混合主成分分析による部材断面表現を用いた鋼構造骨組の最適設計法

OPTIMUM DESIGN METHOD OF STEEL BUILDING FRAMES
USING EXPRESSION OF A MEMBER SECTION BASED ON MIXTURES OF
PROBABILISTIC PRINCIPAL COMPONENT ANALYZERS

山川 誠*, 吉富信太*, 上谷宏二**

Makoto YAMAKAWA, Shinta YOSHITOMI and Koji UETANI

A method is proposed for expressing reduced member dimensions of an optimization problem. This method is based on mixture model for probabilistic principal component analyzers for feature extraction of given member section list, whose parameter can be determined using an expectation-maximization algorithm. In this paper, a new efficient method enables to find an optimum set of member sections of the steel building frames so that total weight would be minimum subject to constraints on interstory drifts under design spectrum-compatible earthquakes.

Keywords : *steel building frames, minimum weight design, response analysis, rolled steel, mixtures of probabilistic principal component analyzers*

鋼構造骨組, 最小重量設計, 応答解析, ロール材, 混合主成分分析

1. はじめに

鋼構造建築骨組を対象として, 構造設計を論理的に行うための研究が数多くなされているにも関わらず, 実務の構造設計にはあまりとりいれられていない現状にある. その理由の一つとして, 設計者が望むような形での論理化がなされていないことが考えられる. 最小重量設計ではわずかしきかわらない目的関数の下で許容解が多数存在することがしばしばあるが, 設計においては必ずしも正確な大域的最適解が必要とされるわけではない. そこでは, 建設可能であるような性質のよい局所最適解を効率的に求められる手法が望まれる.

構造設計の実務に用いられる鋼材として, ロール材とよばれる規格品と, 任意の寸法で製作する溶接組み立て材 BH (Built UP H) や BB (Built UP Box) がある. BH や BB は加工手間が大きいいため, 現状の実務設計ではできるだけロール材から部材選択を行いたいという要請がある.

与えられた有限個の種類の H 形鋼材断面で構成された部材断面集合を部材断面リストとする. 既往の研究では, ロール材を想定して部材断面性能を部材断面積の関数として表現すること^{例えば 1), 2)}が多い. しかし, このような方法では, ロール材あるいは設計者が指定する部材断面リストに含まれる部材断面の特徴を十分に表現することは難しく, 部材断面形状を推測することもできない. そのため, 各層の梁せいをそろえたいといった接合部設計面からの要求などの部材断面形状に関する制約条件を考慮することは困難である. 部材せいを離散最適化問題として取り扱う方法は提案されているが³⁾,

連続変数最適化問題として精度よく取り扱うことができる方法は著者が知る限り提案されていない. 連続変数最適化問題における解が得られれば, 近傍に探索範囲を絞こむことや初期解として用いることにより, 効率的に離散最適解を導くことも可能である.

連続変数最適化問題として定式化するために, H 形鋼の部材断面を, せい, 幅, ウェブ板厚, フランジ板厚の物理的に独立な形状に関する四成分により表現し, これらをそのまま設計変数とした問題を考えることもできる. しかし, ロール材の形状に関する各成分は, 実際にはある相関関係を持って分布しており, 形状に関する各成分を独立な設計変数として扱うだけでは, ロール材としては非現実的な形状が解として得られることが予想される. また, 一つの断面に四つの設計変数が必要となってしまう.

骨組構造を対象とする最適化問題では, 計算量が多くなることが予想されるため, できるだけ少ない成分で問題を記述できることには意義がある. 本論文では, 同じ部材せいである等の共通した特徴を有する部材断面の集合を系列として, どの系列に属するかの部材断面系列指標と各系列内での主成分を部材断面系列内指標として, 部材断面の各成分の分布を確率モデルとして表現する手法を提案する. 本論文で用いる表記を Appendix1 にまとめる.

提案する部材断面表現を用いれば, 次のような利点がある. (1) 特徴を抽出した空間で変数表現を行うので, 物理的な空間での変数表現よりも小さな次元で問題を記述でき, 問題全体の自由度を減じることができる. (2) 与えられた部材断面リストにおける部材断面

* 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生・工修

** 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・工博

Graduate Student, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Graduate School of Eng., Kyoto University, M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Graduate School of Eng., Kyoto University, Dr. Eng.

