多層建築物における等価1自由度系の地震応答特性と高次モード応答の予測 EARTHQUAKE RESPONSE CHARACTERISTICS OF EQUIVALENT SDOF SYSTEM REDUCED FROM MULTI-STORY BUILDINGS AND PREDICTION OF HIGHER MODE RESPONSES

倉本 洋*

Hiroshi KURAMOTO

This paper shows two methods of reducing from a multi-story building to the equivalent single degree of freedom system (ESDOF) to improve the capacity spectrum method used in the calculation of response and limit strength provided in the Building Standard Law Enforcement Order of Japan. One is a mode-adaptive pushover analysis method, which uses a stiffness-dependent lateral force distribution at each loading step without the eigenvalue analysis, and the other is a method using modal decomposition procedure together with earthquake response analysis. Applying both methods for 4 and 12 story RC buildings, the validity of the methods and the earthquake response characteristics of ESDOF system are examined. Based on the latter method, an evaluation method of the higher mode effect in story responses is also proposed.

Keywords : Calculation of response and limit strength, Equivalent single degree of freedom system, Higher mode response, Mode-adaptive pushover analysis, Earthquake response analysis

限界耐力計算、等価1自由度系、高次モード応答、モード適応型静的荷重増分解析、地震応答解析

1. はじめに

1998年6月の建築基準法改正に伴って2000年6月に施行された限界耐力計算では、建築物の応答値の算定法として等価線形化法^{1,2)}に基づく応答スペクトル法が採用されている。この方法は周知のように、多層建築物の地震時における各層あるいは各部材の最大応答値を当該建築物の構造特性を代表する等価1自由度系の最大応答値に基づいて評価するものである。したがって、建築物を如何にして適切に等価1自由度系にモデル化するかがこの方法を用いる際の重要なポイントの1つとなる³⁾。一方、等価1自由度系による応答値評価には高次モードによる部材応力および変形の増大等の影響が考慮されないため、その影響を如何に評価するかも等価1自由度系縮約に関連したもう1つの重要なポイントである。

本論では、限界耐力計算における上部構造の応答値評価法の改善を目的として、文献4)で示した方法を発展させたより合理的な等価1自由度系縮約法と高次モードに起因する応答増幅の評価法を提案する。具体的には、建築物の塑性化に伴うモード形の変化を適切に考慮できるモード適応型非線形荷重増分解析法⁵⁾を用いた等価1自由度系縮約法（以下、静的縮約法と略記）、および多自由度系の地震応答結果を用いた振動モード分解による等価1自由度系縮約法（以下、動的縮約法と略記）をそれぞれ示す。4層および12層鉄筋コンクリート造フレームに対して両縮約法を適用し、静的縮約結果と動的縮約結果の比較に基づいて等価1自由度系の地震応答特性を検討すると共に、限界耐力計算における等価1自由度系縮約の妥当性を示す。さらに、動的縮約結果に基づいた層せん断力および層間変形の時刻歴における高次モード成分の評価法を提案する。

2. モード適応型非線形荷重増分解析法

限界耐力計算は、多層建築物に対する等価1自由度系の代表荷重-代表変形曲線（ ${}_1S_d$ - ${}_1S_d$ 曲線）上の任意の点で1次振動モードに対応する等価線形化が成立するという仮定の下で、検証用地震動に対する最大応答値を推定するものである。したがって、厳密に言えば、 ${}_1S_d$ - ${}_1S_d$ 曲線を求める際に援用する静的非線形荷重増分解析では、建築物が弾性状態にあるか塑性状態にあるかの如何に関わらず、常に1次振動モードに比例した外力分布を用いる必要がある⁴⁾。建築物の塑性化に伴うモード形の変化に応じて外力分布を逐一変化させるには、荷重ステップ毎に固有値解析を行えばよいが、実務的にやや煩雑である。そこで以下では、筆者らが提案した増分形で弾塑性1次モード比例の外力分布を与える方法⁵⁾を概説する。

多自由度系における i 層の1次モードによる変位 ${}_i\delta_i$ は、次式で与えられる。

$${}_i\delta_i = {}_1\beta \cdot {}_1u_i \cdot {}_1S_d \quad (1)$$

ここに、 ${}_1u_i$: 1次の固有ベクトルの i 層成分

${}_1\beta$: 1次の刺激係数

${}_1S_d$: 1次の応答変位

一方、 i 層の1次モードに対応する外力 ${}_iP_i$ は、

$${}_iP_i = m_i \cdot {}_1\beta \cdot {}_1u_i \cdot {}_1S_d \quad (2)$$

ここに、 m_i : i 層の質量

${}_1S_d$: 1次の応答加速度

となる。したがって、式(1)および(2)より次式を得る。

$${}_iP_i = m_i \cdot {}_i\delta_i \cdot {}_1S_d / {}_1S_d \quad (3)$$

本論文は文献12)を修正・加筆したものである。

* 豊橋技術科学大学工学部建設工学系 助教授・博士(工学)

Assoc. Prof., Department of Architecture and Civil Engineering, Toyohashi University of Technology, Dr. Eng.

