剛性および外力の不確定性を考慮したトラスの
ロバストネス関数に対する近似アルゴリズムAPPROXIMATION ALGORITHM FOR ROBUSTNESS FUNCTIONS OF TRUSSES
WITH UNCERTAIN STIFFNESS UNDER UNCERTAIN FORCES寒野 善博*¹, 竹脇 出*²

Yoshihiro KANNO and Izuru TAKEWAKI

An approximation algorithm is presented for finding the lower bounds of robustness functions of linear elastic trusses associated with stress constraints. Under the uncertainties of member stiffness and external forces based on the info-gap model, the robustness function is formulated as the optimal objective value of an optimization problem with infinitely many constraint conditions. By using the semidefinite programming relaxation, we formulate the quasiconvex programming problem which provides the lower bounds of the robustness functions. A bisection method is proposed, where we solve a finite number of semidefinite programming problems. The lower bounds of robustness functions are computed for various trusses under several uncertain circumstances.

Keywords: robustness; data uncertainty; info-gap model; semidefinite program; semi-infinite program; quasiconvex program

ロバスト性, 不確定性, インフォ・ギャップモデル, 半正定値計画法, 半無限計画法, 準凸計画法

1 序

構造物の設計において, 確定論的な構造最適化問題とその解法については既に種々の提案がなされている。しかし, 構造物および外乱を特徴づけるパラメータは, 種々の理由により, 一価の値に定まらないことが多い。これらのパラメータが, ある数理的なモデルに従って変動するとき, そのパラメータは不確定性を有するという。近年, 構造物および外乱を持つ種々のパラメータの不確定性を考慮し, パラメータ変動に対する構造物の頑強さ(ロバスト性)を評価する方法や, ロバスト性を考慮した構造物の設計法(ロバスト設計法)が注目を集めている。これらの多くは, 構造物の感受性や信頼性に基いてロバスト性を評価する様々な指標を定義し, ロバスト性の大きい設計を得ることを意図している¹⁻⁹。

構造系を持つパラメータの不確定性のモデルには, 大別して確率論的モデルと非確率論的モデルの2つがある。確率論的不確定性モデルは, 例えば, 構造物の性能制約が満たされない確率(failure probability)を最小化する信頼性設計に用いられている。この確率を直接求めることは計算時間の観点から困難であるため, モンテカル

ロ法¹や応答曲面法², 感度解析法³, reliability index 法⁴などが用いられる。Doltsinis and Kang⁵は, 多目的最適化手法に基づき, 要求性能を表す関数の感度係数の期待値と標準偏差の双方を最小化する構造最適化問題を定式化した。

非確率論的不確定性のモデルとしては, 凸モデル(convex model)解析¹⁰がよく知られている。一方, Ben-Tal and Nemirovski¹¹は, 種々の錐線形計画問題¹²の係数が不確定性を含む場合のロバスト最適化の概念と手法を提案した。Calafiore and El Ghaoui¹³は半正定値計画(semidefinite program, SDP)緩和¹⁴を用い, 線形方程式の係数が不確定性を含む場合に, その解集合を含む楕円体を求める手法を提案した。構造物に対する研究として, Pantelides and Ganzerli⁷は凸モデルに基づく不確定性を考慮したトラスの構造最適化問題を提案した。また, Han and Kwak⁸は, 構造物の要求性能を定める関数の感度係数の l_∞ ノルムを最小化することで, 大きなロバスト性を得る手法を提案した。同様に, 曾我部⁹は多目的最適化手法に基づき, 骨組の崩壊荷重の感度係数と構造質量の双方を最小化する問題を定式化した。

*¹ 京都大学大学院都市環境工学専攻 助手・博士(工学)

Research Assoc., Dept. of Urban and Environmental Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.

*² 京都大学大学院都市環境工学専攻 教授・工博

Prof., Dept. of Urban and Environmental Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.

Ben-Haim¹⁵ はインフォ・ギャップ決定理論 (info-gap decision theory) に基づき、ロバストネス関数 (robustness function) と呼ばれる関数を新たに定義した。ロバストネス関数は、ロバスト性の定量的な指標の1つと捉えることができる。インフォ・ギャップモデルでは、構造系のパラメータが非確率論的な不確定性を持つことを仮定し、その不確定性のレベル、即ちパラメータの変動の幅を1つのパラメータ α を用いて表す。ロバストネス関数 $\hat{\alpha}$ は、構造系が必ず性能制約を満たすような α の最大値として定義される^{16,17}。

確率論的な不確定性モデルに基づく信頼性理論では、不確定なパラメータの確率分布や変動の大きさを推定する必要がある。実際には、これらの統計量を正確に予測することは極めて困難な場合が多い。これに対して、ロバストネス関数の利点は、不確定なパラメータに関する統計量が一切必要ないことである¹⁵。しかし、ロバストネス関数は、無限個の制約条件と有限個の変数を持つ数理計画問題の最適値として定式化される¹⁷。このような問題は、半無限計画問題 (semi-infinite programming problem)¹⁸ と呼ばれ、個々の問題が持つ特殊な性質を利用しない限り、最適解を求めることは困難である。従って、ロバストネス関数を効率よく求める手法を開発することは、工学上の重要な課題である。しかし、構造物の剛性が不確定性を持つ場合にロバストネス関数を効率よく求める手法は、著者らの知る限り提案されていない。

本稿の目的は、応力制約を有するトラスについて、外力および部材剛性がインフォ・ギャップモデル¹⁵ に基づく不確定性を有する場合のロバストネス関数を考え、その近似解を求める効率的な手法を提案することにある。外力のみが不確定性を有する場合には、ロバストネス関数の正解を比較的容易に得ることができる¹⁷。吉川¹⁹ は、外力のみが不確定性を有する場合に、コンプライアンス制約を有するトラスのロバストネス関数最大化問題を数値的に解いている。これに対し、剛性行列が不確定性を持つ場合には、釣合式を満たす変位の正確な上界や下界を求める問題は、NP 困難であることが知られている²⁰ (NP 困難と計算複雑度については、例えば久保²¹ を参照)。従って、剛性行列が不確定性を持つ場合には、トラスが応力制約を必ず満たすか否かを正確に判定することは極めて困難である。このような場合にロバストネス関数の正解を得ることは困難であり、その近似解を得る効率的な手法を開発することは重要である。

本稿の第2節では、応力制約に関するトラスのロバストネス関数が、半無限計画問題¹⁸ の最適値として定義されることを示す。また、第3節以降の数学的な準備として、SDP 問題¹⁴ および準凸計画問題²² について記述する。第3節では、簡単なトラスの例題を用いてロバストネス関数の工学的な意味を説明する。第4節では、SDP 緩和²³ を用い、ロバストネス関数の下界を求めるための (有限次元の) 数理計画問題を定式化する。第5節では、第4節の数理計画問題に対し、二分法²⁴ に基づいて有限個の SDP 問題を解くことで大域的最適解を得るアルゴリズムを提案する。第6節では、数値例題を通じ、提案手法の有効性を示す。