の各成分分布が考慮されているので、与えられた部材断面リストに近い部材断面が解として得られる。

2. 確率モデルに基づく部材断面表現

2.1. 確率的な主成分分析モデル

確率的な主成分分析(Probabilistic Principal Component Analysis)は、隠れ変数を含んだ確率モデルを用いて主成分分析を再定式化したモデルである⁴⁾。本論文においては、部材断面における主成分を x として抽出する。

同じ部材せいである等の共通の特徴を有する部材断面の集合を部材断面系列と定義し、同一の部材断面系列に属する各部材断面の性能は指数的に比例関係にあると仮定し、対数空間で変数を考える。部材断面に関する量を d 次元の観測変数 y_p として、例えば次式のように定義する。

$$y_p = \{\ln A \quad \ln I_x \quad \ln I_y \quad \ln Z_x \quad \ln Z_y \quad \ln Z_{px} \quad \ln Z_{py}\}^T \quad (1)$$

ここで、 A 、 I_x 、 I_y 、 Z_x 、 Z_y 、 Z_{px} 、 Z_{py} は、それぞれ断面積、強軸周りおよび弱軸周りの断面二次モーメント、強軸周りおよび弱軸周りの断面係数、強軸周りおよび弱軸周りの塑性断面係数とする。

同一の部材断面系列においては隠れ変数である x の線形変換とノイズ ε_p から観測変数 y_p が生成されるとして、次式のように表す。

$$y_p = Wx + \mu_p + \varepsilon_p \quad (2)$$

ここで、 W 、 μ_p 、 ε_p は d 次元ベクトルであり、それぞれ主軸、平均、ノイズを表す。主成分分析を考える場合には、ノイズ ε_p は各成分で独立に等しく生じるとして、次の正規分布に従うとする。

$$p(\varepsilon_p) = \mathcal{N}(\varepsilon_p; 0, \sigma_p^2 I_d) \quad (3)$$

ここで、 σ_p^2 はノイズの分散、 I_d は d 次元単位行列とし、 $p(\cdot)$ は確率密度関数、 $\mathcal{N}(\cdot; \mu, \Sigma)$ は平均 μ 、共分散行列 Σ からなる多次元正規分布とする。図1に主成分分析モデルにおける W 、 μ_p の概念図を示す。(2)、(3)式より x が与えられた下での y_p の条件つき確率密度関数は

$$p(y_p | x) = \mathcal{N}(y_p; Wx + \mu_p, \sigma_p^2 I_d) \quad (4)$$

と表せる。 x は抽出される隠れ変数であるが、平均0、分散1の正規分布に従うとする。

$$p(x) = \mathcal{N}(x; 0, 1) \quad (5)$$

隠れ変数 x と観測変数 y_p の同時確率密度関数は(4)、(5)式より

$$\begin{aligned} p(x, y_p) &= p(y_p | x) p(x) \\ &= \mathcal{N}(y_p; Wx + \mu_p, \sigma_p^2 I_d) \mathcal{N}(x; 0, 1) \end{aligned} \quad (6)$$

と表せる。

図1 主成分分析と混合主成分分析

2.2. 系列を考慮した混合主成分分析モデル

部材断面リストがある一つの部材断面系列に属するとみなせるのであれば、前節までの主成分分析モデルにより部材断面を精度よく表現可能である。しかし、実際には特徴が明らかに異なり、複数の(2)式が必要となる場合が多い。よって、本論文では混合主成分分析を用いて部材断面表現を行う。混合主成分分析 (Mixtures of Probabilistic Principal Component Analysis) はデータ空間のクラスタリングと主成分分析モデルを併用することによって特徴空間の構成を行う^{4),5)}。データに複数の主軸が存在するような場合には、図1に示すように混合主成分分析が適している。混合正規分布モデルにおける様々な表現⁶⁾において、混合主成分分析モデルが多くの場合で有利なモデルの一つであることが示されている⁷⁾。

混合主成分分析による特徴抽出とあわせて、系列を考慮するための部材断面系列指標を導入して、部材断面を確率的に表現する。部材断面に関する量 y を、部材断面系列の指標とする成分 y_S と残りの d 次元の成分 y_P とにわけて表す。

$$y = \{y_S \quad y_P^T\}^T \quad (7)$$

y_P に対応する主成分を x として、特徴空間における独立な成分を y_S 、 x の二成分とする。部材せい H が部材断面系列指標 y_S 、残りの成分が y_P となるような部材断面を考え次式のように定義する。

$$y_S = \ln H \quad (8)$$

$$y_P = \{\ln A \quad \ln I_x \quad \ln I_y \quad \ln Z_x \quad \ln Z_y \quad \ln Z_{px} \quad \ln Z_{py}\}^T \quad (9)$$