また、等価 1 自由度系の代表荷重 S_d および代表変位 S_d は式(4)および(5)で与えられる⁴⁾。

$$S_d = \frac{\sum_{j=1}^N m_{j1} \delta_j^2}{\left(\sum_{j=1}^N m_{j1} \delta_j \right)^2} Q_B \quad (4)$$

$$S_d = \frac{\sum_{j=1}^N m_{j1} \delta_j^2}{\sum_{j=1}^N P_{j1} \delta_j} S_d \quad (5)$$

ここに、 N : 層数

Q_B : ベースシア

多自由度系における 1 次モード比例外力 P_i による仕事（外部仕事）と縮約等価 1 自由度系におけるせん断力 Q_B による仕事（内部仕事）の等価を考慮すると、

$$\sum_{j=1}^N P_{j1} \delta_j = Q_B S_d \quad (6)$$

となり、式(3)~(6)より以下の関係が得られる。

$$P_i = \frac{m_{i1} \delta_i}{\sum_{j=1}^N m_{j1} \delta_j} Q_B \quad (7)$$

増分解析における k ステップの i 層の外力を式(7)に基づいて式(8)のように設定すれば、荷重増分形 ($d_i Q_B$) のモード適応型静的非線形荷重増分解析 (Mode-Adaptive Pushover 解析: 以下、MAP 解析と呼称) が可能となる。

$$P_{ik} = \frac{m_{i1} \delta_{ik-1}}{\sum_{j=1}^N m_{j1} \delta_{jk-1}} (Q_{B,k-1} + d_i Q_B) \quad (8)$$

なお、式(8)における δ_{ik-1} の初期値は固有値解析から得られる弾性 1 次モードのものを用いる。

3. 多自由度系の振動モード分解と等価 1 自由度系縮約

本章では、多層建築物の時刻歴解析から得られた結果を用いて当該建築物の振動モードを分解し、等価 1 自由度系に縮約する方法を示す。

多自由度系における地動に対する運動方程式は、

$$[M]\ddot{\delta}(t) + [C]\dot{\delta}(t) + [K]\delta(t) = -[M]\ddot{x}_0(t) \quad (9)$$

で与えられる。ここで、復元力ベクトルを $\{R(t)\} = [C]\dot{\delta}(t) + [K]\delta(t)$ と定義すると、式(9)は次式に書き換えられる。

$$[M]\ddot{\delta}(t) + \{R(t)\} = -[M]\ddot{x}_0(t) \quad (10)$$

s 次モードの刺激関数を $\beta\{u\}$ とし、変位ベクトル $\{\delta(t)\}$ が

$$\{\delta(t)\} = \sum_{j=1}^s \beta_j\{u\} \Delta_j(t) \quad (11)$$

ここに、 $\Delta_j(t)$: s 次モードに対応する等価縮約系における時刻 t での代表変位

で与えられることと、固有ベクトルの直交性を考慮すると、縮約等価 s 次モード系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\beta\{u\}^T [M] \beta\{u\} \ddot{\Delta}(t) + \beta\{u\}^T \{R(t)\} = -\beta\{u\}^T [M] \ddot{x}_0(t) \\ \therefore \bar{M} \ddot{\Delta}(t) + R_{eq}(t) = -\bar{M} \ddot{x}_0(t) \quad (12)$$

ここに、 $\bar{M}$: s 次の等価質量

$R_{eq}(t)$: s 次の等価復元力 ($= \beta\{u\}^T \{R(t)\}$)

したがって、1 次モードに対応する等価縮約系（すなわち、等価

1 自由度系）の運動方程式は次式となる。

$$\bar{M} \ddot{\Delta}(t) + R_{eq}(t) = -\bar{M} \ddot{x}_0(t) \quad (13)$$

ところで、地震動入力により弾塑性応答が生じている多自由度系を等価 1 自由度系に置換する場合、1 次モードとしてどのような固有モード ($\{u\}$) を選択するかが重要なポイントとなる。本来、「1 次モード」と「高次モード」の分解という立場に立脚するならば、振動中に時々刻々変化するモード系を随時分解する手法が妥当であろうが、「ある仮定の下での 1 次モード」と「それに対する残余成分」という観点に立てば、振動中のある時点での 1 次モード系を用いるのも一方法である⁹⁾。本論では、多自由度系における最大地震応答を等価 1 自由度系によって評価することに主眼を置いているため、後者の考え方に基づき「最大応答時における 1 次モード」を参照モード系に選択し、その残余成分を「広義の高次モード成分（以後、高次モード成分と略記）」と定義することとする。具体的には、前述の弾塑性 1 次モード比例の外力分布を用いた MAP 解析を援用して、地震応答解析結果に基づいて後述の式(21)および(24)により縮約した等価 1 自由度系の最大応答変位に相当する MAP 解析結果の荷重ステップを求め、そのステップでの各層の 1 次刺激関数 $\beta_j u_i$ を下式によって評価することにより参照モード系を得る。

$$\beta_j u_i = \frac{\sum_{k=1}^N m_{k1} \delta_k}{\sum_{k=1}^N m_{k1} \delta_k^2} \delta_i \quad (14)$$

ここに、 m_i : i 層の質量

δ_i : i 層の 1 層床位置に対する相対変位 (MAP 解析値)

なお、最初は等価 1 自由度系が得られていないので、多自由度系における任意の層の最大応答変形に相当する MAP 解析結果の荷重ステップでの $\beta\{u\}$ を仮定して縮約し、その後 1、2 回同様の手順を繰り返し、試行錯誤的に $\beta\{u\}$ を求めるものとした。本解析では地震応答解析結果に基づいて縮約した等価 1 自由度系の最大応答変位と MAP 解析において $\beta\{u\}$ を採用した荷重ステップでの変位との差が当該最大応答変位の 0.5% 以下となることを収斂条件とした。