2 ロバストネス関数と半正定値計画法

本稿では、 $a_1, \dots, a_n$ を要素とし、要素間に順序のない集合を $\{a_1, \dots, a_n\}$ 、順序のある集合を $(a_1, \dots, a_n)$ で表す。ベクトル $p \in \mathbf{R}^n$ は列ベクトルとし、その第 i 成分を p_i で表す。ベクトルの要素は順序のある集合なので、 $p = (p_1, \dots, p_n) = (p_i)_{i=1}^n$ と書く。特に、そ

の次元が明確であるときには $p = (p_i)$ と書く。ベクトル p の Euclid ノルム $(p^T p)^{1/2}$ を $\|p\|_2$ で表す。さらに、ベクトル $p \in \mathbf{R}^n$ が $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, を満たすとき、 $p \geq 0$ と書く。

集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ と $Y \subseteq \mathbf{R}^m$ の直積 $X \times Y$ を $X \times Y = \{(x^T, y^T)^T | x \in X, y \in Y\}$ で定義する。特に、 $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^{m+n}$ と書く。また、 $n \times n$ 対称行列全体の集合を $\mathbf{S}^n \subset \mathbf{R}^{n \times n}$ で表す。

2.1 応力制約に関するロバストネス関数

本節では、応力制約を持つトラスのロバストネス関数が、無限個の制約条件を持つ数理計画問題の最適値として得られることを示す。

線形弾性を仮定し、3次元空間内のトラスを考える。 $u \in \mathbf{R}^d$ を節点変位、 $f \in \mathbf{R}^d$ を外力と置く。ただし、 n^d は変位の自由度である。トラスの剛性行列を $K \in \mathbf{S}^{n^d}$ とおくと、釣合式は、

$$Ku = f \quad (1)$$

で与えられる。部材数を n^m とおき、部材断面積から構成されるベクトルを $a = (a_i) \in \mathbf{R}^{n^m}$ と置く。ここで、 $\text{rank}(\partial K / \partial a_i) = 1$ であることを用いると、定ベクトル $b_i = (b_{ij}) \in \mathbf{R}^{n^d}$, $i = 1, \dots, n^m$, を用いて K は次式のように表すことができる。

$$K(a) = \sum_{i=1}^{n^m} a_i b_i b_i^T. \quad (2)$$

ヤング係数を E 、第 i 部材の長さを ℓ_i とおくと、応力制約は

$$\left| \sqrt{E/\ell_i} b_i^T u \right| \leq \sigma_i^c, \quad i = 1, \dots, n^m \quad (3)$$

と表される。ただし、 $\mathbf{R} \ni \sigma_i^c > 0$ は第 i 部材の許容応力である。以下では、(3) を特別な場合として含む次の制約条件を考慮する。

$$u_l^c \geq |d_l^T u - r_l|, \quad l = 1, \dots, n^c. \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{R}^{n^c} \ni u^c = (u_l^c) \geq 0$, $d_l \in \mathbf{R}^{n^d}$, $r_l \in \mathbf{R}$, $l = 1, \dots, n^c$, は定数である。さらに、 $\mathbf{R}^{n^c}$ から $\mathbf{R}^{n^d}$ への点-集合写像 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}(u^c) = \left\{ u \in \mathbf{R}^{n^d} \mid u_l^c \geq |d_l^T u - r_l|, l = 1, \dots, n^c \right\} \quad (5)$$

で定義する。即ち、 $\mathcal{F}(u^c)$ は制約(4)を満たす u 全体の集合である。

部材剛性および外力の不確定性が、 n^c 個の不確定なパラメータ $\zeta_1, \dots, \zeta_{n^c}$ を用いて表されたとする。また、パラメータ α を用いて $\zeta = (\zeta_i)$ の不確定性の大きさを表す。与えられた $\alpha > 0$ に対し、 ζ が取り得る値全体の集合、即ち ζ の不確定性集合 (uncertainty set) を $\mathcal{Z}(\alpha) \subset \mathbf{R}^{n^c}$ で表す (具体例は(20) 参照)。インフォ・ギャップモデル¹⁵ に基づき、 $\mathcal{Z}(\alpha)$ に対する以下の仮定を導入する。

仮定 2.1.

$$(i) \mathcal{Z}(0) = \{\zeta \in \mathbf{R}^{n^c} | \zeta = 0\}.$$

$$(ii) 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \text{ ならば } \mathcal{Z}(\alpha_1) \subset \mathcal{Z}(\alpha_2).$$

a および f の公称値を $\tilde{a} \in \mathbf{R}^{n^m}$ および $\tilde{f} \in \mathbf{R}^{n^d}$ とおく。 $\tilde{a}, \tilde{f}, \alpha \geq 0$ に対し、 $(a^T, f^T)^T$ の不確定性集合を $\mathcal{T}(\alpha, \tilde{a}, \tilde{f}) \subset \mathbf{R}^{n^m} \times \mathbf{R}^{n^d}$ で表す (具体例は(19) 参照)。簡単のため、 $\mathcal{T}(\alpha, \tilde{a}, \tilde{f})$ を $\mathcal{T}(\alpha)$ または $\mathcal{T}$ と書くことがある。

釣合式(1)の解 u 全体の集合を $\mathcal{U}(\alpha, \tilde{a}) \subset \mathbf{R}^{n^d}$ とおく。即ち、

$$\mathcal{U}(\alpha, \tilde{a}) = \left\{ u \in \mathbf{R}^{n^d} \mid K(a)u = f, \right. \\ \left. \text{for some } (a^T, f^T)^T \in \mathcal{T}(\alpha, \tilde{a}, \tilde{f}) \right\}. \quad (6)$$

図1 $\mathcal{F}(\mathbf{u}^c)$, $\mathcal{U}(\alpha, \bar{\mathbf{a}})$, $\bar{\mathcal{U}}(\alpha, \bar{\mathbf{a}})$ と $\hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c)$ の関係

制約条件(4)に関するロバストネス関数 $\hat{\alpha}: \mathbf{R}^{n^m+n^c} \mapsto [0, +\infty]$ は、次式で定義される (Ben-Haim¹⁵, Ch. 3).

$$\hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c) = \max \{ \alpha \mid \mathbf{u} \in \mathcal{F}(\mathbf{u}^c), \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}(\alpha, \bar{\mathbf{a}}) \}. \quad (7)$$

問題(7)が実行不能ならば、 $\hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c) = 0$ と定義する。 $\bar{\mathbf{a}}^1 \in \mathbf{R}^{n^m}$ および $\bar{\mathbf{a}}^2 \in \mathbf{R}^{n^m}$ が条件 $\hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}^1, \mathbf{u}^c) > \hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}^2, \mathbf{u}^c)$ を満たすとき、 $\bar{\mathbf{a}}^1$ は $\bar{\mathbf{a}}^2$ よりもロバスト性が高いという。 $\zeta^1 \in \mathcal{Z}(\hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}^1, \mathbf{u}^c))$ に対して等式 $u_i^c = |d^T \mathbf{u} - r_i|$ が成立する $i \in \{1, \dots, n^c\}$ が存在するとき、 ζ^1 は最悪事例 (worst case) であるという。