ある与えられた部材断面系列 $m_i; i=1, \dots, M$ に対して、前節同様に隠れ変数 x の線形変換とノイズから観測変数 y_S 、 y_P が生成されるものとする。 y_S は部材断面系列指標であるので、同一の部材断面系列において x に関わらずほぼ等しい値となるとして、部材断面系列 m_i が与えられた下での y_S 、 y_P をそれぞれ次式のように仮定する。

$$y_S = \mu_{Si} + \varepsilon_{Si} \quad (10)$$

$$y_P = W_i x + \mu_{Pi} + \varepsilon_{Pi} \quad (11)$$

前節同様に W_i 、 μ_{Pi} 、 ε_{Pi} は d 次元ベクトルとする。ノイズ ε_{Si} 、 ε_{Pi} は次の正規分布に従うとする。

$$p(\varepsilon_{Si}) = \mathcal{N}(\varepsilon_{Si}; 0, \sigma_{Si}^2) \quad (12)$$

$$p(\varepsilon_{Pi}) = \mathcal{N}(\varepsilon_{Pi}; 0, \sigma_{Pi}^2 I_d) \quad (13)$$

隠れ変数 x は平均0、分散1の正規分布に従うとすれば、部材断面系列 m_i が与えられた下での隠れ変数 x と観測変数 y の同時確率密度関数は、系列に関する正規分布モデルと確率的な主成分分析モデルを用いて、次式のように表せる。

$$\begin{aligned} p(x, y | m_i) &= p(y_S | m_i) p(y_P | x, m_i) p(x) \\ &= \mathcal{N}(y_S; \mu_{Si}, \sigma_{Si}^2) \\ &\quad \times \mathcal{N}(y_P; W_i x + \mu_{Pi}, \sigma_{Pi}^2 I_d) \mathcal{N}(x; 0, 1) \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式の混合モデルは次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sum_{i=1}^M \pi_i p(x, y | m_i) \\ &= \sum_{i=1}^M \pi_i \{ \mathcal{N}(y_S; \mu_{Si}, \sigma_{Si}^2) \\ &\quad \times \mathcal{N}(y_P; W_i x + \mu_{Pi}, \sigma_{Pi}^2 I_d) \mathcal{N}(x; 0, 1) \} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 π_i は混合比であり、次式を満たす。

$$\sum_{i=1}^M \pi_i = 1 \quad (16)$$

m_i に対応するモデルパラメータを θ_i とし、次式のように定義する。

$$\theta_i = \left\{ \pi_i, \mu_{Si}, \sigma_{Si}^2, W_i, \mu_{Pi}, \sigma_{Pi}^2 \right\} \quad (17)$$

パラメータ全てをまとめて $\theta = \{\theta_i; i = 1, \dots, M\}$ と表す。与えられた N 種類の部材断面からなる集合を部材断面リストと呼び、部材断面リストの n 番目に登録された対数空間上の部材断面に関する量を観測変数 y_n とし、観測変数のサンプルと呼ぶ。また y_n において、 y_S 、 y_P に対応する成分をそれぞれ y_{Sn} 、 y_{Pn} と表す。(15)式より対数尤度関数は

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{n=1}^N \ln \left\{ \sum_{i=1}^M \pi_i p(x_n, y_n | m_i; \theta) \right\} \quad (18)$$

と表される (Appendix 2)。(18)式を最大化するモデルパラメータ θ が最尤推定量となり、部材断面リストに対して最も適合する確率分布である。ただし、 σ_{Si}^2 に関しては系列の分散を表す値であり、系列の領域を決めるパラメータとも解釈されるので、指定値 $\bar{\sigma}_{Si}^2$ を与えるものとする。

Newton 法や勾配法により(18)式から最尤推定量を直接求めることも可能であるが、計算が煩雑になり多くの計算量が必要とされるため、本論文では EM 法による最尤推定を行う。EM 法は観測できない隠れた変数が存在する時に最尤推定を行うための汎用手法である。各データがどのモデルから生じたかを示す確率変数 $z = \{z_i; i = 1, \dots, M\}$ を導入する。各成分 z_i は 0 か 1 の値をとり、 $z_i = 1$ は部材断面系列 m_i から観測変数が生じたことを意味する。この隠れ変数 z を用いれば、対数尤度関数は

$$\mathcal{L}_C(\theta) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^M z_{ni} \ln \{ \pi_i p(x_n, y_n | m_i; \theta) \} \quad (19)$$

と表せる。(19)式を最大化する θ は最尤推定量である。EM 法では E ステップと M ステップを逐次反復することにより、モデルパラメータ θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ が漸近的に求められる。