多自由度系から等価 1 自由度系への置換におけるもう 1 つのポイントは、式(13)における等価復元力 $R_{eq}(t)$ と等価水平変位 $\Delta(t)$ （代表変位： $= S_d(t)$ ）の設定方法である。本論では滝澤らの方法⁹⁾と同様に、式(15)に示す外力と内力（復元力）との釣合を満たす系に対して式(16)による 1 次モード比例の変位モードを強制的に与えることにより、広義の等価 1 自由度系を設定する。

$$\{P(t)\} = \{R(t)\} \quad (15)$$

$$\{\delta(t)\} = \beta\{u\} \Delta(t) \quad (16)$$

ここに、 $\{P(t)\}$: 外力ベクトル ($= [M] \sum_{j=1}^s \beta_j\{u\} S_d(t)$)

$\{\delta(t)\}$: 1 次モード比例変位ベクトル

$S_d(t)$: (時刻 t における) s 次の応答加速度

ここで、MAP 解析法の場合（式(6)）と同様に、多自由度系の外部仕事と等価 1 自由度系の内部仕事の等価を考慮すると、

$$\{P(t)\}^T \{\delta(t)\} = R_{eq}(t) \Delta(t) \quad (17)$$

となる。さらに、

$$R_{eq}(t) = \beta\{u\}^T \{R(t)\} \quad (18)$$

$$\beta\{u\}^T \{P(t)\} = \sum_{j=1}^s P_j(t) = \left(\sum_{j=1}^s m_{j1} \beta_j u_i \right) S_d(t) = \bar{M} S_d(t) \quad (19)$$

ここに、 $P_i(t)$: i 層における 1 次モード比例外力

の関係と固有ベクトルの直交性を考慮すると、

$$\{P(t)\}^T \{\delta(t)\} = \{P(t)\}^T \{\delta(t)\} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \beta_i u_i \cdot \delta_i(t) \right) \cdot S_a(t) \quad (20)$$

の関係が得られ、式(15)および(17)~(20)より、等価1自由度系における時刻 t での代表変位 $\Delta(t)$ は、

$$\Delta(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \beta_i u_i \cdot \delta_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i \beta_i u_i} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i(t) \cdot \delta_i(t)}{\sum_{i=1}^N P_i(t) \cdot \delta_i(t)} \quad (21)$$

で与えられる。一方、1次の等価復元力 $R_{eq}(t)$ は式(17)より、

$$R_{eq}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i(t) \cdot \delta_i(t)}{\Delta(t)} \quad (22)$$

となる。さらに、式(23)の関係⁴⁾と式(15)、(18)および(19)を考慮すると、1次の応答加速度 $S_a(t)$ が式(24)のように与えられる。

$$\bar{M} \cdot \Delta(t) = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \delta_i(t) \quad (23)$$

$$S_a(t) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i(t) \cdot \delta_i(t)}{\bar{M} \cdot \Delta(t)} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i(t) \cdot \delta_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \delta_i(t)} \quad (24)$$

なお、式(23)は $\bar{M} = \sum_{i=1}^N m_i \beta_i u_i$ と式(21)の関係を考慮すると、

$$\bar{M} \cdot \Delta(t) = \sum_{i=1}^N m_i \beta_i u_i \cdot \delta_i(t) \quad (23')$$

と書き換えられ、両辺に応答加速度 $S_a(t)$ を乗じると式(17)に帰着し、等価1自由度系の内部仕事と多自由度系の1次モード成分による外部仕事の釣合であることがわかる。また、式(23)の両辺に重力加速度 g を乗じると等価1自由度系および多自由度系の各質点の水平変形に伴う付加モーメントの釣合ともなっている。

多自由度系の地震応答を等価1自由度系に縮約する具体的な手順は以下の通りである。

- ① 式(14)で与えられる刺激関数 $\beta \{u\}$ と多自由度系の地震応答結果から得られた時刻 t における各層の変位 $\delta_i(t)$ を用いて、等価1自由度系における時刻 t での代表変位 $\Delta(t)$ を式(21)により求める。
- ② $\Delta(t)$ を式(16)に代入し、各層における1次モード比例変位 $\delta_i(t)$ を求める。
- ③ $\Delta(t)$ 、 $\delta_i(t)$ および多自由度系の地震応答結果から得られた時刻 t における各層の外力 $P_i(t)$ を用いて、等価1自由度系における時刻 t での等価復元力 $R_{eq}(t)$ および1次応答加速度 $S_a(t)$ を式(22)および(24)により求める。

なお、式(21)、(22)および(24)を次式のように表現すれば、 s 次モード ($s=2 \sim N$) に対応する等価縮約系にも適用できる。

$$\Delta(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \beta_i u_i \cdot \delta_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i \beta_i u_i} \quad (25)$$

$$R_{eq}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i(t) \cdot \delta_i(t)}{\Delta(t)} \quad (26)$$

$$S_a(t) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i(t) \cdot \delta_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \delta_i(t)} \quad (27)$$

ここで、 $\delta_i(t) = \beta_i u_i \cdot \Delta(t)$ であり、 $\beta_i u_i$ は弾性時の固有値解析結果を用いればよい。

4. 等価1自由度系の地震応答特性

2章および3章で示した静的および動的縮約法の妥当性を検証す

図1 解析対象建築物

るために、文献 7)に示されている4層および12層鉄筋コンクリート造純フレームモデルに対する静的非線形荷重増分解析(MAP解析)および時刻歴地震応答解析を実施した。

図1に解析対象建築物の軸組および平面図を示す。解析対象建築物は、4層および12層フレーム共に同一平面形状であり、桁行および張間方向が共に6.0m×3スパンで、建築物高さは4層および12層フレームでそれぞれ14.5mおよび42.5m(1層4.0m、2層以上3.5m)である。各建築物のベースシア係数(ある層の最大層間変形角が1/100 radianに達した時点)は、4層フレームで0.398および12層フレームで0.299である。