ロバストネス関数 $\hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c)$ と、種々の α に対する集合 $\mathcal{F}(\mathbf{u}^c)$ および $\mathcal{U}(\alpha, \bar{\mathbf{a}})$ との関係を図1 (a)-(c) に示す。 $\alpha_a < \hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c)$ および $\alpha_b = \hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c)$ に対応する図1 (a) および (b) では、全ての場合に制約条件 $\mathbf{u} \in \mathcal{F}(\mathbf{u}^c)$ が満たされている。一方、図1 (c) では、釣合式の解 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\alpha_c, \bar{\mathbf{a}})$ が $\mathbf{u} \in \mathcal{F}(\mathbf{u}^c)$ を満たさない場合が存在するので、 $\alpha_c > \hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c)$ である。問題(7)は、 $\mathcal{U}(\alpha, \bar{\mathbf{a}})$ が $\mathcal{F}(\mathbf{u}^c)$ に含まれる場合の中で最大の α を求める問題である。

このように、ロバストネス関数 $\hat{\alpha}$ は問題(7)の最大値として得られる。しかし、不確定パラメータ ζ の組合せは無限に存在するため、問題(7)は無数個の制約条件を含む。このような問題は半無限計画問題¹⁸と呼ばれ、実際に解を求めることは極めて困難である。そこで、第4節では、 $\hat{\alpha}$ の下界を効率よく求める手法を展開する。

2.2 半正定値計画問題

$\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$ に対して、行列 $\mathbf{P}$ が半正定値であるとき、即ち $\mathbf{P}$ の全ての固有値が非負であるとき、 $\mathbf{P} \succeq \mathbf{O}$ と書く。また、 $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n, \mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ に対して行列 $(\mathbf{Q} - \mathbf{W})$ が半正定値であるとき、 $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{W}$ と書く。行列 $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$ と $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n$ の内積を $\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q} = \text{tr}(\mathbf{P}^T \mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_{ij}$ で定義する。

次の数理計画問題を、半正定値計画問題 (semidefinite programming problem, SDP 問題) の等式標準形の主問題と呼ぶ²⁵。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} \\ & \text{subject to} && \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & && \mathbf{S} \ni \mathbf{X} \succeq \mathbf{O}. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{X}$ は変数行列、 $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n, i = 1, \dots, m, \mathbf{b} = (b_i) \in \mathbf{R}^m, \mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ は定行列および定ベクトルである。問題(8)の双対問題は、 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$

を変数とする次の問題で与えられる。

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} && \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & \text{subject to} && \mathbf{C} - \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i \succeq \mathbf{O}. \end{aligned} \quad (9)$$

SDP 問題(8)および(9)の制約条件は、線形行列不等式 (linear matrix inequality) と呼ばれ、双方の問題の実行可能領域は凸集合であることが知られている²⁵。

半正定値計画法は線形計画法や凸2次計画法などを含んでおり、従来よりも広い範囲の凸計画問題を扱うことができる。さらに、主双対内点法と呼ばれる多項式性を持つ解法が提案され²⁵、それに基づくソフトウェアもいくつか実装されている²⁶。主双対内点法を用いると、SDP 問題(8)および(9)の大域的最適解を得るために必要な四則演算の回数が n および m の多項式で押さえられる。このため SDP は、システム制御への応用、組合せ最適化問題に対する緩和問題など様々な分野で注目されている^{12,14}。また、組合せ最適化および非凸型2次計画問題に対する SDP 緩和は、従来の線形計画緩和に比べて理論的に優れていることが知られている^{14,23}。著者らは、SDP を用い、1次固有振動数²⁷ および線形座屈荷重係数²⁸ の制約の下でのトラスのトポロジー最適化問題に対し、最適解で最小固有値が多数重複する場合にも効率よく解を得る手法を提案した。Ben-Tal and Nemirovski⁶ は、不確定性を含んだ外力に対するトラスのコンプライアンス最小化問題を SDP 問題として定式化している。

2.3 準凸計画問題

関数 $f: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ と $\beta \in \mathbf{R}$ に対して定義される集合

$$\mathcal{L}_f(\beta) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \leq \beta \}$$

を f のレベル集合 (level set) と呼ぶ。任意の $\beta \in \mathbf{R}$ に対してレベル集合 $\mathcal{L}_f(\beta)$ が凸集合である関数 f を、準凸関数 (quasiconvex function) という²⁹。

関数 $f_i: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}, i = 0, 1, \dots, m$ および $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ を用いて定義される数理計画問題

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f_0(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to} && f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & && \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (10)$$

を考える。 f_0 が準凸関数、 $f_1, \dots, f_m$ が凸関数であるとき、問題(10)を準凸計画問題 (quasiconvex programming problem)²² と呼ぶ。

2.4 線形行列不等式に関する補題

次節以降のために、次の2つの補題を導入しておく。

補題 2.2. $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^n, v \in \mathbf{R}$ に対し、条件

$$\begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n$$

が成立するための必要十分条件は、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T & v \end{pmatrix} \succeq \mathbf{O}$$

が成り立つことである。

証明. Calafiore and El Ghaoui¹³, Lemma A.3 の証明を参照。 $\square$

図2 2自由度静定トラス

補題 2.3 (S-Lemma). $Q_i \in S^n$, $p_i \in \mathbf{R}^n$, $d_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, \dots, m$, に対し, 関数 $f_i: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ を

$$f_i(\xi) = \xi^T Q_i \xi + 2p_i^T \xi + d_i, \quad i = 0, \dots, m$$

で定義する. 命題

$$f_1(\xi) \geq 0, \dots, f_m(\xi) \geq 0 \implies f_0(\xi) \geq 0 \quad (11)$$

が真であるための十分条件は,

$$f_0(\xi) - \sum_{i=1}^m \tau_i f_i(\xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \quad (12)$$

を満たす $\tau_1, \dots, \tau_m \geq 0$ が存在することである.

証明. 非凸型 2 次計画問題の半正定値計画緩和 (SDP 緩和) に対する双対定理より得られる. Ben-Tal and Nemirovski¹², Ch.4 および Wolkowicz *et al.*¹⁴, § 6.3.1 の証明を参照. $\square$

非凸型 2 次計画問題の SDP 緩和に関しては, 例えば Fujie and Kojima²³ を参照.

3 ロバストネス関数の例

本節では, ロバストネス関数の概念を説明するために, 図2に示す線形弾性トラスのロバストネス関数を解析的に求める. 節点 (a) はピン支持されており, 節点 (b) および (c) には, それぞれ, 外力 f_1 および f_2 が作用する. 節点 (b) および (c) の変位を u_1 および u_2 とおく. また, 部材 (1) と (2) の部材長は等しい. 外力のみが不確定性を持つ場合のこのトラスのロバストネス関数に関しては, Kanno and Takewaki¹⁷, § 3 を参照. 部材断面積を a_1, a_2 とおくと, 部材応力 σ_i は

$$\sigma_1 = \frac{f_1 + f_2}{a_1}, \quad \sigma_2 = \frac{f_2}{a_2} \quad (13)$$

で与えられる. 定数 $\sigma^c > 0$ を与え, 応力制約

$$|\sigma_i| \leq \sigma^c, \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

を考慮する.