・E(Expectation)ステップ

観測変数のサンプルが与えられた下での対数尤度関数の条件つき期待値 $Q(\theta)$ を求める。 $Q(\theta)$ は次式となる。(Appendix 3)

$$Q(\theta) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^M R_{ni} \left\{ \ln \pi_i - \frac{1}{2} \ln \sigma_{Pi}^2 - \frac{1}{2} \langle x_{ni}^2 \rangle - \frac{1}{2\sigma_{Pi}^2} \|y_{Pn} - \mu_{Pi}\|^2 + \frac{1}{\sigma_{Pi}^2} \langle x_{ni} \rangle W_i^T (y_{Pn} - \mu_{Pi}) - \frac{1}{2\sigma_{Pi}^2} W_i^T W_i \langle x_{ni}^2 \rangle - \frac{1}{2\sigma_{Si}^2} \|y_{Sn} - \mu_{Si}\|^2 \right\} \quad (20)$$

ここで、

$$C_{xi} = \sigma_{Pi}^2 + W_i^T W_i \quad (21)$$

$$C_{yi} = \sigma_{Pi}^2 I_d + W_i W_i^T \quad (22)$$

$$\langle x_{ni} \rangle = E(x | y_n, m_i) = C_{xi}^{-1} W_i^T (y_{Pn} - \mu_{Pi}) \quad (23)$$

$$\langle x_{ni}^2 \rangle = E(x^2 | y_n, m_i) = \sigma_{Pi}^2 C_{xi}^{-1} + \langle x_{ni} \rangle^2 \quad (24)$$

$$R_{ni} = \frac{\pi_i \mathcal{N}(y_S; \mu_{Si}, \sigma_{Si}^2) \mathcal{N}(y_P; \mu_{Pi}, C_{yi})}{\sum_{j=1}^M \pi_j \mathcal{N}(y_S; \mu_{Sj}, \sigma_{Sj}^2) \mathcal{N}(y_P; \mu_{Pj}, C_{yj})} \quad (25)$$

である。

・M(Maximization)ステップ

対数尤度関数の期待値である $Q(\theta)$ を最大化するようにパラメータ θ を更新する。このようなパラメータ θ は、(16)式を制約条件とするラグランジュ乗数法により求められる。パラメータ間には相互関係が存在するが、本研究では一般化 EM 法により、次式のように更新を行う。

$$\hat{\pi}_i = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_{ni} \quad (26)$$

$$\hat{\mu}_{Pi} = \frac{\sum_{n=1}^N R_{ni} \{y_{Pn} - \langle x_{ni} \rangle W_i^T\}}{\sum_{n=1}^N R_{ni}} \quad (27)$$

$$\hat{\mu}_{Si} = \frac{\sum_{n=1}^N R_{ni} y_{Sn}}{\sum_{n=1}^N R_{ni}} \quad (28)$$

$$\hat{W}_i = \frac{\sum_{n=1}^N R_{ni} \langle x_{ni} \rangle (y_{Pn} - \hat{\mu}_{Pi})}{\sum_{n=1}^N R_{ni} \langle x_{ni}^2 \rangle} \quad (29)$$

$$\hat{\sigma}_{Pi}^2 = \frac{\sum_{n=1}^N R_{ni} \{ \|y_{Pn} - \hat{\mu}_{Pi}\|^2 - 2 \langle x_{ni} \rangle \hat{W}_i^T (y_{Pn} - \hat{\mu}_{Pi}) + \langle x_{ni}^2 \rangle \hat{W}_i^T \hat{W}_i \}}{\sum_{n=1}^N R_{ni}} \quad (30)$$

ここで、 $\hat{\pi}_i$ 、 $\hat{\mu}_{Pi}$ 、 $\hat{\mu}_{Si}$ 、 $\hat{W}_i$ 、 $\hat{\sigma}_{Pi}^2$ は更新されたパラメータを表す。各パラメータが収束するまで、E ステップと M ステップを繰り返すことにより、最尤推定量 $\hat{\theta} = \{\hat{\theta}_i; i = 1, \dots, M\}$ が得られる。ここで $\hat{\theta}_i$ は次式とする。

$$\hat{\theta}_i = \left\{ \hat{\pi}_i, \hat{\mu}_{Si}, \hat{\sigma}_{Si}^2, \hat{W}_i, \hat{\mu}_{Pi}, \hat{\sigma}_{Pi}^2 \right\} \quad (31)$$

(15)式に(31)式を用いて推定された確率分布は次式のようになる。

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^M \hat{\pi}_i \mathcal{N}(y_S; \hat{\mu}_{Si}, \hat{\sigma}_{Si}^2) \times \mathcal{N}(y_P; \hat{W}_i x + \hat{\mu}_{Pi}, \hat{\sigma}_{Pi}^2 I_d) \mathcal{N}(x; 0, 1) \quad (32)$$