MAP解析および地震応答解析共に、梁および柱部材を材端バネモデルによりモデル化し、復元力特性にはTakedaモデルを用いた。なお、図1に示すように、解析は片側2構面に対して行った。地震応答解析に用いた入力地震波は、El Centro NS(1940)の1波であり、最大速度を75cm/secに基準化したものを用いた。なお、地震波入力時間は、地震動の主要な10秒間と地震終了後に建築物を十分に減衰させるための自由振動15秒間の計25秒間とした。解析における粘性減衰は瞬間剛性比例型とし、弾性1次固有周期に対して減衰係数を3%と仮定した。数値積分にはNewmark-β法(β=1/4)を用いた。

図2に各フレームの地震応答解析結果を示す。同図(a)は1次モードに対する応答加速度換算ベースシア $Q_b / \bar{M}$ と等価変位 Δ_{eq} ($\beta_i u_i = 1.0$ となる等価高さ位置での水平変位) の関係を、(b)は1次応答加速度 S_a (式(24))と代表変位 Δ (式(21)) の関係をそれぞれ示し、(c)には $Q_b / \bar{M} - S_a$ と $\Delta_{eq} - \Delta$ の関係、すなわち高次モード成分を実線で描いている。さらに、(c)には点線で $Q_b / \bar{M} - S_a$ と Δ の関係も併せて示している。なお、固有ベクトルの直交性が成立していれば Δ_{eq} と Δ は一致するが、6章でも述べるように、本論では参照モード系として最大応答変形時における(塑性の)1次モードを選択しているため直交性が成立せず、 Δ_{eq} と Δ は若干異なる。

同図(a)に示す $Q_b / \bar{M} - \Delta$ 関係に着目すると、4層フレームは比較的定常的に振動しているのに対して、12層フレームでは履歴曲線がかなり暴れた形状を示しており、高次モードの影響が顕著であることが認められる。しかしながら、 $S_a - \Delta$ 関係に変換するとその様相が一変し、4層および12層共に極めて安定した定常性が浮かび上がってくる。また、両者の履歴形状に着目すると、4層フレームが12層フレームに比して塑性化の度合いが大きいことも見てとれる。このように、式(21)および(24)を用いれば複雑な多自由度系の時刻歴地震応答結果から1次モード応答の分解および等価1自由度系への

図2 地震応答解析結果

図3 $S_a - \Delta$ 関係における動的解析結果と静的解析結果の比較

縮約が可能となり、多自由度系構造物の基本的な振動性状の把握に極めて有用である。なお、これに関しては既に滝澤らによる研究⁶⁾において指摘されているところでもある。

一方、図2(c)の実線で示されるように、両フレーム共に応答変位の高次モード成分 $\Delta_{eq} - \Delta$ は比較的小さな値となっているが、応答加速度の高次モード成分 $Q_B / \bar{M} - S_a$ ($= (Q_B - Q_B) / \bar{M}$) はかなり大きく、その度合いは12層フレームのものが4層フレームのものに比して顕著である。しかしながら、 $Q_B / \bar{M} - S_a$ と Δ の関係(点線)に示されるように、最大応答値付近(図中の○で囲った部分)では、両フレーム共に $Q_B / \bar{M} - S_a$ がほぼ0になる傾向が認められる。すなわち、高層建築物では低層建築物に比して振動中における高次モードの関与が大きいが、(等価1自由度系の)最大応答値付近では建築物高さに関わらず概ね1次モードで振動する傾向があると言える。

図3は12層フレームにおける等価1自由度系の応答($S_a - \Delta$ 関係)を最大応答時以前(同図(a))とそれ以降(同図(b))に分けて示したものである。また、両図における灰色の太実線は、1次モードに対するMAP解析結果を表し、○印は(c)に示す Δ の時刻歴上にプロットされた○印に対応したものであり、ある時刻までに経験した最大応答変形点を表している。

等価1自由度系における最大応答時以前の応答履歴では、ある時刻までに経験した最大応答変形点が1次モードに対するMAP解析結果とほぼ一致していることが認められる。すなわち、前述の考察の補完として、“地震応答中の多層建築物では、ある時点までに経験した等価1自由度系の最大応答変形時に相当する時刻での振動モードは概ね1次モードである”と言える。したがって、等価1自由度系における最大応答変形時では、各層の変形分布および外力分布はその時点での各層の等価剛性に基づく1次モードに概ね比例したものであると考えられる。

一方、最大応答時以降の応答履歴に着目すると、正負の最大応答点を結ぶ等価剛性(図中の破線)に沿って概ね定常的に振動していることが認められる。これらの結果は、1次モードが支配的で、 $S_a - S_d$ 曲線上の任意の点においてその割線を剛性とした定常振動状態にあるとの仮定の下に、当該点における塑性化に対応した履歴減衰を伴う等価線形系を設定して建築物の最大地震応答値(変形)を算定する限界耐力計算の合理性を裏付けるものである。また、本論で示した弾塑性1次モード比例の外力分布による静的非線形荷重増分解析法(MAP解析法)は、限界耐力計算による最大応答値の算定精度をより向上させるために有効な手法であると言える。

