位相最適化手法を用いた CFRP による中空スラブの最適補強

OPTIMUM REINFORCEMENT OF VOID SLAB BY CFRP
USING TOPOLOGY OPTIMIZATION METHOD

藤井大地*, 小泉智彦**, 森村 毅***

Daiji FUJII, Tomohiko KOIZUMI and Tsuyoshi MORIMURA

Since the possibility of Tokai or Nankai earthquakes, the reinforcement of the buildings is very important. The method using the CFRP tape is effective for the reinforcement of the floor slab. However, since it is relatively expensive, it is necessary to efficiently affix for the CFRP tape. Therefore, in this paper, the topology optimization method (density approach) is used in order to obtain the optimum layout of the CFRP tape. For this purpose, the FEM program for analyzing the laminate plate is developed, and the density approach with CONLIN optimizer is applied. In this program, the solid element based on the hybrid method is used instead of the conventional plate element. In this study, the void slab is used for the floor structure. The effectiveness of the proposed method is shown by the numerical examples and the comparison with the experiment.

Keywords : CFRP, topology optimization, void slab, laminate plate, density approach, hybrid method.

炭素繊維板, 位相最適化, 中空スラブ, 積層板, 密度法, ハイブリッド法

1. はじめに

近年, 東海沖地震や南海沖地震の可能性が高まる中, 古い建物の耐震補強が急務となってきた。このような背景から, 最近, テープ状の炭素繊維樹脂 (CFRP) をコンクリートに接着することで補強を行う方法が開発された。森村ら^{1,2)}は, この方法を中空スラブに適用するため, CFRP 補強を施した中空スラブ試験体の強度, 振動特性に対する実験的研究を行っている。これらの一連の実験において, CFRP テープの貼り方は, 工学的判断にもとづいて決められてきたが, 実験を効率的に進めるためには, 解析的に CFRP テープの貼り付け位置を特定する方法が望まれる。また, CFRP テープは, 比較的高価な材料であるため, 実際の施工においても, 必要最小限の量で, 効率的に耐震補強を行うことが求められる。そこで, 本研究では, CFRP テープの最適な貼り付け位置を求める方法として, 連続体の位相最適化手法を適用することを提案する。

位相最適化手法は, 1988 年に Bendsøe と Kikuchi³⁾によって提案された方法であり, 設計対象となる領域を均一な要素密度を有する有限要素で覆い, 最適化手法によって, 必要な要素密度を高くし, 不必要な要素密度を低くすることによって, 最適な形状を浮かび上がらせる方法である。当初は, 数学的な整合性を持たせるために, 要素密度を材料のミクロ構造の穴の大きさで制御する均質化法が用いられたが, 最近では, 要素密度を直接設計変数とする密度法^{4)~6)}が, 一般によく用いられている。

また, 板曲げ問題における位相最適化手法は, 1992 年に鈴木と菊池⁷⁾が, 均質化法を用いた単層板の位相最適化手法を示してい

る。また, 2001 年に Belblidia ら¹⁰⁾は, ミンドリン-ライスナー理論にもとづく方法で, 1 層または 3 層板の位相最適化を行っている。また, 2002 年には, Pedersen¹¹⁾が, マイクロフォンの設計に用いるためプレストレスの加わる積層板の位相最適化を行っている。また, 著者の一人である藤井ら¹²⁾は, 平面シェル要素を用いてシェル構造の形状と位相の同時最適化手法を示している。

位相最適化手法を CFRP テープの最適配置を求める問題に適用するためには, スラブを積層板としてモデル化し, その表層部分全面に CFRP 材料を仮定し, 体積を絞り込むことによって最適位相を求めればよい。ただし, この積層板モデルでは, CFRP の有無によって, 要素の板厚方向の中立軸が変化するため, 板曲げ理論にもとづく要素の適用は煩雑となる。したがって, 本研究では, ソリッド要素を用いた積層板解析プログラムを新たに開発する。しかしながら, ソリッド要素として, 通常の 8 節点アイソパラメトリック要素を用いると, 要素内で応力が一定となるため, 板の曲げモーメント応力を近似するために, 板厚方向に多くの分割数を必要とする。したがって, ここでは, 変位も応力もどちらも線形関数に仮定するハイブリッド法 (応力仮定法¹³⁾) による要素を用いる。本要素の採用により, 解析自由度を増やすことなく, 通常の板曲げ要素と同じ分割数で, ほぼ同等の精度を得ることができる。また, 位相最適化手法としては, 密度法を用い, 最適化問題の解法としては, 計算効率のよい CONLIN 法^{14), 15), 8)}を用いる。