(32)式から条件つき期待値 $E(y_P | y_S, x)$ が次式のように得られる。

(Appendix1)

$$E(y_P | y_S, x) = \frac{\sum_{i=1}^M \hat{\pi}_i \mathcal{N}(y_S; \hat{\mu}_{Si}, \hat{\sigma}_{Si}^2) \mathcal{N}(x; 0, 1) \{ \hat{W}_i x + \hat{\mu}_{Pi} \}}{\sum_{i=1}^M \hat{\pi}_i \mathcal{N}(y_S; \hat{\mu}_{Si}, \hat{\sigma}_{Si}^2) \mathcal{N}(x; 0, 1)} \quad (33)$$

(33)式は確率的定式化に基づいた部材断面表現であり、部材断面系列指標 y_S 、および部材断面系列内指標 x が与えられた下での部材断面に関する量 y_P を表現する関数と解釈できる。

また、部材幅も観測される性能量として y_P に含めれば、隠れ変数に対応する期待値を得るように定式化することも可能である。

2. 3. 最適設計問題

部材断面を表現する関数である(33)式を用いて、次のような動的応答を制約条件とした鋼構造建築骨組の最適設計問題を考える。

最適設計問題

指定された設計用地震動に対して、指定された応答評価法による最大層間変形角制約条件

$$\delta_{i\max}(x_D) \leq \bar{\delta}_i \quad (34)$$

を満足し、かつ目的関数（部材総重量）

$$f(x_D) = \rho \sum_j A_j(x_D) l_j \quad (35)$$

を最小化するような設計変数分布 x_D を求めよ。

ここで、 $\delta_{i\max}(x_D)$ は第 i 層に生じる最大層間変形角を表し、 $A_j(x_D)$ および l_j はそれぞれ、第 j 部材の断面積および材長を表し、 ρ は鉄骨比重を表す。各部材において、部材断面系列指標 y_S 、および部材断面系列内指標 x を設計変数として選び、これらをまとめて設計変数分布 $x_D = \{x_{Dj}\}$ とする。

本手法による部材断面表現は、設計変数に対して部材断面性能が滑らかではあるが非単調な関数となるため、最適化問題の構造が複雑となり、局所最適解に陥りやすくなることが予想される。しかし、制約条件を満足する建設可能な性質のよい局所最適解であれば、目的とする設計の論理化は十分達成されると考える。

3. 数値解析例

本手法を適用した数値解析例を以下に示す。

3.1. 部材断面確率モデル

全部材に H 形鋼を使用することを想定し、梁はハイパービーム⁸⁾、柱は広幅系列⁸⁾に含まれる断面を対象とする。ただし、本例では各性能量に関して対数空間上で平均が 0、分散が 1 となるようにデータを標準化して用いる。

梁部材に関しては、各層で部材せいをそろえることを前提として部材せい H を部材断面系列指標 y_S として扱い、 y_P に対応する x とあわせて設計変数とする。柱は部材せい H を考慮せずに y_P に対応する x のみを設計変数とする。よって、 y_S および y_P は、(8)、(9)式に定義した通りとする。第 j 部材に関する量に j をつけて設計変数を表せば、柱、梁ではそれぞれ次のように表せる。

第 j 部材が梁の場合の設計変数: $x_{Dj} = \{y_{Sj}, x_j\}$

第 j 部材が柱の場合の設計変数: $x_{Dj} = \{x_j\}$

同じ部材せいとなる断面の集合ごとに主成分分析を行って得られたパラメータを初期値として、EM ステップを 100 回繰り返し最尤推定を行った。 $\bar{\sigma}_{Si}^2$ は仮想的な系列の分散であり、部材断面リスト全体から求められる部材せい H に関する標準偏差を σ_{S0} として、 $\bar{\sigma}_{Si} = 0.3\sigma_{S0}$ と設定した。

本例題において、(32)式から得られる確率分布 $p(x, y)$ の例として、ハイパービームに関する周辺密度関数 $p(H, A)$ 、 $p(H, I_x)$ の等高線をそれぞれ図 2、3 に部材断面リストとあわせて示す。(Appendix1)

(33)式から得られる期待値 $E(y_P | y_S, x)$ の例として、 $E(A | H, x)$ 、 $E(I_x | H, x)$ 、 $E(Z_x | H, x)$ 、 $E(A, I_x | H, x)$ 、 $E(A, Z_x | H, x)$ を、それぞれ図 4 から図 8 に部材断面リストとあわせて示す。ただし、 $400 \leq y_S (= H) \leq 900$ 、 $-2 \leq x \leq 2$ としている。なお、 $p(x) = \mathcal{N}(x; 0, 1)$ であるので、 $-2 \leq x \leq 2$ の範囲では約 95% の確率で与えられた部材断面が含まれることになる。また、図中の部材断面リストに含まれる各断面の隠れ変数 x は部材断面性能に関する