5. 高次モードに起因する残余せん断力の評価

本章では、高次モードに起因する残余せん断力の評価法について検討する。

図4は12層フレームにおける等価1自由度系における応答加速度の高次モード成分の時刻歴を示したものである。同図(a)は図2に示した1次モード成分のみを差し引いた高次モード成分 $(Q_B - Q_1)/\bar{M}$ を、(b)は1次モード成分と2次モード成分を差し引いた高次モード成分 $(Q_B - Q_1 - Q_2)/\bar{M}$ をそれぞれ示す。図中の実線は応答解析結果を、点線は次式による推定値 ${}_k S_a^{pre}(t)$ をそれぞれ表している。

$${}_k S_a^{pre}(t) = -\frac{\left(M - \sum_{s=1}^k \bar{M}_s\right)}{\bar{M}} \cdot \ddot{x}_0(t) = -\frac{\bar{M}}{\bar{M}} \cdot \ddot{x}_0(t) \quad (28)$$

ここに、 k : 考慮するモード数 (図4(a): 1、同(b): 2)

M : 総質量

$\bar{M}$: 高次モード成分の等価質量の総和 ($= \sum_{s=k+1}^N \bar{M}_s$)

$\ddot{x}_0(t)$: 地動の加速度

高次モード成分の時刻歴は、式(28)で与えられる推定値 ${}_k S_a^{pre}(t)$ と良好な対応を示しており、壁谷澤^{8,9)}および滝澤¹⁰⁾が指摘しているように、地動の加速度に概ね比例する結果となっている。特に、2次モードまでを考慮した場合には、1次モードのみの場合に比して推定精度が向上することが認められる。この理由は以下のように説明できる。すなわち、任意の時刻 t におけるベースシアを $Q_B(t)$ とすると、式(15)より

$$Q_B(t) = \sum_{i=1}^N P_i(t) = \sum_{i=1}^N R_i(t) = \sum_{i=1}^N R_{eq}(t) \quad (29)$$

となる。また、ベースシアに対する1次モード成分および高次モー

ド成分をそれぞれ $Q_B(t)$ および ${}_k Q_B(t)$ とすると、次式が成立する。

$${}_k Q_B(t) = Q_B(t) - Q_1(t) = \sum_{s=2}^N R_{eq}(t) \quad (30)$$

さらに、式(12)を式(30)に代入し、 $\bar{M} = \sum_{s=2}^N \bar{M}_s$ を考慮すると、ベースシアに対する高次モード成分 ${}_k Q_B(t)$ は次式で与えられる。

$${}_k Q_B(t) = -\sum_{s=2}^N \bar{M}_s \cdot \ddot{\delta}_s(t) - \bar{M} \cdot \ddot{x}_0(t) \quad (31)$$

ここで、本論で設定している等価1自由度系は、前述したように式(14)で与えられる刺激関数を用いて式(16)による変位モードを強制的に与えたものである。振動中における等価質量 $\bar{M}$ および等価高さ $\bar{H}$ (代表変位 $\delta(t)$ が生じている位置) は変化しないものと仮定している。したがって、式(31)における釣合は等価高さ位置での s 次モードの変位 $\delta_s(t)$ および刺激関数 $\beta_{s,u}$ を用いて次式のように表現することもできる。

$$\begin{aligned} {}_k Q_B(t) &= -\sum_{s=2}^N \bar{M}_s \cdot \ddot{\delta}_s(t) - \bar{M} \cdot \ddot{x}_0(t) \\ &= -\sum_{s=2}^N \bar{M}_s \cdot \beta_{s,u} \cdot \ddot{\delta}_s(t) - \bar{M} \cdot \ddot{x}_0(t) \end{aligned} \quad (32)$$

図5は式(32)の右辺第一項(実線)と第二項(破線)を比較したものである。同図より第一項が第二項に比してかなり小さな値となっていることが認められる。この結果は、高次になるほど等価質量 $\bar{M}$ が小さくなりせん断力寄与度が低下することや、直交性は崩れているものの図2(c)に見られるように等価1自由度系の等価高さ位置において $\sum_{s=1}^N \delta_s(t) \approx 0$ の関係があるので加速度 $\ddot{\delta}_s(t)$ ($s=2 \sim N$) そのものが相殺関係にあること等が主たる原因であると説明できよう。ちなみに、図4(b)に示したように、2次モード成分まで差し引いた高次モード成分では、等価質量の大きな2次モードの影響が取り除かれるため、地動の加速度との線形比例関係がより良好となる。

以上の考察から総合的に判断すると、高次モードに起因する残余せん断力 ${}_k Q_B(t)$ は2次モード成分 $Q_2(t)$ とその高次モード成分の和として次式で評価できる。

$${}_k Q_B(t) \approx Q_2(t) - \sum_{s=3}^N \bar{M}_s \cdot \ddot{x}_0(t) = Q_2(t) - \left(M - \sum_{s=1}^2 \bar{M}_s\right) \cdot \ddot{x}_0(t) \quad (33)$$

図4 高次応答加速度の時刻歴

図5 式(32)における右辺第一項と第二項の比較

図6 12層フレームの層せん断力時刻歴に対する予測精度

ここで、 ${}_2Q_0(t) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \cdot \beta_i \cdot u_i \right) \cdot {}_2S_0(t) = {}_2\overline{M} \cdot {}_2S_0(t)$

ちなみに、層せん断力の高次モード成分 ${}_hQ_i(t)$ は次式となる。

$${}_hQ_i(t) = {}_2Q_i(t) - \sum_{j=1}^N \left\{ m_j \left(1 - \sum_{k=1}^2 \beta_k \cdot u_k \right) \right\} \cdot \ddot{x}_0(t) \quad (34)$$

図6は、12層フレームにおける1層、7層および12層の層せん断力 $Q_i(t)$ の時刻歴を示したものである。図中の点線は地震応答解析結果を、実線は1次モード成分 $Q_i(t)$ と式(34)で与えられる高次モード成分 ${}_hQ_i(t)$ の和、すなわち、下式をそれぞれ表している。

