波浪中を曳航される弾性円板状浮体の流力弾性挙動

その2 波漂流力の解の導出と数値解析例

HYDROELASTIC BEHAVIOR OF A FLOATING ELASTIC CIRCULAR PLATE
ADVANCING IN WAVES

Part 2 Analytical solution for wave drift forces and numerical results

松井 徹哉*

Tetsuya MATSUI

The theory developed in Part 1 for the hydroelastic behavior of a mat-like floating circular plate advancing slowly in waves is extended in this paper to derive the solution for the second-order wave drift forces. The potential flow theory is employed with low forward-speed assumption and zero-draught approximation. The far-field approach based on the principle of conservation of momentum is applied to obtain the analytical expression for the wave drift forces. Numerical results are presented for a typical plate geometry, which demonstrate the significant effect of the forward speed on the hydroelastic response and wave drift forces. It is also shown that wave drift damping provides an important damping source for the slow-drift motion of a mat-like floating structure.

Keywords : *very large floating structure, hydroelastic response, wave drift force, wave drift damping, forward speed, wave-current interaction, towing*
大型浮体式構造物, 流力弾性応答, 波漂流力, 波漂流減衰, 前進速度, 波一流れ相互干渉, 曳航

1. 序

メガフロートの実海域実験¹⁾を契機として, 海上空港や防災基地等を想定した大型浮体式海洋構造物への関心が高まってきている。ここで対象とする浮体構造物は, 平面的な広がり数が数百 m から数 km に及ぶ巨大なものであり, その波浪中における応答は剛体変位よりも弾性変形が支配的となり, 流体-弾性体連成作用を考慮した流体力および応答の評価が不可欠となる。

大型浮体式海洋構造物の流力弾性挙動については, 近年の精力的な研究によりその特性が明らかにされつつある²⁾。しかしそれら既往の研究のほとんどは浮体が定位置に保持されていると仮定しており, 前進速度を有する場合あるいはこれと等価な波と流れが共存する場合について扱った研究は極めて数少ない。

大型浮体式構造物の場合は, 予めユニットごとにドックヤードで製作し現場へ曳航して洋上で接合する施工法が採られることが多い。また完成後は別の海域へ曳航され再利用に供されることも想定される。完成時には防波堤などで囲まれた静穏な海域に設置されるのに比べ, 曳航中は外洋で荒天に遭遇する確率も高いため, 曳航中の応答によって設計が支配されると考えられるが, 曳航速度が浮体式構造物ユニットの流力弾性挙動に及ぼす影響について検討した研究は, 原ら³⁾によるメガフロートユニットの曳航実験を除いては

見当たらない。

海洋構造物が波浪中を前進する場合あるいは波と流れの複合作用を受ける場合の流体力は, 前進速度や流れの存在によって著しく影響されることは良く知られているところである。この影響は波漂流力に対して特に顕著であり, 大型浮体の場合, 1~2m/s の前進速度が加わるにより, 波漂流力は前進速度がない場合の150~200%に増加することもありうる。波漂流力がわずかな前進速度の存在によって著しく増加する事実は, 波浪中で長周期運動を行う浮体-係留系の重要な減衰機構の存在を意味する。この減衰力の増加は波漂流減衰 (wave drift damping) として知られるもので, Wichers⁴⁾によってその存在が指摘されて以来多くの研究がなされ, その現象が明らかにされてきた⁵⁾。しかし, それら既往の研究は剛体運動が支配的となる比較的小規模な浮体を対象としたものであり, 弾性応答が無視できないような大型浮体を扱った研究は, 浅喫水箱型浮体の波漂流減衰を特異点分布法により計算した Watanabe et al.⁶⁾ の研究を除いては, 見当たらない。

著者は, 前稿 (その1)²⁾において, 波浪中を曳航される弾性円板状浮体の流力弾性境界値問題を低前進速度の仮定と零喫水の近似に基づき定式化し, 領域分割法を適用してその解析解を導出した。本稿では, これを拡張して弾性円板状浮体に働く定常波漂流力の

* 名城大学理工学部建築学科 教授・工博

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Science and Technology, Meijo Univ., Dr. Eng.

解析的表示を導く。解の導出には Maruo⁷⁾ の運動量理論を拡張した Grue and Biberg⁸⁾ の遠場表示式を用いる。さらに数値解析例によって、流体力学応答や波漂流力に及ぼす曳航速度の影響と浮体一係留系の長周期運動における波漂流減衰の効果について検討する。

2. 理論的背景

理論的背景については(その1)に詳しく述べられているので、ここでは後の定式化に必要な最小限の記述にとどめる。用いる記号等も、特に説明のない限り(その1)と同一とする。

規則波中を一定速度 U で前進する平底円板状浮体を考える。浮体は漂流移動が拘束され、鉛直方向にのみ変位するものとする。円板の厚さおよび喫水深はその半径 a に比べ十分小さく、零喫水近似が成り立ち、円板の存在による流れの乱れは無視できるものと仮定する。水深 h は一定であるとする。

水底面上に原点をもつ空間固定座標系 $oxyz$ を、 x の負軸が浮体の進行方向に、 z 軸が鉛直上向きに一致するようにとる。さらに、円筒極座標 (r, θ) を $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ によって定義する。