インフォ・ギャップ不確定性モデル¹⁵に基づき, $(a_1, a_2)^T$ および $(f_1, f_2)^T$ がパラメータ ζ を用いて

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{a}_1 + \zeta a^1, & a_2 &= \bar{a}_2 + \zeta a^2, \\ f_1 &= \bar{f}_1 + \zeta f^1, & f_2 &= \bar{f}_2 + \zeta f^2, \end{aligned} \quad \alpha \geq |\zeta|, \quad \alpha \geq 0 \quad (15)$$

で表されることを仮定する. ここで, $\bar{f}$ は f_1 および f_2 の公称値, $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)^T$ は $(a_1, a_2)^T$ の公称値である. また, a^1, a^2, f^1 は, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{f}$ の不確定性の相対的な大きさを表す定数である. 明らかに, (15) で定義される不確定性集合は仮定 2.1 を満たす. 以下では, 簡単のため

$$f^1 \bar{a}_1 > \bar{f}_1 a^1, \quad f^1 \bar{a}_2 > \bar{f}_1 a^2, \quad \bar{f} > 0 \quad (16)$$

および $a^1 = a^2 = 1.0 \text{ cm}^2$, $f^1 = 9.8 \text{ kN}$ とおく. ロバストネス関数 $\hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \sigma^c)$ の定義は, (15) を満たす任意の $(a_1, a_2)^T, (f_1, f_2)^T$ に対して条件(14)が満たされる α の最大値である. (13), (16) より,

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \zeta} = \frac{2(f^1 \bar{a}_1 - \bar{f}_1 a^1)}{(\bar{a}_1 + \zeta a^1)^2} > 0, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \zeta} = \frac{(f^1 \bar{a}_2 - \bar{f}_1 a^2)}{(\bar{a}_1 + \zeta a^1)^2} > 0$$

が得られる. 従って, 応力の絶対値の最大値は,

$$\max_{\zeta \in \mathbf{R}} \{|\sigma_1| \mid \alpha \geq |\zeta|\} = \frac{2(\bar{f} + \alpha f^1)}{\bar{a}_1 + \alpha a^1}, \quad (17)$$

$$\max_{\zeta \in \mathbf{R}} \{|\sigma_2| \mid \alpha \geq |\zeta|\} = \frac{\bar{f} + \alpha f^1}{\bar{a}_2 + \alpha a^2} \quad (18)$$

である.

$\bar{f} = 9.8 \text{ kN}$, $\sigma^c = 19.6 \text{ MPa}$ とおく. 2つの部材断面積ベクトル $\mathbf{a}_1 = (15, 15)^T \text{ cm}^2$ および $\mathbf{a}_2 = (20, 10)^T \text{ cm}^2$ を考える. ただし, $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の構造質量は等しい. 最初に $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_1$ とおく. (17) より, $\max \{|\sigma_1| \mid \alpha \geq |\zeta|\}$ は $\alpha = 5/9$ において σ^c に到達する. 一方, (18) より, $\max \{|\sigma_2| \mid \alpha \geq |\zeta|\}$ は $\alpha = 2.5$ において σ^c に到達する. 従って, ロバストネス関数は $\hat{\alpha}(\mathbf{a}_1, \sigma^c) = 5/9$ と得られる. これは, 断面積と外力が(15) および $\alpha = 5/9$ を満たすならば, 制約条件(14)が必ず満たされることを意味する.

次に, $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_2$ とおくと, (17) より, $\max \{|\sigma_1| \mid \alpha \geq |\zeta|\}$ は $\alpha = 10/9 \approx 1.11$ のとき σ^c に到達する. 一方, (18) より, $\max \{|\sigma_2| \mid \alpha \geq |\zeta|\}$ は $\alpha = 1.25$ において σ^c に到達する. 以上より, $\hat{\alpha}(\mathbf{a}_2, \sigma^c) = 10/9$ が得られる. 従って, $\mathbf{a}_2$ のロバストネス関数は $\mathbf{a}_1$ のそれよりも大きい, 即ち, $\mathbf{a}_2$ は $\mathbf{a}_1$ よりもロバスト性が大きいことが分かる.

一般のトラスに対しては, 本節のようにロバストネス関数を解析的に求めることは極めて困難である. 次節以降では, ロバストネス関数の近似値を効率よく求める手法を提案する.

4 半正定値計画緩和に基づくロバストネス関数の近似解

ロバストネス関数 $\hat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \sigma^c)$ を直接求めることは, 半無限計画問題 (7) の大域的最適解を求めることと等価であるから, 実際には極めて困難である. 従って, ロバストネス関数の近似解を求める効率的な手法を提案することは意義がある.

自然数 n^a に対し, ベクトル $\mathbf{e}^p \in \mathbf{R}^{n^a}$ を

$$\mathbf{e}_j^p = \begin{cases} 1, & \text{if } j = p, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad p = 1, \dots, n^a$$

で定義する. 以下では, 不確定性を表す集合 $\mathcal{T}$ および $\mathcal{Z}$ が, 定数 $a^1, \dots, a^{n^a} \in \mathbf{R}$, $f^1, \dots, f^{n^f} \in \mathbf{R}^{n^f}$ を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{f}}) &= \left\{ \left(\sum_{p=1}^{n^a} \zeta_p a^p (\mathbf{e}^p)^T, \sum_{p=1}^{n^f} \zeta_{n^a+p} f^p (\mathbf{f}^p)^T \right)^T \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\mathbf{a}}^T, \bar{\mathbf{f}}^T)^T \mid \zeta \in \mathcal{Z}(\alpha) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathcal{Z}(\alpha) = \left\{ \zeta \in \mathbf{R}^{n^a+n^f} \mid \alpha \geq \|\zeta\|_2 \right\} \quad (20)$$

と表せることを仮定する. (20) で定義される $\mathcal{Z}$ は仮定 2.1 を満たすので, (19), (20) はインフォ・ギャップ不確定性モデル¹⁵に従う.

いま, $\zeta^1 \in \mathbf{R}^{n^a+n^f}$ を選び, 制約条件(4)が満たされるか否かを判定する. ζ^1 を固定すると, 変位 $\mathbf{u}$ は ζ^1 に対する通常の釣合式を解くことで直ちに得られるので, この判定は容易に実行できる. このとき, 条件(4)のいずれかが満たされないならば, (7), (20) より $\bar{\alpha} < \|\zeta^1\|_2$ を得る. 即ち, $\|\zeta^1\|_2$ がロバストネス関数 $\bar{\alpha}$ の上界であることは, 容易に示すことができる. 一方, $\bar{\alpha} > 0$ が $\bar{\alpha}$ の下界であること, 即ち $\bar{\alpha} \geq \alpha$ を示すことを考える. このためには, $\zeta \in \mathcal{Z}(\bar{\alpha})$ を満たす全ての ζ に対して条件(4)が満たされることを示さなければならない. 従って, ロバストネス関数の下界を求めることは, 上界を求めることよりも困難である.