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= \sum_{j=1}^N P_j(t) = \sum_{j=1}^N \left({}_jP_i(t) + {}_hP_j(t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^N m_j \left\{ \sum_{k=1}^2 \beta_k \cdot u_k \cdot S_0(t) - \left(1 - \sum_{k=1}^2 \beta_k \cdot u_k \right) \cdot \ddot{x}_0(t) \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

各層共に地震応答解析結果と推定結果は極めて良好な対応関係があり、式(35)により各層における層せん断力の時刻歴の評価が可能であると言える。

6. 高次モードに起因する残余応答変位の評価

最後に、残余応答変位の評価法について検討する。

各層における（高次モードに起因する）残余応答変位 ${}_h\delta_i(t)$ は、

$${}_h\delta_i(t) = \delta_i(t) - \delta_1(t) \quad (36)$$

で与えられる。ここで、残余応答成分が“もう一つの等価1自由度系”に縮約できると仮定し、それに対する時刻 t における（等価な）刺激関数を ${}_h\beta \cdot {}_h u_i(t)$ とすると、式(14)より

$${}_h\beta \cdot {}_h u_i(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot {}_h\delta_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i \cdot {}_h\delta_i(t)^2} \cdot {}_h\delta_i(t) \quad (37)$$

の関係が得られ、残余等価変位 ${}_h\Delta(t)$ は式(25)より次式で与えられる。

$${}_h\Delta(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \beta \cdot {}_h u_i(t) \cdot \delta_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \beta \cdot {}_h u_i(t)} \quad (38)$$

図7に4層および12層フレームに対して式(38)から得られた ${}_h\Delta(t)$ の時刻歴を点線で示している。時刻歴は計算誤差の影響で若干暴れた履歴になっているが、下式により各層の残余変位 ${}_h\delta_i(t)$ を求めると式(36)から得られるものと一致する。

$${}_h\delta_i(t) = {}_h\beta \cdot {}_h u_i(t) \cdot {}_h\Delta(t) \quad (39)$$

図7 式(38)と式(40)による残余等価変位の時刻歴比較

また、図7には式(38)において ${}_h\Delta(t)$ が最大値をとる時刻の刺激関数 ${}_h\beta \cdot {}_h u_i$ を用いて、下式により残余等価変位 ${}_h\Delta(t)$ を再評価したものを実線で示している。

$${}_h\Delta(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \beta \cdot {}_h u_i \cdot \delta_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \beta \cdot {}_h u_i} \quad (40)$$

同図より、建築物高さに関わらず、任意の時刻における刺激関数を用いる代わりに ${}_h\Delta(t)$ の最大値における刺激関数を用いても ${}_h\Delta(t)$ の時刻歴はほとんど変わらないことがわかる。

ところで、式(40)は ${}_h\overline{M} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \beta \cdot {}_h u_i$ （ここに、 ${}_h\overline{M}$ は高次モード成分に対する縮約等価1自由度系の等価質量であり、式(28)における高次モード成分の等価質量の総和、 $\overline{M}$ とは異なる。）の関係と前述の式(21)および(23)の関係を考慮すると、次式に書き換えることができる。

$${}_h\overline{M} \cdot {}_h\Delta(t) = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \delta_i(t) \quad \left(= \sum_{i=1}^N m_i \cdot \beta \cdot {}_h u_i \cdot \delta_i(t) \right) \quad (41)$$

式(41)は式(23)と同様に、高次モード成分に対する等価1自由度系の内部仕事と多自由度系の高次モード成分による外部仕事の釣合に基づくものと解釈できるが、左辺の ${}_h\overline{M} \cdot {}_h\Delta(t)$ の物理的意味を考える場合、等価1自由度系の水平変形に伴う付加モーメントを重力加速度で除したものの時刻歴と捉えたほうが理解しやすい。

式(41)の右辺に対して式(42)の関係を考慮すると、式(43)を得る。

$${}_h\delta_i(t) = \sum_{j=1}^N \delta_j(t) = \sum_{j=1}^N \beta \cdot u_j \cdot \Delta(t) \quad (42)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \beta \cdot {}_h u_i \cdot \delta_i(t) = \sum_{j=1}^N \overline{M} \cdot \Delta(t) \quad (43)$$

図8は4層および12層フレームの解析結果に対して式(43)の左辺（点線）と右辺（実線）を時刻歴と比較したものである。左辺は前述の式(38)において ${}_h\Delta(t)$ が最大値をとる時刻の刺激関数を、右辺は固有値解析から得られた2次モード以上の刺激関数をそれぞれ用いて計算している。

12層フレームでは左辺と右辺が概ね対応しており、式(43)がほぼ成立しているのように見えるが、4層フレームではその関係が一変し、左辺と右辺の対応関係が認められない。この理由は、3章で述べたように参照モード系に用いる1次の刺激関数を等価1自由度系における最大応答変形時でのものとしているため、固有ベクトル

図8 式(43)による ${}_h\overline{M} \cdot {}_h\Delta(t)$ の時刻歴比較

の直交性 ($\sum_{i=1}^N \beta_i u_i = 1$ の関係) が成立しないためである。図2に示した等価1自由度系の $S_e - \Delta$ 関係からも明らかなように、12層フレームでは塑性化の程度が比較的小さいが、4層フレームではそれが著しいため、式(43)における左辺と右辺の対応関係に顕著な差が生じたものと考えられる。したがって、式(43)の右辺には下式による1次モードの塑性成分 $\bar{M}_p \cdot \Delta_p(t)$ が含まれているので、それを差し引く必要がある。

$$\bar{M}_p \cdot \Delta_p(t) = \bar{M}_p \cdot \Delta(t) - \bar{M}_e \cdot \Delta_e(t) \\ = \sum_{i=1}^N m_i (\beta_i u_i - \beta_e u_e) \cdot \delta_i(t) \quad (44)$$