以下, 本論文第 2 章では, ソリッド要素による積層板の解析法について述べる。第 3 章では, CFRP テープの最適配置を求めるた

* 近畿大学工学部 助教授・博士(工学)

** 近畿大学工学部 大学院生

*** 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

Assoc. Prof., School of Engineering, Kinki University, Dr. Eng.

Graduate Student, School of Engineering, Kinki University

Prof., School of Engineering, Kinki University, Dr. Eng.

めの位相最適化問題の定式化と解法について述べる。第4章では、CFRP補強を行う中空スラブ試験体を対象として、位相最適化手法により最適なCFRPテープの配置を求め、これと工学的判断にもとづく基本的な配置モデルとの比較を行う。また、実験結果を考察することにより、本提案手法の有効性を検討する。最終第5章では、以上のまとめを述べる。

2. 積層板の解析法

2.1 要素方程式の定式化¹³⁾

CFRP補強を施した積層板を解析する場合、図1に示すように、CFRPで補強されている部分とそうでない部分の中立軸が異なる。したがって、板曲げ要素を用いると、プログラミングが煩雑になる。したがって、本研究では、積層板を解析するための要素として、3次元ソリッド要素を用いる。しかしながら、通常の8節点アイソパラメトリック要素では、要素内で応力が一定であるため、図2に示すように、曲げに対する応力を再現するために、少なくとも板厚方向に8分割程度分割することが必要となる。

図1 CFRP補強による中立軸のずれ

図2 曲げモーメント応力分布 (要素内一定応力)

そこで、ここでは、要素内の変位も応力も共に線形に仮定するハイブリッド要素¹³⁾を用いる。この方法では、要素内の変位と座標は通常アイソパラメトリック要素と同様に次式で仮定する(図3参照)。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= N(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}^e & x &= N(\xi, \eta, \zeta) x^e \\ v(x, y, z) &= N(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{v}^e & y &= N(\xi, \eta, \zeta) y^e \\ w(x, y, z) &= N(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{w}^e & z &= N(\xi, \eta, \zeta) z^e \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

ここに、 u, v, w は x, y, z 方向の変位、 N は形状関数、 $\mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e, \mathbf{w}^e$ と x^e, y^e, z^e は、節点変位と節点座標のベクトルであり、具体的には次のように表される。

$$\mathbf{u}^e = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8] \quad (3)$$

$$\mathbf{v}^e = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7 \ v_8]$$

$$\mathbf{w}^e = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5 \ w_6 \ w_7 \ w_8]$$

$$\mathbf{x}^e = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8] \quad (4)$$

$$\mathbf{y}^e = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7 \ y_8]$$

$$\mathbf{z}^e = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5 \ z_6 \ z_7 \ z_8]$$

また、応力も次式のように仮定する。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} + c_{12}y + c_{13}z + c_{14}yz \\ c_{21} + c_{22}z + c_{23}x + c_{24}zx \\ c_{31} + c_{32}x + c_{33}y + c_{34}xy \\ c_{41} + c_{42}z \\ c_{51} + c_{52}x \\ c_{61} + c_{62}y \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (5)$$

図3 8節点アイソパラメトリック要素

ただし、 $c_{11}, \dots, c_{62}$ は未定係数を表す。

この場合、(1)式と(5)式から2つの歪みベクトル

$$(1) \text{式から得られる歪み} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (6)$$

$$(5) \text{式から得られる歪み} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (7)$$

が得られる。ただし、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は歪みベクトル、 $\mathbf{B}$ は歪み-変位マトリクス、 $\mathbf{D}$ は弾性マトリクスである。これら2つの歪みを適合させるため、次式の条件を課す。

$$\iiint_{\Omega^e} \delta \boldsymbol{\sigma}^T [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{d}^e] d\Omega = 0 \quad (8)$$

