設(株)技術研究所の杉崎健一博士、藤崎忠志氏、兼光知巳博士、米丸啓介博士には、適切な助言を頂きました。ここに、感謝の意を表わします。

図 8(a) 圧縮実験と理論曲線の比較 (EC-U100)

図 8(b) 圧縮実験と理論曲線の比較 (EC-U75)

図 8(c) 圧縮実験と理論曲線の比較 (EC-P100)

図 8(d) 圧縮実験と理論曲線の比較 (EC-P100R)

図 9(a) 曲げ実験と理論曲線の比較 (EOB-U75)

図 9(b) 曲げ実験と理論曲線の比較 (EOB2-U200)

図 9(c) 曲げ実験と理論曲線の比較 (EOB-P75)

図 9(d) 曲げ実験と理論曲線の比較 (EOB-P75R)

参考文献

- FRP 用途事例集, (社) 強化プラスチック協会, 2000.10
- Advanced Materials, Structural Engineering International, IABSE, Vol.12, No.2, 2002
- Hiroshi Fukuyama: FRP Composites in Japan, Concrete International, Oct.1999
- 立石寧俊, 杉崎健一, 藤崎忠志, 兼光知巳, 米丸啓介, 近藤敏行: CFRP サンドイッチ版屋根の開発, 日本建築学会技術報告集, 第 14 号, pp133-138, 2001.12
- 後藤卒士民: 「レジントランスファー成形法 (RTM 法) その 1 RTM 法とは」, 強化プラスチック, Vol.46, No.3, pp.26~137, 2000.9
- 金原勲: 講座 FRP 構造の力学 (その 5) 重ねはり・サンドイッチはり, 強化プラスチック, Vol.19, No.11, 1973
- 金原勲: 講座 FRP 構造の力学 (その 10) 柱及び平板の座屈, 強化プラスチック, Vol.20, No.9, 1974
- N. J. Höff and S. E. Mautner: The Buckling of Sandwich-Type Panels, Journal of the Institute of Aeronautical Sciences, Vol.12, No.3, pp285-297, July 1945
- S.Yusuff: "Theory of Wrinkling in Sandwich Construction", Jour. of the Royal Aeronautical Society, Vol.59, January, 1955, pp.30-36
- 原口忠次郎: 弾性基礎上の矩形板, 山海堂, 1964
- 立石寧俊, 杉崎健一, 兼光知巳: CFRP モノコックパネルの開発, 清水建設研究報告, Vol.71, pp41-51, 2000.4
- F.J. Plantema: Sandwich Construction, John Wiley & Sons, pp155-161, 1966
- 林毅編: 複合材料工学, 日科技連, 1971
- 日本機械学会編: シェルの振動と座屈ハンドブック, pp29-37, 2003.1

(2003年5月8日原稿受理, 2003年8月21日採用決定)