ここに、 $\bar{M}_e$: 弾性1次モードの等価質量

$\Delta_e(t)$: 弾性1次モードの等価変位

$\beta_e u_e$: 弾性1次モードの刺激関数

すなわち、式(43)は以下のように変更されなければならない。

$$\sum_{i=1}^N m_i \beta_i u_i \cdot \delta_i(t) = \sum_{i=2}^N \bar{M}_i \cdot \Delta(t) + \bar{M}_e \cdot \Delta_e(t) - \bar{M}_p \cdot \Delta(t) \quad (45)$$

図9は図8と同様に式(45)の左辺と右辺を比較したものである。左辺と右辺は4層フレームでは概ね一致し、12層フレームではほとんどぴったり一致しており、式(45)の妥当性が検証されている。なお、参照モード系に弾性1次モードを選択した場合には式(45)は式(43)と一致し、固有ベクトルの直交性を崩すことなく解を求めることができるが、3章でも述べたように、本論では多自由度系における最大地震応答を等価1自由度系によって評価し、その高次モード成分を適切に予測することに主眼を置いているため、「最大応答時における1次モード」を参照モード系に選択する必要がある。換言

図9 式(45)による $\bar{M}_p \cdot \Delta(t)$ の時刻歴比較

図10 等価刺激関数 (2次以上) 図11 等価刺激関数 (3次以上)

すれば、弾性1次モードを選択した場合には最大応答時においてモード系が異なるため、各層の応答値評価に影響することになる。

以上示したように、式(40)における右辺の分子は式(45)によって求められるので、分母、すなわち等価質量 $\bar{M}$ ($= \sum_{i=1}^N m_i \beta_i u_i$) を評価できれば、残余等価変位 $\Delta(t)$ を求めることができる。そこで、以下では等価刺激関数 $\beta_i u_i$ の評価を試みる。

図10には12層フレームの $\beta_i u_i$ 分布を実線で示している。 $\beta_i u_i$ 分布は一点鎖線で示す2次の刺激関数 $\beta_2 u_2$ の分布に極めて類似している。これは、4章で示した“地震応答中の多層建築物では、ある時点までに経験した等価1自由度系の最大応答変形時に相当する時刻の振動モードは概ね1次モードである”ことと同様に、“全体応答から1次モード成分を取り除いた高次モード応答系では、それを縮約した等価1自由度系の最大応答変形時に相当する時刻において等価質量の最も大きな2次モードが支配振動モードになる性質がある”ためと考えられる。ちなみに、図11は12層フレームにおいて3次モード以上を縮約した等価1自由度系における最大応答変形時の等価刺激関数分布(実線)と3次モード(一点鎖線)を比較したものである。両者の適合精度は2次モードの場合に比して劣るが、概ね対応していることが認められる。なお、この考察は松森らの提案する「外力分布を1次モードと2次モードの直和および差分とした2つの静的非線形荷重増分解析による最大地震応答変形推定法¹¹⁾」の合理性を裏付けるものであるとも言えよう。

上記のように $\beta_i u_i$ 分布は概ね2次モードに対応するが、式(45)において1次モードの塑性成分 $\bar{M}_p \cdot \Delta_p(t)$ を差し引いているので、塑性成分の等価質量 $\bar{M}_p$ ($= \sum_{i=1}^N m_i (\beta_i u_i - \beta_e u_e)$) も差し引く必要がある。したがって、等価刺激関数 $\beta_i u_i$ および等価質量 $\bar{M}$ はそれぞれ下式となる。

$$\beta_i u_i = \beta_2 u_2 + \beta_e u_e - \beta_1 u_1 \quad (46)$$

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^N m_i (\beta_2 u_2 + \beta_e u_e - \beta_1 u_1) = 2\bar{M} + \bar{M}_e - \bar{M} \quad (47)$$

図10には式(46)による $\beta_i u_i$ 分布も点線で示している。式(46)によって解析値(実線)を概ね評価できることが認められる。

以上を総合すると、式(40)、(45)および(47)より残余等価変位 $\Delta(t)$ は次式で与えられる。

$$\Delta(t) = \frac{\sum_{i=2}^N \bar{M}_i \cdot \Delta(t) + \bar{M}_e \cdot \Delta_e(t) - \bar{M}_p \cdot \Delta(t)}{2\bar{M} + \bar{M}_e - \bar{M}} \quad (48)$$

なお、式(40)に式(46)を直接代入して $\Delta(t)$ を求めることもできるが、式(46)そのものが略算であり、実際には3次以上のモードの影響も若干含まれるため、式(40)に対する適合精度は式(48)に比して若干低下する。むしろ略算式としては4次以上の等価質量が極めて小さくなることを考慮して次式を用いた方が式(40)との誤差は少ない。

$$\Delta(t) = \frac{\sum_{i=2}^3 \bar{M}_i \cdot \Delta(t) + \bar{M}_e \cdot \Delta_e(t) - \bar{M}_p \cdot \Delta(t)}{2\bar{M} + \bar{M}_e - \bar{M}} \quad (49)$$