ただし、 Ω^e は要素の領域を表す。

(8)式の $\boldsymbol{\sigma}$ に(5)式を代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{M}_b \mathbf{d}^e \quad (9)$$

ただし、

$$\mathbf{M}_s = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s d\Omega, \quad \mathbf{M}_b = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{B} d\Omega \quad (10)$$

また、(7)式より、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_s \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{M}_b \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}^e \quad (11)$$

したがって、要素剛性マトリクスは次式より得られる。

$$\mathbf{k}^e = \iiint_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} d\Omega = \mathbf{M}_b^T \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{M}_b \quad (12)$$

(12)式の剛性マトリクスを用いる解析では、未知数は通常アイソパラメトリック要素と同じ $\mathbf{d}^e$ となる。したがって、解析自由度は同じで、しかも、(5)式で示されるように垂直応力が座標に関して線形で仮定されるため、図2に示されるような応力分布は1要素で再現できる。

2.2 中空スラブの解析

中空スラブは、直交異方性板にモデル化することによって解析する。この場合、3次元たわみ性マトリクス $\mathbf{D}^{-1}$ は次のように表される。

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ & & & & 1/G_{23} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 1/G_{31} \end{bmatrix} \quad (13)$$

鉄筋コンクリート中空スラブにおいては、(13)式の各成分は次のように計算される^{16),17)}(図4参照)。まず、ヤング係数は、

$$\begin{aligned} E_1 &= \left[1 - (\phi'/t)^3 \right] + 6p_f' (1 - \nu^2) (E_c/E_c - 1) (1 - 2d_f'/t)^2 E_c \\ E_2 &= \left[1 - (\phi'/t)^3 \right] + \left\{ 1 - (L/l_p - 1) \phi'/L \right\} (1 - \nu^2) (\phi'/t)^3 \\ &\quad + 6p_f' (1 - \nu^2) (E_c/E_c - 1) (1 - 2d_f'/t)^2 E_c \\ E_3 &= (l_p - \phi') E/l_p \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、 ϕ' は、円形鋼管断面と断面積の等しい正方形の1辺の長さ ($\phi' = \sqrt{\pi\phi^2/4}$)、 ϕ は中空鋼管の直径、 t はスラブ厚、 p_x^*, p_y^* は x, y 方向の引張鉄筋比、 d_x^*, d_y^* は x, y 方向の鉄筋のかぶり厚、 ν はコンクリートのポアソン比、 E_s, E_c, E は鉄筋、コンクリート、鉄筋コンクリートのヤング係数、 l_p は中空鋼管の中心間距離、 L は正方形スラブの1辺の長さを表す。また、せん断弾性係数は、

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{(t - \phi')G/t\kappa + (tl_p - \phi'^2)G/tl_p\kappa}{2} \\ G_{23} &= \frac{1}{(l_p - \phi')} \cdot \frac{1}{\phi'^2/12EI_x + \kappa/G(l_p - \phi')} \\ G_{31} &= \frac{G}{\kappa} \cdot \frac{\phi'(l_p - \phi')}{l_p t} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 G はコンクリートのせん断弾性係数、 κ は形状係数、 I_x は図4に示される領域の断面2次モーメントを表す。

(13)式を(10)式に代入し、(12)式の要素剛性マトリクスを計算することにより、中空スラブの有限要素解析を行うことができる。

図4 中空スラブの断面と表記

3. 位相最適化問題の定式化

3.1 最適化問題の定式化

本問題は、図5に示すように積層板の表面にCFRP材料の層を設定し、重量の制約の下に、CFRP材料の要素密度を最適化することで、CFRPの最適位相を求める問題となる。

図5 CFRPテープの最適配置を求める位相最適化問題

したがって、本問題の設計変数は、CFRP材料要素の密度、制約条件はCFRP材料の総重量となる。また、最適化の目的は、CFRP補強によりスラブの剛性を高めることとし、目的関数をコンプライアンス(歪みエネルギーの2倍)として、これを最小化する。