ロバストネス関数の下界 α が得られたとする。このとき、 $\zeta \in \mathcal{Z}(\alpha)$ を満たす任意の ζ に対して、制約条件(4) が満たされることが保証される。従って、ロバストネス関数の精度の良い下界を求めることは、工学的に大きな意味がある。以下では、SDP 緩和に基づき、ロバストネス関数の下界を効率よく求める手法を提案する。

写像 $H_l: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{S}^{n^d+1}$, $l = 1, \dots, n^c$, を

$$H_l(u_l^c) = \begin{pmatrix} -d_l d_l^\top & r_l d_l \\ r_l d_l^\top & (u_l^c)^2 - r_l^2 \end{pmatrix}$$

で定義する。(4) 式の条件 $u_l^c \geq |d_l^\top \mathbf{u} - r_l|$ は、条件 $(u_l^c)^2 - (d_l^\top \mathbf{u} - r_l)^2 \geq 0$ と等価であるから、(5) で定義される $\mathcal{F}$ は

$$\mathbf{u} \in \mathcal{F}(\mathbf{u}^c) \iff \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 1 \end{pmatrix}^\top H_l(u_l^c) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad l = 1, \dots, n^c \quad (21)$$

と書き直すことができる。

いま、問題(7) が実行不能であれば、定義より $\widehat{\alpha}(\mathbf{a}, \mathbf{u}^c) = 0$ である。これ以降は、問題(7) が実行可能であることを仮定する。次の命題は、ロバストネス関数の SDP 緩和に基づく下界を与える。

命題 4.1. 集合 $\mathcal{T}$ および $\mathcal{Z}$ が(19), (20) で与えられることを仮定する。行列 $\Omega_j \in \mathbf{S}^{n^d+1}$ を

$$\begin{aligned} \Omega_j(\alpha^2, \bar{\mathbf{a}}) &= \begin{pmatrix} \Omega_{j11} & \omega_{j12} \\ \omega_{j12}^\top & \omega_{j22} \end{pmatrix}, \\ \Omega_{j11} &= \left(\sum_{i=1}^{n^m} \tilde{a}_i b_{ij} \mathbf{b}_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n^m} \tilde{a}_i b_{ij} \mathbf{b}_i^\top \right) - \alpha^2 \sum_{p=1}^{n^a} (a^p)^2 b_{pj}^2 \mathbf{b}_p \mathbf{b}_p^\top, \\ \omega_{j12} &= -\tilde{f}_j \sum_{i=1}^{n^m} \tilde{a}_i b_{ij} \mathbf{b}_i, \\ \omega_{j22} &= \tilde{f}_j^2 - \alpha^2 \left\| (\mathbf{f}_j^p)_{p=1}^{n^a} \right\|_2^2 \end{aligned}$$

で導入し、 $\tau_l = (\tau_{l1}, \dots, \tau_{ln^d})^\top$, $\tau = (\tau_1^\top, \dots, \tau_{n^c}^\top)^\top$ とおく。(t, $\tau^\top$) $^\top \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n^c n^d}$ を変数とする次の数理計画問題を考える。

$$\begin{aligned} t^* &:= \max \left\{ t \mid \sum_{j=1}^{n^d} \tau_{lj} \Omega_j(t, \bar{\mathbf{a}}) + H_l(u_l^c) \geq \mathbf{O}, \right. \\ &\quad \left. \tau_{l1}, \dots, \tau_{ln^d} \geq 0, \quad l = 1, \dots, n^c \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

このとき、ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c)$ は $\widehat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c)^2 \geq t^*$ を満たす。

証明. $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n^m}$ から $\mathbf{R}^{n^d}$ への点集合写像 $\bar{\mathcal{U}}$ を

$$\bar{\mathcal{U}}(\alpha, \bar{\mathbf{a}}) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^{n^d} \mid -(\mathbf{u}^\top, 1) \Omega_j(\alpha^2, \bar{\mathbf{a}}) (\mathbf{u}^\top, 1)^\top \geq 0, \quad j = 1, \dots, n^d \right\}$$

で定義する。 $\mathcal{U}$ の定義(6) および(19), (20) より、

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\alpha, \bar{\mathbf{a}}) \implies \mathbf{u} \in \bar{\mathcal{U}}(\alpha, \bar{\mathbf{a}}) \quad (23)$$

が成り立つ。補題 2.2 および S-Lemma (補題 2.3) より、命題

$$\mathbf{u} \in \bar{\mathcal{U}}(\alpha, \bar{\mathbf{a}}) \implies \mathbf{u} \in \mathcal{F}(\mathbf{u}^c) \quad (24)$$

が真であるための十分条件は、

$$H_l(u_l^c) \geq - \sum_{j=1}^{n^d} \tau_{lj} \Omega_j(\alpha^2, \bar{\mathbf{a}}), \quad l = 1, \dots, n^c$$

を満たす $\tau_{l1}, \dots, \tau_{ln^d} \geq 0$ が存在することである。(23), (24) より、問題(22) の実行可能領域は問題(7) の実行可能領域を含む。従って題意が成立し、問題(22) の解は問題(7) の下界を与える。 $\square$

$\mathcal{U}(\alpha, \bar{\mathbf{a}})$ と $\bar{\mathcal{U}}(\alpha, \bar{\mathbf{a}})$ の関係を、図 1 (d) に模式的に示す。 $\mathcal{U}(\alpha, \bar{\mathbf{a}})$ の代わりに、 $\bar{\mathcal{U}}(\alpha, \bar{\mathbf{a}})$ が $\mathcal{F}(\mathbf{u}^c)$ に含まれる場合の中で最大の α を求める問題を考える。問題(22) は、この問題の SDP 緩和に基づく近似解を与える。特に、命題 4.1 は、(22) で定義される $(t^*)^{1/2}$ が $\widehat{\alpha}$ の下界、即ち保守的な近似解であることを表している。従って、 $\zeta \in \mathcal{Z}((t^*)^{1/2})$ を満たす任意の ζ に対して制約条件(4) が満たされることが保証される。

注意 4.2. 命題 4.1 において、外力のみが不確定性を持つ場合、即ち $a^p = 0$, $p = 1, \dots, n^a$, である場合を考える。このとき、

$$g_l = \frac{d_l^\top \mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{f}} + u_l^c}{\left\| (d_l^\top \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^p)_{p=1}^{n^a} \right\|_2}, \quad h_l = \frac{-d_l^\top \mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{f}} + u_l^c}{\left\| (d_l^\top \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^p)_{p=1}^{n^a} \right\|_2}$$

とおくと、ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}$ は次式で計算できる。

$$\widehat{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{u}^c) = \min_{l=1, \dots, n^c} \{g_l, h_l\}.$$