量 y が与えられた下での条件つき期待値 $E(x | y)$ として求めている。(Appendix4) 図 4 から図 8 より、与えられた部材断面リストに対して $\bar{\sigma}_{Si} = 0.3\sigma_{S0}$ により、 $E(y_P | y_S, x)$ が部材断面を表現する良好な関数として得られていることが確認される。

図 2 $p(H, A)$ 図 3 $p(H, I_x)$ 図 4 $E(A | H, x)$ 図 5 $E(I_x | H, x)$ 図 6 $E(Z_x | H, x)$ 図 7 $E(A, I_x | H, x)$ 図 8 $E(A, Z_x | H, x)$

なお、 $\bar{\sigma}_{Si} = 0.3\sigma_{S0}$ 以外の値を設定することもできる。 $\bar{\sigma}_{Si}$ の値を小さくすれば、他の系列から受ける影響が少なくなり、よりデータの特徴に適合した分布関数が得られる。ただしあまり小さな値に設定すると分布関数が滑らかではなくなり、多峰性が強まり、局所最適解に陥りやすくなることが想定される。このように考えれば、 $\bar{\sigma}_{Si}$ は滑らかさに関するパラメータとも解釈される。比較のために、 $\bar{\sigma}_{Si} = 0.15\sigma_{S0}$ と設定して得られた $E(A|H, x)$ 、 $E(I_x|H, x)$ を図 9、10 にそれぞれ示す。より断面の特徴に適合しているが、滑らかではない分布が得られていることがわかる。

図 9 $E(A|H, x)$ 図 10 $E(I_x|H, x)$

3.2. 解析モデル

図 11 に示す 10 層 3 スパンの平面弾性骨組モデルを対象とし、柱部材は 2 層ごとに、梁部材は 1 層ごとに対称に位置する部材を等しいとし、さらに 2 層ごとに梁せいが等しくなるようにグルーピングを行う。よって設計変数を、柱部材において部材断面系列内指標 x が 10 個、梁部材において部材断面系列内指標 x が 20 個、部材断面系列指標 $y_S (= H)$ が 5 個の計 35 個とする。

図 11 10 層 3 スパン平面弾性骨組モデル

設計用地震動としてレベル 1 に相当するようにスケーリングした El Centro 1940 NS 記録地震波、Taft 1952 EW 記録地震波、および Newmark and Hall による Design Spectrum を簡略化したものを採用する。応答評価法として、一次固有モードのみを考慮した応答スペクトル法を採用し、最大層間変形角を 1/200 以下とする。また、用いる応答スペクトルの減衰定数は 2% とする。

なお、本例題では解析に用いる断面性能は A 、 I_x のみに限られるが、その他の断面性能に関する情報も、例えば Z_x に関して図 6、8 に示したように得られており、その他の断面性能が必要となるような解析を行うことも可能である。

3.3. 最適解

本例題では、逐次二次計画法により最適解を得た。柱、梁それぞれについて、得られた最適解と部材断面リストの分布を、図 12 から図 16 に示す。図 12 から図 16 より、部材断面リストの分布に近い最適解が得られていることが確認される。図 14 より、断面積に対して断面二次モーメントが大きな部材断面が解として多く得られている。また、異なる初期値とした場合でも、求められた最適解の目的関数値はほぼ等しい値となったので、得られた最適解は劣悪な局所最適解ではないことが予想される。

得られた最適解が断面の離散化選択にも有用であることを確認するために、最適解に対して、各断面の H 、 I_x がそれぞれ大きくなり、かつ A の変動量が最小となる断面を選択する。ただし、 H は隣の系列より大きくはしないとする。ここでは、このようにして得られた離散解をラウンドアップ解と呼ぶ。ラウンドアップ解と部材断面リストの分布を図 17、18、19 に示す。

図 12 梁の最適解 (H, A) 図 13 梁の最適解 (H, I_x) 図 14 梁の最適解 (A, I_x) 図 15 柱の最適解 (A, I_x) 図 16 梁の最適解
(A, I_x, H) 図 17 梁のラウンドアップ解
(A, I_x, H)

図 18 梁のラウンドアップ解
(A, I_x)

図 19 柱のラウンドアップ解
(A, I_x)