以上の最適化問題を定式化すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \min \quad & C(\mathbf{x}) = \mathbf{d}^T \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i^T \mathbf{x}_i \mathbf{k}_i^* \mathbf{d}_i^* \\ \text{subject to} \quad & W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i v_i^* \leq \bar{W} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 C はコンプライアンス、 $\mathbf{k}$ は全体剛性マトリクス、 $\mathbf{d}$ は節点変位ベクトル、 x_i は0以上1以下の要素密度を表す設計変数、 n は設計変数の総数、 $\mathbf{d}_i^*, \mathbf{k}_i^*$ は i 番目要素の節点変位ベクトルと剛性マトリクス、 W は総重量、 v_i^* は i 番目要素の体積、 $\bar{W}$ は重量の制約値を表す。また、 p は、0と1の間の中間的な密度を防ぐためのペナルティ係数である(通常2~3で与える)。

3.2 最適化問題の解法

ここでは、(16)式的最適化問題を、CONLIN法によって解く。CONLIN法は、目的関数および制約条件を、既知の設計変数の近傍で、感度係数が正であれば設計変数で、感度係数が負であれば設計変数の逆数でテーラー展開して解く方法である。詳しくは文献14),18)等を参照。CONLIN法を用いる場合も、目的関数と制約条件の設計変数に関する感度係数が必要となるが、これらは次式から計算される。

$$\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -p x_i^{(p-1)} (\mathbf{d}_i^T \mathbf{k}_i^* \mathbf{d}_i^*), \quad \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_i} = v_i^* \quad (17)$$

また、繰り返し計算の各ステップでは、設計変数に変動幅(move limit)の制約を課す必要がある。すなわち、

$$x_i^{(k-1)} - \xi \leq x_i^{(k)} \leq x_i^{(k-1)} + \xi \quad (18)$$

ここに、 k は最適化計算の繰り返しステップ、 ξ はムープリミットを表す(通常0.1以下で与える)。

4. 解析例

4.1 解析モデル

ここでは、図6に示す中空スラブ試験体を対象として、図7に示す解析モデルにより解析を行う。解析モデルでは、 $\phi = 3.2\text{cm}$ 、 $t = 6\text{cm}$ 、 $p_x^* = 0.00298$ 、 $p_y^* = 0.00317$ 、 $d_x^* = 0.9\text{cm}$ 、 $d_y^* = 1.2\text{cm}$ 、 $\nu = 0.167$ 、 $E_c = 1892\text{kN/cm}^2$ 、 $E_s = 2058\text{kN/cm}^2$ 、 $E = 1919\text{kN/cm}^2$ 、 $l_p = 5\text{cm}$ 、 $L = 100\text{cm}$ 、 $\kappa = 1.2$ 、 $I_x = 84.9\text{cm}^4$ 、 $\phi' = 2.8\text{cm}$ としている。なお、解析モデルでは、中空円形鋼管が y 軸方向に入っているものとしている。この場合、中空スラブの材料定数は、(14),(15)式の計算により次のようになる。

$$\begin{aligned} E_1 &= 1862\text{kN/cm}^2, \quad E_2 = 1911\text{kN/cm}^2, \quad E_3 = 831\text{kN/cm}^2 \\ G_{12} &= 424\text{kN/cm}^2, \quad G_{23} = 292\text{kN/cm}^2, \quad G_{31} = 419\text{kN/cm}^2 \\ \nu_{12} &= \nu_{23} = \nu_{13} = 0.167 \end{aligned} \quad (19)$$

一方、CFRPは、等方性とした場合と、異方性とした場合の2種類の解析を行う。ただし、異方性とした場合は、CFRP材料の要素を2重に重ねることによって解析を行う。

CFRPを等方性とした場合のCFRPの材料定数は、

$$E = 16224\text{kN/cm}^2, \quad \nu = 0.28 \quad (20)$$

また、CFRPが異方性の場合は、一方が、

$$\begin{aligned} E_1 &= 16224\text{kN/cm}^2, \quad E_2 = 300\text{kN/cm}^2, \quad E_3 = 300\text{kN/cm}^2 \\ G_{12} &= G_{23} = G_{31} = 117\text{kN/cm}^2, \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.28 \end{aligned} \quad (21)$$