証明は Kanno and Takewaki¹⁷, Proposition 5.1 を参照。 $\square$

5 半正定値計画法および二分法に基づくアルゴリズム

次の命題は、問題(22) の特徴を述べている。

命題 5.1. 問題(22) は準凸計画問題である。

証明. 関数 $\phi: \mathbf{R}^{n^c n^d} \mapsto \mathbf{R}$ を、

$$\begin{aligned} -t &\geq \phi(\tau) \iff \\ \sum_{j=1}^{n^d} \tau_{lj} \Omega_j(t, \bar{\mathbf{a}}) + H_l(u_l^c) &\geq \mathbf{O}, \quad l = 1, \dots, n^c \end{aligned}$$

を満たすように定義すると、問題(22) は

$$-t^* = \min \left\{ \phi(\tau) \mid \tau_{l1}, \dots, \tau_{ln^d} \geq 0, \quad l = 1, \dots, n^c \right\} \quad (25)$$

と書き直せる。 $\beta \in \mathbf{R}$ に対して集合 $\mathcal{L}_\phi(\beta) \subset \mathbf{R}^{n^c n^d}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi(\beta) &= \left\{ \tau \in \mathbf{R}^{n^c n^d} \mid \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^{n^d} \tau_{lj} \Omega_j(-\beta, \bar{\mathbf{a}}) + H_l(u_l^c) \geq \mathbf{O}, \quad l = 1, \dots, n^c \right\} \end{aligned}$$

で定義すると、 ϕ の作り方より、 $\mathcal{L}_\phi(\beta)$ は ϕ のレベル集合である。任意の $\beta \in \mathbf{R}$ に対して、 $\mathcal{L}_\phi(\beta)$ は線形行列不等式系を満たす $\tau \in \mathbf{R}^{n^c n^d}$ の集合であるから、凸集合である²⁵。従って、問題(25) の目的関数 ϕ は準凸関数である。このことから、問題(25) は準凸計画問題(10) に帰着できる。 $\square$

命題 5.1 は、二分法(bisection method)²⁴ を用いることで、問題(22) の大域的最適解が得られることを表している。(t, $\bar{\mathbf{a}}^\top$) $^\top$ を固定し、(s, $\tau^\top$) $^\top \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n^c n^d}$ を変数とする次の数理計画問題を考える。

$$\begin{aligned} s^* &:= \min \left\{ s \mid \sum_{j=1}^{n^d} \tau_{lj} \Omega_j(t, \bar{\mathbf{a}}) + H_l(u_l^c) + \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & s \end{pmatrix} \geq \mathbf{O}, \right. \\ &\quad \left. \tau_l \geq \mathbf{0}, \quad l = 1, \dots, n^c \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

問題(26) は、SDP 問題(9) に帰着させることができる。問題(26) の最適解を $(s^*, (\tau^*)^\top)^\top$ とおく。 $s^* \leq 0$ のとき、 $(t, (\tau^*)^\top)^\top$ は問題(22) の実行可能解であるから、 $t^* \geq t$ が成り立つ。また、 $s^* > 0$ のとき、 $t^* < t$ が成り立つ。そこで、問題(22) に対し、二分法²⁴ に基づく次のアルゴリズムを提案する。

図3 2部材トラス

アルゴリズム 5.2.

Step 0: $\underline{t}^0 \leq \bar{t}^0, \bar{t}^0 \geq t^*, \epsilon > 0$ を選び, $k := 0$ とする.

Step 1: $\bar{t}^k - \underline{t}^k \leq \epsilon$ ならば, 反復終了. それ以外は, $t := (\underline{t}^k + \bar{t}^k)/2$ とおく.

Step 2: SDP 問題 (26) を解き, s^* を求める.

Step 3: $s^* \leq 0$ ならば $\underline{t}^{k+1} := t, \bar{t}^{k+1} := \bar{t}^k$, それ以外は $\bar{t}^{k+1} := t, \underline{t}^{k+1} := \underline{t}^k$ とおく.

Step 4: $k := k + 1$ として Step 1 へ.

アルゴリズム 5.2 は, $\lceil \log_2((\bar{t}^0 - \underline{t}^0)/\epsilon) \rceil$ 個の問題 (26) を解くことで問題 (22) の大域的最適解を得る. ただし, $\lceil p \rceil$ は p 以上の最小の整数である. Step 0 において, 例えば $\underline{t}^0 = 0$ と選べばよい. また, $\bar{t}^0$ の候補としては, $a^p = 0, p = 1, \dots, n^d$, とおいた場合のロバストネス関数などが考えられる. 注意 4.2 に示したように, このときのロバストネス関数は容易に求めることができる. 各反復の Step 2 において, 問題 (26) は SDP 問題 (9) に帰着できる. ただし, $m = n^c n^d + 1$, $n = n^c(2n^d + 1)$ が成り立つ. SDP 問題 (26) の大域的最適解は, 主双対内点法を用いることで効率よく求めることができ, 必要な四則演算の回数は m, n の多項式で押さえられる²⁵. 従って, 与えられた ϵ に対し, アルゴリズム 5.2 が収束するまでに要する四則演算の回数は n^c, n^d の多項式で押さえられる. これは, トラスの自由度や制約条件 (4) の次元が大きくなった場合にも, 計算時間が急激に増えることはないことを表しているため, 重要である.

6 例題

アルゴリズム 5.2 を用いて, 種々のトラスのロバストネス関数を求める. アルゴリズム 5.2 の Step 2 では, SDP 問題に対する主双対内点法の実装である SeDuMi Ver. 1.05²⁶ を用いて問題 (26) を解く. 数値実験には Pentium M (1.5GHz : 1GB メモリ) および MATLAB Ver. 6.5.1³⁰ を用いる.

以下では, 問題の簡略化のために座屈の影響を考慮せず, (3) で表されるように引張と圧縮で同じ限界値 σ_i^c を設定する. しかし, 双方に異なる限界値を設定しても, 応力制約を (4) の形式に書き直すことで, 同様の取り扱いが可能である.

6.1 2部材トラス

図 3 に示す 2 部材トラスを考える. 無応力状態における部材 (1) および (2) の長さは, それぞれ 100 cm および $100\sqrt{2}$ cm である. 節点 (b), (c) はピン支持されており, $n^d = 2, n^m = 2$ である. 部材断面積および外力の公称値を $\bar{a} = (20.0, 40.0)^T$ cm² および $\bar{f} = (98.0, 0)^T$ kN

図4 (19), (20), (27) および $\alpha = 4.08$ を満たすランダムに生成された ζ に対する 2 部材トラスの部材応力

図5 (19), (20), (28) および $\alpha = 0.8944$ を満たすランダムに生成された ζ に対する 2 部材トラスの部材応力

で与える. さらに, $\sigma_i^c := \sigma_i^c = 98.0$ MPa, $i = 1, 2$, とおいて, 各部材の応力制約 (3) を考慮する.