各層の層間変形 $\delta_i(t)$ は、1次モード成分と式(46)による刺激関数および式(49)による残余等価変位を用いて得られる高次モード成分の和によって式(50)で与えることができる。

$$\delta_i(t) = \beta_i (u_i - u_{i-1}) \cdot \Delta(t) \\ + \beta (\beta_i u_i - \beta_{i-1} u_{i-1}) \cdot \frac{\sum_{i=2}^3 \bar{M}_i \cdot \Delta(t) + \bar{M}_e \cdot \Delta_e(t) - \bar{M}_p \cdot \Delta(t)}{2\bar{M} + \bar{M}_e - \bar{M}} \quad (50)$$

ただし、 $u_0 = u_n = 0$

図12に12層フレームの1層、7層および12層における層間変形に対する解析値（点線）と式(50)による計算値（実線）を比較したものを一例として示す。また、図13には4層フレームにおける各層の層せん断力-層間変形関係の解析値（点線）と式(35)および(50)による計算値（実線）を比較したものを示している。両図に見られるように、解析値と計算値は極めて良好な対応関係にあり、本論で示した高次モード成分の評価法は妥当なものであると言える。

7. まとめ

限界耐力計算における上部構造の応答値評価法の改善を目的として、建築物の塑性化に伴うモード形の変化を考慮できるモード適応型非線形荷重増分解析法を用いた等価1自由度系縮約法および多自由度系の地震応答結果を用いた振動モード分解による等価1自由度

図12 12層フレームの層間変形時刻歴に対する予測精度

図13 4層フレームの層せん断力-層間変形関係に対する予測精度

系縮約法をそれぞれ示し、等価1自由度系の地震応答特性および高次モードに起因する残余応答成分の評価法を検討した。

本研究で得た知見は以下のように要約できる。

- (1) 地震応答中の多層建築物では、ある時点までに経験した等価1自由度系の最大応答変形時に相当する時刻の振動モードは、概ね当該時刻における1次振動モードに一致する。
- (2) ベースシアから1次モードに対応するせん断力成分を差し引いた残余せん断力は地動の加速度と概ね比例関係にあり、2次モード成分と3次モード以上の高次モード成分の和として式(33)によって評価できる。
- (3) 各層における層せん断力の時刻歴は式(35)によって評価できる。
- (4) 全体応答から1次モード成分を取り除いた高次モード応答系では、それを縮約した等価1自由度系（残余等価1自由度系）の最大応答変形時に相当する時刻において、等価質量の最も大きな2次モードが支配振動モードになる。
- (5) 残余等価1自由度系の最大応答変形時に相当する時刻における高次モード応答系の刺激関数は式(46)によって評価できる。
- (6) 残余等価1自由度系の応答変位の時刻歴は式(49)によって評価できる。
- (7) 各層における層間変形の時刻歴は式(50)によって評価できる。

謝 辞

株式会社藤木工務店・松本和行博士には、本論で示した4層および12層鉄筋コンクリート造フレームの解析に際してご協力頂いた。ここに、深甚なる謝意を表する次第である。

参考文献

- 1) Shibata A. and Sozen M.A.: Substitute-Structure Method for Seismic Design in R/C, Journal of the Structural Division, Proceedings of ASCE, vol.102, No. ST1, pp.1-18, 1976.1
- 2) 柴田明徳: 最新耐震構造解析, 最新建築学シリーズ9, 森北出版, 342pp., 1981.6
- 3) 倉本洋: 限界耐力計算法の概要と応答値評価の方法, 建築雑誌, Vol.117, No.1488, pp.54-55, 2002.5
- 4) 倉本洋, 勅使川原正臣, 小鹿紀英, 五十田博: 多層建築物の等価1自由度系縮約法と地震応答予測精度, 日本建築学会構造系論文集, 第546号, pp.79-85, 2001.8
- 5) 松本和行, 倉本洋: 多層RC造建築物のモード適応型非線形荷重増分解析, コンクリート工学年次論文集, 第24巻, 第2号, pp.1111-1116, 2002.6
- 6) 滝澤寿男, 関弘義: 架構の塑性履歴応答結果に対するモード分解手法とその意義, 構造工学論文集, Vol.32B, pp.89-100, 1986.3
- 7) 国土交通省建築研究所, (財)日本建築センター: 2.5.2 RC造純ラーメンモデル, 日米共同構造実験研究「高知能建築構造システムの開発」平成12年度報告書, pp.Ⅱ-65-Ⅱ-86, 2001.3
- 8) 壁谷澤寿海: 鉄筋コンクリート壁フレーム構造の終局型耐震設計法に関する研究, 東京大学学位請求論文, 387pp., 1985.4
- 9) 日本建築学会: 鉄筋コンクリート造建物の終局強度型耐震設計指針・同解説, 340pp., 1990.11
- 10) 滝澤寿男: 梁端型RC架構の動的機構形成時に生じる非降伏部位での応力ピーク値の特定, 日本建築学会構造系論文集, No.389, pp.66-77, 1988.7
- 11) 松森泰造, 小谷俊介, 塩原等, 壁谷澤寿海: 鉄筋コンクリート造建物の地震最大応答の推定方法 - 漸増荷重解析による最大応答の分布の評価方法 -, 日本建築学会構造系論文集, 第576号, pp.119-123, 2004.2
- 12) 倉本洋: 4. 等価1自由度系縮約と応答値評価, 限界耐力計算を展望する(耐震計算法の課題をさぐる), 2003年度日本建築学会大会(東海)構造部門(耐震構造性能評価法検討)パネルディスカッション資料, 日本建築学会構造委員会, pp.29-37, 2003.9

(2003年10月24日原稿受理, 2004年2月23日採用決定)