他方が E_1 と E_2 の値を入れ替えた値とする。なお、炭素繊維方向と直交方向のヤング係数およびせん断弾性係数はエポキシ樹脂のも

のを用いている。

解析は、対称性を利用して 1/4 領域で行う。境界条件は全辺完全固定とし、荷重は 17.87 kN/m^2 の鉛直等分布荷重とする。

図 6 中空スラブ試験体

図 7 解析モデル

4.2 有限要素分割に対する収束性

まず、本論文に示したソリッド要素の有限要素分割に対する収束特性を示す。解析モデルは、4.1 節に示した CFRP 部分を除いた中空スラブモデルとする。

図 8 は、板厚方向の分割数を 1 として、 x, y 方向の分割数を 5×5 , 10×10 , 15×15 , 20×20 , 25×25 , 30×30 (1/4 領域) とした場合の中央たわみの収束性を示したものである。図より、 5×5 分割で十分な精度が得られていることがわかる。ただし、図の縦軸の値は、中央たわみを 30×30 分割の値で無次元化している。

図 9 は、 x, y 方向の分割数を 20×20 として、板厚方向の分割数を 1, 2, 4, 6, 8, 10 とした場合の、中央たわみの収束性を示したものである。図より、板厚方向 1 分割で、十分な精度が得られていることがわかる。ただし、図の縦軸の値は、板厚方向 10 分割の値で無次元化している。

以上の結果を踏まえ、以下の解析では、有限要素分割数を x, y 方向は 20×20 分割、板厚方向は、CFRP が等方性の場合は 2 層、異方性の場合は、同じ 2 層ではあるが CFRP 部分の要素は 2 倍にして計算する。なお、 x, y 方向の分割数を 20×20 としたのは、詳細な位相を求めるためである。

図 8 x, y 方向の分割に対する中央たわみの収束性

図 9 板厚方向の分割に対する中央たわみの収束性

4.3 位相最適化の条件と解析結果

位相最適化計算では、(16)式の目的関数のべき乗係数 p を 2 とし、重量の制約値 $\bar{w}$ は、実験を考慮して全 CFRP 要素の重量の 32% (CFRP が異方性の場合は 16%) に設定する。また、(18)式のムーブリミットは 0.1 とし、最適化計算の繰り返し数は 40 とする。なお、本解析では、チェッカーボード状の位相分布を回避するフィルタリング法は用いていない。

図 10 は、最適化計算の繰り返し数に対する(16)式のコンプライアンス値の収束性を示したものである。ただし、図の縦軸の値は、40 ステップのコンプライアンス値で無次元化している。図より、30 ステップ程度でほぼ収束していることがわかる。

図 11 は、CFRP を等方性として解析した場合の結果を示す。また、図の右側に、設計変数の値と色のケールの関係を示している。図に示されるように、スラブの応力が高くなる中心部分と各辺の中央部分が CFRP で補強されていることがわかる。また、スラブの異方性は、CFRP の分布には反映されていないことがわかる。したがって、1 方向中空スラブの場合、スラブ部分を等方性として解析しても問題ないと思われる。

図 12 は、CFRP を異方性として解析した場合の結果を示す。ただし、色のスケールは、図 11 に示されるものと同じである。図より、等方性の結果とほぼ同様な位相が得られていることがわかる。ただし、この場合は、スラブの上下辺に関しては y 方向に、左右辺に関しては x 方向に CFRP テープを貼ればよいことがわかる。また、スラブ中央部は、どちらも密度が 0.5 近くのグレースケール

4.4 実験値の比較

次に、前節に示したモデルを対象として、試験体を作成し、実験を行った。実験の詳細に関しては、文献 19) を参照。

図 15 は各試験体の各段階のひび割れ時の荷重を最大荷重で割って到達率としたものである。ただし、初期段階は、スラブの上面か下面のどちらかに最初にひびが入った段階、第 2 段階は、最初に斜めにひびが入った段階、第 3 段階は、対角線上にひびが入った段階、第 4 段階は、スラブに降伏線が形成された段階、最終段階は、破壊に至った段階である。

図 15 から Case4 の初期ひび割れ段階の到達率が約 57% と他の Case に比べ高率であることがわかる。したがって、実験においても、最適解を参考にした試験体が最も高剛性となっていることが検証された。なお、Case4 で、第 3 段階の到達率が低いのは、図 13 からわかるように、本モデルでは対角線上の CFRP 補強がないためと考えられる。