部材断面積と外力の不確定性を表す集合 $\mathcal{T}$ が (19), (20) および

$$a^1 = 1.0 \text{ cm}^2, \quad a^2 = 2.0 \text{ cm}^2, \quad (27)$$

$$f^1 = (9.8, 0)^T \text{ kN}, \quad f^2 = (0, 9.8)^T \text{ kN}$$

で与えられるとする. ただし, $n^a = n^f = 2$ である. $\epsilon = 10^{-4}$ とおくと, アルゴリズム 5.2 によりロバストネス関数の下界として $\hat{\alpha}(\bar{a}, \sigma^c) \geq 4.08$ が得られる. この結果を検証するため, $\alpha = 4.08$ とおき, (19), (20) を満たす ζ を考える. 図 4 に, ランダムに作られた $\zeta \in \mathcal{Z}(4.08)$ に対応する $(\sigma_1/\sigma^c, \sigma_2/\sigma^c)^T$ を示す. 図 4 に示される全の場合において, 制約条件 (3) が満たされている. 即ち, $\alpha \leq 4.08$ の範囲での部材断面積および外力の変動に対しては, このトラスは応力制約を満足することが保証される. このように, $\hat{\alpha}$ の下界, 即ち保守的な近似値が得られたことが分かる.

次に, (27) の代わりに, 断面積が外力に対して相対的に大きな変動を持つ場合として

$$a^1 = 10.0 \text{ cm}^2, \quad a^2 = 20.0 \text{ cm}^2, \quad (28)$$

$$f^1 = (9.8, 0)^T \text{ kN}, \quad f^2 = (0, 9.8)^T \text{ kN}$$

を仮定する. アルゴリズム 5.2 を用いると, ロバストネス関数の下界として $\hat{\alpha}(\bar{a}, \sigma^c) \geq 0.8944$ が得られる. 図 5 は, ランダムに作ら

図6 (19), (20), (29) および $\alpha = \bar{\alpha}$ を満たすランダムに生成された ζ に対する 2 部材トラスの部材応力

図7 29 部材トラス

れた $\zeta \in \mathcal{Z}(0.8944)$ に対応する $(\sigma_1/\sigma^c, \sigma_2/\sigma^c)^T$ を表す。図5に示される全ての場合において、制約条件(3)が満たされていることが分かる。また、(28)は(27)と比べ、断面積の変動が外力の変動に対して相対的に大きいことを意味しており、得られた $\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \sigma^c)$ の下界は(27)の場合の 4.08 よりも小さい。

比較のため、断面積 $\mathbf{a}$ が不確実性を持たない場合を考える。即ち、(19), (20)において

$$\mathbf{n}^a = 0, \quad \mathbf{f}^1 = (9.8, 0)^T \text{ kN}, \quad \mathbf{f}^2 = (0, 9.8)^T \text{ kN} \quad (29)$$

を仮定する。このとき、注意 4.2 に示した手法により、ロバストネス関数として $\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \sigma^c) = 7.0711$ が得られる。図6は、ランダムに作られた $\zeta \in \mathcal{Z}(\bar{\alpha})$ に対応する $(\sigma_1/\sigma^c, \sigma_2/\sigma^c)^T$ を表す。図6に示す全ての場合に、制約条件(3)が満たされている。また、ロバストネス関数の正確な値が得られているため、 ζ の選び方によっては、 $\sigma_1 \leq \sigma_1^c$ がアクティブとなり得ることが分かる。さらに、条件(29)は断面積が不確実性を有さないため、条件(27)や条件(28)の場合に比べて得られたロバストネス関数の値は大きい。

6.2 29 部材トラス

図7に示す 29 部材トラスを考える。トラスの x 軸および y 軸方向の部材の長さは、ともに 50.0 cm である。また、節点 (a), (b) はピン支持されており、 $n^d = 20, n^m = 29$ である。

外力の公称値 $\bar{\mathbf{f}}$ として、節点 (c) および (d) に $(0, -9.8)$ kN を作

図8 (19), (20), (30), (31), (32) および $\alpha = 2.4578$ を満たすランダムに生成された ζ に対する 29 部材トラスの部材応力

図9 (19), (20), (31), (32), (34) および $\alpha = 4.0534$ を満たすランダムに生成された ζ に対する 29 部材トラスの部材応力

用させる。また、部材断面積の公称値を

$$\bar{a}_i = 40.0 \text{ cm}^2, \quad i = 1, \dots, n^m \quad (30)$$

とする。さらに、 $\sigma^c := \sigma_i^c = 9.8 \times 10^2$ MPa, $i = 1, \dots, n^m$, とおいて、各部材の応力制約(3)を考慮する。

まず、 $n^a = n^m, n^f = n^d$ とおき、集合 $\mathcal{T}$ が (19), (20) および

$$\mathbf{a}^p = 2.0 \text{ cm}^2, \quad p = 1, \dots, n^m, \quad (31)$$

$$\mathbf{f}_j^p = \begin{cases} 1.96 \text{ kN}, & \text{if } j = p, \\ 0, & \text{if } j \neq p, \end{cases} \quad p = 1, \dots, n^d \quad (32)$$

で与えられる場合を考える。即ち、全ての節点に任意の方向の不確定外力が作用し得る。 $\bar{f}^0 = 20.0, \bar{f}^1 = 0.0, \epsilon = 10^{-3}$ とおき、アルゴリズム 5.2 を用いると、ロバストネス関数の下界として $\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{a}}, \sigma^c) \geq 2.4578$ が得られる。ただし、アルゴリズム 5.2 が収束までに要した反復回数は 15 回である。各反復の Step 2 において SDP 問題 (26) を解くために要した CPU 時間の平均値は 6.57 秒、標準偏差は 0.68 秒である。また、SDP 問題 (26) のサイズは $m = 581, n = 1189$ である。

この結果を検証するため、 $\alpha = 2.4578$ とおき、(19), (20) を満たす ζ を考える。図8は、ランダムに作られた $\zeta \in \mathcal{Z}(2.4578)$ に対し、横軸に部材番号 i 、縦軸に無次元化応力 σ_i/σ^c を示したものである。図8に示される全ての場合において、制約条件(3)が満たされてい

る。即ち、 $\alpha \leq 2.4578$ の範囲の変動に対しては、このトラスは応力制約を満足することが保証される。

次に、 $n^f = 12$ とおき、節点 (c)–(h) のみに対して f^p を (32) と同様に定義する。従って、その他の節点には外力は作用しない。このとき、アルゴリズム 5.2 を用いて得られる $\hat{\alpha}(\bar{\alpha}, \sigma^e)$ の下界は 2.6418 である。(31), (32) を用いた場合よりも外力の不確定性の自由度が小さいので、ロバストネス関数が大きいことが分かる。

$\mathcal{T}$ の定義 (19) において a^p および f^p を適当に選べば、部材断面積と外力の相対的な不確定性の大きさを変化させることができる。例えば、(31) の代わりに、部材断面積の不確定性を

$$a^p = 0.2 \text{ cm}^2, \quad p = 1, \dots, n^m \quad (33)$$

で表し、これと (32) を用いて $\mathcal{T}$ を定義する。このときアルゴリズム 5.2 を用いて得られる $\hat{\alpha}(\bar{\alpha}, \sigma^e)$ の下界は 3.0534 である。

最後に、(30) の代わりに、部材断面積の公称値を

$$\bar{a}_i = \begin{cases} 15 \text{ cm}^2, & i = 9, 15, 18, 27, \\ 65 \text{ cm}^2, & i = 1, 2, 24, 26, \\ 40 \text{ cm}^2, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (34)$$