図 14, 15, 16 と図 17, 18, 19 を比較することにより、ラウンドアップ解と最適解では断面の分布が近いものとなっていることがわかる。

最適解とラウンドアップ解における総体積と層間変形角（制約条件）をそれぞれ表 1 に示す。部材せいを含めた複雑なグルーピングを考慮した本例題において、このような単純な断面選択方法でも、12%程度の目的関数の増加で制約条件をほぼ満足する解が得られている。本手法により得られる最適解を初期解として、より効率的な離散化アルゴリズムを適用すれば、厳密に制約条件を満たしたより良好な離散解が得られることが予想される。また、必ずしも離散化アルゴリズムを適用しなくとも、部材断面系列指標 y_s と部材断面系列内指標 x が各断面ごとに得られているので、これらを基に設計者が部材断面を決定することも容易である。

表 1 最適解とラウンドアップ解の比較

		最適解	ラウンドアップ解
総体積 [m³]		10.10	11.34
層間 変形角 $\times 10^{-3}$ [rad]	1F	3.74	3.27
	2F	5.00	4.53
	3F	5.00	4.58
	4F	5.00	4.61
	5F	5.00	4.68
	6F	4.90	4.70
	7F	5.00	4.82
	8F	4.70	4.61
	9F	5.00	5.09
	10F	3.65	3.73

4. 結論

与えられた H 形鋼材の部材断面リストに関して、確率的な定式化に基づき部材断面を表現し、最適解を得る手法を提案した。

(1) 与えられた H 形鋼材の部材断面リストの特徴を系列に着目して、確率的に定式化することにより、物理的に独立と考えられる設計変数空間よりも低次元な特徴空間で最適化問題を考え、問題の自由度を小さくできることを示した。例題より得られる最適解は部材断面リストの特徴を精度よく表現していることを確認した。

(2) 部材断面性能と部材断面形状の関係を考慮して変数表現をした。本手法を用いれば、各層ごとに梁せいをそろえろといった部材

断面形状に関する条件も考慮可能である。このような条件を考慮した場合には、断面積に対して断面二次モーメントが大きくないような部材断面が最適解となることがある。

(3) 本手法を用いれば、それぞれの部材断面がどのような断面とすればよいかの指標が得られる。設計者はこれらを設計の判断材料として用いることができる。

謝辞

山崎 雅弘博士（京都大学講師）から貴重な助言を頂戴した。ここに記して謝意を表す。本研究の一部は（社）日本鉄鋼連盟 平成 15 年度建築鋼構造研究奨励金制度による援助を受けて行われた。

参考文献

- 1) 中村恒善：建築骨組の最適設計，丸善，1980
- 2) 辻聖晃，竹脇出，上谷宏二：せん断型モデルの応答制約設計解を用いた建築骨組の最適設計法，日本建築学会近畿支部研究報告集，pp.117-120，1999
- 3) 澤田樹一郎，周岩，松尾彰，中村雄治：部材せい設計変数を考慮した鋼構造建築骨組の最小重量設計に関する研究，日本建築学会構造系論文集，No.544，pp.133-199，2001.6
- 4) Tipping, M.E., Bishop, C.M.: Mixtures of Probabilistic Principal Component Analyzers, Neural Computation, Vol.11, pp.443-482, 1999
- 5) 変分法的ベイズ推定による混合主成分分析：大羽成征，佐藤雅昭，石井信，電子情報通信学会論文誌，Vol.J85-D-II, No.6, pp.1055-1064, 2002
- 6) Ghahramani, Z., Hinton, G.E.: The EM algorithm for mixtures of factor analyzers, Technical Report CRG-TR-96-1 [http://www.gatsby.ucl.ac.uk/~zoubin/papers/tr-96-1.ps.gz], Dept. of Comp. Sci., Univ. of Toronto, 1996
- 7) Moerland, P.: A comparison of mixture models for density estimation, Proceedings of the International Conference on Artificial Neural Networks (ICANN'99), pp.15-30, 1999
- 8) 新日本製鐵株式会社：建設用資材ハンドブック，2000

Appendix 1

本論文で用いる表記を以下にまとめる。確率変数 (X, Y) の同時確率密度関数を $p(x, y)$ とする。 X , Y のそれぞれの確率密度関数 $p(x)$, $p(y)$ は、興味のない変数について累積（積分）をとることで得られる。

$$p(x) = \int p(x, y) dy, \quad p(y) = \int p(x, y) dx \quad (A1), (A2)$$

このようにして得られる $p(x)$, $p(y)$ を周辺密度関数とよぶ。 $X = x$ であることが与えられた下での Y の確率密度関数を Y の条件つき確率密度関数とよび、 $p(y|x)$ と表す。条件つき確率密度関数 $p(y|x)$ は、ベイズの定理より次式のように求めることができる。

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)} = \frac{p(x, y)}{\int p(x, y) dy} \quad (A3)$$