図 15 ひび割れ発生到達率

5. まとめ

本論文では、CFRPテープによる床スラブの耐震補強を効率よく行うために、位相最適化手法を用いてCFRPの適切な貼り付け位置を求める手法を提案した。本手法では、スラブを積層板にモデル化し、CFRPテープを貼り付ける層を設計領域として、密度法による位相最適化手法を適用した。

開発したプログラムにより、本手法の有効性を調査した結果、工学的判断に基づく貼り方に比較して、最適位相を参考にした貼り方が、スラブの剛性が高いことが検証された。また、同じモデルで、試験体を作成し、実験を行ったところ、最適位相を参考にした貼り方による試験体が、他の試験体に比較して初期のコンクリートのひび割れまでの強度が高いことがわかった。

以上より、本論文で提案した手法は、CFRP テープの効率のよい貼り方を求める方法として有効であることが確認できた。ただし、実験の結果、最終強度の比較では、必ずしも最適位相を参考にした貼り方の試験体が最大とはならなかったため、今後は、弾塑性解析に拡張し、強度を目的関数にする方法も必要であると考えられる。これについては、今後の課題としたい。

謝辞：本研究を遂行するにあたり、近畿大学工学部大学院生の中川恭一君に協力していただいた。ここに、記して感謝の意を表します。

参考文献

- 森村毅, 在永末徳: 鉄筋コンクリート梁・スラブの炭素繊維補強に関する研究, 日本建築学会中国支部研究報告第 24 巻, pp.29-32, 2001.3
- 森村毅, 在永末徳: 周辺拘束鉄筋コンクリート合成スラブの炭素繊維補強に関する研究, 日本建築学会中国支部研究報告第 25 巻, pp.121-124, 2002.3
- Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N., Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71, pp.197-224, 1988
- Bendsøe, M. P., Optimal shape design as a material distribution problem, Struct. Optimiz., 1, 193-202, 1989
- Zhou, M. and Rozvany, G.I.N., The COC algorithm, Part 1: Topological, geometrical and generalized shape optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, 309-336, 1991
- Yang, R.J. and Chuang, C.H., Optimal topology design using linear programming, Computers & Structures, 52(2), 265-275, 1994
- 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣: ボクセル有限要素法を用いた構造物の位相最適化, 日本計算工学会論文集, Vol.2, pp.87-94, 2000
- 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣: 最適化手法 CONLIN を用いた 3 次元構造物の位相最適化, 土木学会応用力学論文集, Vol.4, pp.69-77, 2001.10
- Suzuki, K. and Kikuchi, N., Generalized Layout Optimization of Three-Dimensional Shell Structures, Geometric Aspects of Industrial Design, SIAM, Philadelphia, pp.62-88, 1992
- Belblidia, F., Lee, J. E. B., Rechak, S. and Hinton, E., Topology optimization of plate structures using a single- or three-layered artificial material model, Advances in Engineering Software, Vol.32, pp.159-168, 2001
- Pedersen, N. L., Topology optimization of laminated plates with prestress, Computers & Structures, Vol.80, pp.559-570, 2002
- 藤井大地, 菊池昇, 均質化法によるシェル構造の形状とトポロジーの同時最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 I, pp.383-384, 1999.9
- 関口美奈子, 菊池昇, 混合的な有限要素剛性マトリックスの導き方に関する一考察—Clough 1960 年の論文を中心として—, 計算工学講演会論文集, 4(1), pp.131-134, 1999
- C. Fleury and V. Braibant: Structural Optimization: A new dual method using mixed variables, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.23, pp.409-428, 1986
- 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣, 最適化手法 CONLIN を用いた骨組構造の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.548, 2001.10
- 森村毅, 直交異方性鉄筋コンクリートスラブの荷重変形特性に関する研究, 広島大学博士論文, pp.170-176, 1989
- 藤本敬之, 中空スラブについて (第一報), 近畿大学理工学部研究報告, pp.59-60, 1969
- 藤井大地著, 「パソコンで解く構造デザイン」, 丸善, 2002.4
- 森村毅, 小泉智彦, 藤井大地, 周辺拘束中空スラブの炭素繊維補強に関する研究, 日本建築学会中国支部研究報告集, 第 27 巻, pp.361-364, 2004.3

(2004年4月8日原稿受理, 2004年8月12日採用決定)