とおき、(31), (32) を用いて $\mathcal{T}$ を定義する。アルゴリズム 5.2 を用いて得られる $\hat{\alpha}(\bar{\alpha}, \sigma^e)$ の下界は 4.0534 である。従って、図 8 において応力の絶対値が大きくなり得る部材の断面積を増やすことで、ロバストネス関数を大きくすることができることが例証された。図 9 は、ランダムに作られた $\zeta \in \mathcal{Z}(4.0534)$ に対応する部材応力を示す。アルゴリズム 5.2 を用いて得られる解は、ロバストネス関数の下界であり、一般には正解ではない。従って、制約条件 (3) のいずれかがアクティブとなる場合は図 9 には現れていない。

アルゴリズム 5.2 の反復回数は $\bar{t}^0, \underline{t}^0, \epsilon$ のみに依存するので、29 部材トラスの全ての例題において同じである。また、各反復の Step 2 において解く SDP 問題 (26) の次元も同じであるので、アルゴリズム 5.2 が要する計算時間はいずれの例題でも同じ程度である。

7 結論

本稿では、トラスのロバスト性を評価する指標としてロバストネス関数を考え、その近似解を効率よく得る手法を提案した。

トラスの部材剛性および外力がインフ・ギャップ不確定性モデル¹⁵に基づく不確定性を有することを仮定し、応力制約に関するトラスのロバストネス関数を、半無限計画問題の最適値として定式化した。特に、不確定性集合が不確定性パラメータのノルムに関する不等式制約を用いて定義される場合について考察した。

次に、非凸型 2 次計画問題に対する半正定値計画緩和を用いることで、半無限計画問題の下界が有限次元の数値計画問題を解くことにより求められることを示した。得られた問題が準凸計画問題であることを示し、半正定値計画問題を繰り返し解くことで大域的最適解を得るアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムが収束するまでに要する四則演算の回数は、構造物の自由度と不確定性パラメータの次元の多項式で押さえられる。従って、本手法はロバストネス関数に対して妥当な計算複雑度を持つ近似アルゴリズムである。

種々の数値例題を通し、本手法がロバストネス関数の妥当な下界、即ち保守的な近似値を与えることを示した。

参考文献

- 1) Tsompanakis, Y. and Papadrakakis, M., Large-scale reliability-based structural optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, **26** (2004) 429–440.

- 2) Qu, X. and Haftka, T., Reliability-based design optimization of stiffened panels, *Proc. 4th Int. Sym. on Uncertainty Modeling and Analysis (ISUMA'03)*, College Park, Maryland, 2003.
- 3) Choi, K.K., Tu, J. and Park, Y.H., Extensions of design potential concept for reliability-based design optimization to nonsmooth and extreme cases, *Struct. Multidisc. Optim.*, **22** (2001) 335–350.
- 4) Kharmanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A. and Lemaire, M., Reliability-based topology optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, **26** (2004) 295–307.
- 5) Doltsinis, I. and Kang, Z., Robust design of structures using optimization methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **193** (2004) 2221–2237.
- 6) Ben-Tal, A. and Nemirovski, A., Robust truss topology optimization via semidefinite programming, *SIAM J. Optim.*, **7** (1997) 991–1016.
- 7) Pantelides, C.P. and Ganzerli, S., Design of trusses under uncertain loads using convex models, *J. Struct. Engrg. (ASCE)*, **124** (1998) 318–329.
- 8) Han, J.S. and Kwak, B.M., Robust optimization using a gradient index: MEMS applications, to appear in *Struct. Multidisc. Optim.*
- 9) 曾我部博之, 非線形感度によるロバスト性を考慮した平面骨組の最適塑性設計, 日本建築学会構造系論文集, **556** (2002) 63–69.
- 10) Ben-Haim, Y. and Elishakoff, I., *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, Elsevier: New York, NY, 1990.
- 11) Ben-Tal, A. and Nemirovski, A., Robust optimization — methodology and applications, *Math. Programming*, **B92** (2002) 453–480.
- 12) Ben-Tal, A. and Nemirovski, A., *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*, SIAM: Philadelphia, PA, 2001.
- 13) Calafiore, G. and El Ghaoui, L., Ellipsoidal bounds for uncertain linear equations and dynamical systems, *Automatica*, **40** (2004) 773–787.
- 14) Wolkowicz, H., Saigal, R. and Vandenberghe, L. (eds.), *Handbook of Semidefinite Programming — Theory, Algorithms, and Applications*, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands, 2000.
- 15) Ben-Haim, Y., *Information-gap Decision Theory*, Academic Press: London, UK, 2001.
- 16) 竹脇出, 不確定性を有する構造物のロバスト性の非確率的評価法, 日本建築学会構造系論文集, **581** (2004) 55–61.
- 17) Kanno, Y. and Takewaki, I., Direct evaluation of robustness functions of trusses associated with stress constraints, *BGE Research Report 04-03*, Building Geoenvironment Engineering Laboratory, Kyoto University, Japan, June 2004; available at: <http://www.archi.kyoto-u.ac.jp/bge/RR/>.
- 18) Ito, S., Liu, Y. and Teo, K.L., A dual parameterization method for convex semi-infinite programming, *Annals of Operations Research*, **98** (2000) 189–213.
- 19) 古川暢宏, ロバストネスを最大化する最適設計, 第 6 回最適化シンポジウム講演論文集, 日本機械学会, pp. 269–272, 2004.
- 20) Rohn, J., Overestimations in bounding solutions of perturbed linear equations, *Linear Algebra and its Applications*, **262** (1997) 55–65.
- 21) 久保幹雄, 『組合せ最適化とアルゴリズム』, 共立出版, 2000.
- 22) Gromicho, J.A.S., *Quasiconvex Optimization and Location Theory*, Kluwer: Dordrecht, The Netherlands, 1998.
- 23) Fujie, T. and Kojima, M., Semidefinite programming relaxation for nonconvex quadratic programs, *Journal of Global Optimization*, **10** (1997) 367–380.
- 24) Boyd, S. and Vandenberghe, L., *Convex Optimization*, Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2004.
- 25) 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博, 『内点法』, 朝倉書店, 2001.
- 26) Sturm, J.F., Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software*, **11/12** (1999) 625–653.
- 27) Ohsaki, M., Fujisawa, K., Katoh, N. and Kanno, Y., Semi-definite programming for topology optimization of truss under multiple eigenvalue constraints, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **180** (1999) 203–217.
- 28) Kanno, Y., Ohsaki, M. and Katoh, N., Sequential semidefinite programming for optimization of framed structures under multimodal buckling constraints, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **1** (2001) 585–602.
- 29) 福島雅夫, 『非線形最適化の基礎』, 朝倉書店, 2001.
- 30) The MathWorks, Inc., *Using MATLAB*, The MathWorks, Inc.: Natick, MA, 2002.

(2004年 7 月 1 日原稿受理, 2005年 2 月 4 日採用決定)