条件つき確率密度関数 $p(y|x)$ に関して、 $X = x$ であることが与えられた下での Y の期待値（平均値）を $E(Y|x)$ と表す。 $E(Y|x)$ は次式のように定義される。

$$E(Y|x) = \int yp(y|x) dy = \frac{\int yp(x, y) dy}{\int p(x, y) dy} \quad (A4)$$

Appendix 2

確率密度関数 $p(y)$ がパラメータ θ によって定まる場合には, $p(y; \theta)$ と表す. 確率モデルでは, 観測変数を確率変数の実現値とみなし, データ $Y = \{y_n; n = 1, \dots, N\}$ を観測した時,

$$L(\theta) = p(Y; \theta) = \prod_{n=1}^N p(y_n; \theta) \quad (\text{A5})$$

を θ の尤度関数と呼ぶ. 確率の大きな事象ほど起こりやすいのだから, $L(\theta)$ が最大となるようにパラメータ θ の値を決めればよい. $L(\theta)$ の代わりに, 対数尤度関数

$$\mathcal{L}(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{n=1}^N \ln p(y_n; \theta) \quad (\text{A6})$$

を最大にしてもよい. このようにパラメータ θ を決定する方法を最尤法 (maximum likelihood method) と呼び, $L(\theta)$ または $\mathcal{L}(\theta)$ を最大とするような θ を最尤推定量と呼ぶ.

Appendix 3

(14)式より, 観測変数 y に関する周辺密度関数は次式のように得られる.

$$\begin{aligned} p(y | m_i) &= \int p(x, y | m_i) dx \\ &= \mathcal{N}(y_S; \mu_{Si}, \sigma_{Si}^2) \mathcal{N}(y_P; \mu_{Pi}, C_{yi}) \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

ここで, C_{yi} は(22)式で定義される. (14), (A7)式より, 観測変数 y および部材断面系列 m_i が与えられた下での隠れ変数 x の条件つき確率密度関数はベイズの定理より次式となる.

$$\begin{aligned} p(x | y, m_i) &= \frac{p(x, y | m_i)}{p(y | m_i)} \\ &= \mathcal{N}(x; C_{xi}^{-1} W_i^T (y_P - \mu_{Pi}), \sigma_{Pi}^2 C_{xi}^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

ここで, C_{xi} は(21)式で定義される. y を観測した下での m_i の事後分布 $p(m_i | y)$ はベイズの定理より, 次式となる.

$$p(m_i | y) = \frac{p(y, m_i)}{p(y_n)} = \frac{\pi_i p(y | m_i)}{\sum_{j=1}^m \pi_j p(y | m_j)} \quad (\text{A9})$$

なお, (25)式では, $R_{ni} = p(m_i | y_n)$ として表している.

観測変数のサンプル $\{y_n; n = 1, \dots, N\}$ が与えられた下での対数尤度関数 $\mathcal{L}_C(\theta)$ の条件つき期待値 $Q(\theta)$ は, 現在のパラメータ推定値を $\theta^{(t)}$ として, 次式のように表される.

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^M p(m_i | y_n; \theta^{(t)}) \\ &\quad \times \int p(x | y_n, m_i; \theta^{(t)}) \ln \{ \pi_i p(x_n, y_n | m_i; \theta) \} dx \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

(A10)式に(A7), (A8), (A9)式を用いることにより, (20)式の表現が得られる. これは, 現在のパラメータ推定値 $\theta^{(t)}$ に基づいて算出される隠れ変数の事後分布(A8), (A9)式によって, 不完全情報を暫定的に補っていると解釈できる.

Appendix 4

観測変数 y が与えられた下での隠れ変数 x の条件つき期待値は次式となる.

$$\begin{aligned} E(x | y) &= \int x p(x | y) dx \\ &= \int x \frac{p(x, y)}{p(y)} dx \\ &= \int x \frac{\sum_{i=1}^M \pi_i p(x | y, m_i) p(y | m_i)}{\sum_{i=1}^M p(y | m_i)} dx \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

ここで, (A7)(A8)式を用いれば次式が得られる.

$$E(x | y) = \frac{\sum_{i=1}^M \pi_i C_{xi}^{-1} W_i^T (y_P - \mu_{Pi}) \mathcal{N}(y_S; \mu_{Si}, \sigma_{Si}^2) \mathcal{N}(y_P; \mu_{Pi}, C_{yi})}{\sum_{i=1}^M \pi_i \mathcal{N}(y_S; \mu_{Si}, \sigma_{Si}^2) \mathcal{N}(y_P; \mu_{Pi}, C_{yi})} \quad (\text{A12})$$

(2004年 3月10日原稿受理, 2004年 6月 7日採用決定)