入射波の振幅を ζ_0 、周波数を ω_0 、波数を k 、入射波の伝播方向が x 軸となす角度を β とする。

浮体の運動および入射波の振幅は微小で、線形重ね合わせが成り立つものと仮定し、時間 t における浮体の鉛直変位 $w(t)$ を、剛体モード

$$Z_{00} = 1, \quad Z_{10} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \theta = \frac{r}{a} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \theta \quad (1)$$

および空中での固有弾性振動モード

$$Z_{nj} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta \quad (n = 0, \dots, \infty, j = 1, \dots, \infty) \quad (2)$$

の重ね合わせによって、次式のように表現する。

$$w(t) = \Re \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \xi_{nj} \\ \eta_{nj} \end{pmatrix} Z_{nj} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta e^{-i\omega t} \right\} \quad (3)$$

ここに、 ω は出会い周波数を示し、次式によって定義される。

$$\omega = \omega_0 + kU \cos \beta \quad (4)$$

周辺自由円板の空中での (n, j) 次固有弾性振動モードは次式によって与えられる。

$$Z_{nj} = A_{nj} J_n(k_{nj}r) + B_{nj} I_n(k_{nj}r) \quad (5)$$

ここに、 J_n は n 次の第1種ベッセル関数を、 I_n は n 次の第1種変形ベッセル関数を示す。また k_{nj} は波数であり、円板の空中における (n, j) 次固有円振動数 ω_{nj} と次式によって関係づけられる。

$$k_{nj}^4 = \frac{m_{pl}}{D_{pl}} \omega_{nj}^2 \quad (6)$$

ここに、 D_{pl} は円板の空中における曲げ剛性を、 m_{pl} は円板の単位面積当たりの質量を示す。

流体は非粘性、非圧縮性の理想流体で、その運動は非回転性であると仮定すると、流体の運動を記述する速度ポテンシャルは次式のように表される。

$$\Phi_T(t) = Ux + \Phi(t) \quad (7)$$

ここに、 Ux は一様流れの定常ポテンシャルを、 Φ は非定常ポテンシャルを示す。

非定常ポテンシャル Φ は時間 t の関数であり、次式のように記述される。

$$\Phi(t) = \Re[\phi e^{-i\omega t}] \quad (8)$$

複素ポテンシャル ϕ は、入射波ポテンシャル ϕ_I 、散乱波ポテンシャル ϕ_S および各モードの運動により生ずる発散波ポテンシャル ϕ_{nj} の和として、次式のように表現される。

$$\phi = \phi_I + \phi_D \quad (9)$$

$$\phi_D = \phi_S - i\omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \xi_{nj} \\ \eta_{nj} \end{pmatrix} \phi_{nj} \quad (10)$$

モード振幅 ξ_{nj} , η_{nj} は次の運動方程式を解くことによって得られる。

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[-\omega^2 (m_{nj,li} + M_{nj,li}) - i\omega (c_{nj,li} + C_{nj,li}) + k_{nj,li} + K_{nj,li} \right] \begin{pmatrix} \xi_{li} \\ \eta_{li} \end{pmatrix} = F_{nj} \quad (11)$$

ここに、

$$m_{nj,li} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a m_{pl} Z_{nj} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta \cdot Z_{li} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} l\theta \cdot r dr \quad (12)$$

$$c_{nj,li} = 2h_{li}\omega_{li}m_{nj,li}, \quad k_{nj,li} = \omega_{li}^2 m_{nj,li} \quad (13)$$

$$M_{nj,li} + \frac{i}{\omega} C_{nj,li} = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left(\phi_{li} + \frac{i\tau}{\nu} \frac{\partial \phi_{li}}{\partial x} \right) Z_{nj} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta \cdot r dr \quad (14)$$

$$K_{nj,li} = \rho g \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a Z_{nj} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta \cdot Z_{li} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} l\theta \cdot r dr \quad (15)$$

$$F_{nj} = \rho i\omega \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left[\phi_I + \phi_S + \frac{i\tau}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_I + \phi_S) \right] Z_{nj} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta \cdot r dr \quad (16)$$

で、 h_{li} は円板の空中における (l, i) 次の材料減衰定数を、 ρ は流体密度を、 g は重力加速度を示し、

$$\nu = \omega^2/g, \quad \tau = \omega U/g \quad (17)$$

である。

$m_{nj,li}$, $c_{nj,li}$ および $k_{nj,li}$ は空中における一般化質量係数、一般化減衰係数および一般化復元力係数を、 $M_{nj,li}$ および $C_{nj,li}$ は一般化付加質量係数および一般化付加減衰係数を、 $K_{nj,li}$ は浮力変化による一般化静的復元力係数を、 F_{nj} は一般化波強制力をそれぞれ表す。(1), (5) と(その1)で得られたポテンシャルの解を代入し積分を実行すれば、(12) および (14)~(16) の陽な表示式を得ることができる。これらの具体的な表示式は付録 A に掲載されている。

3. 波漂流力の解析的表示

浮体に作用する波漂流力を評価する方法には、運動量理論に基づく方法⁷⁾と流体圧の直接積分による方法⁹⁾がある。前者は浮体を囲む任意の検査面の運動量の変化から定常波漂流力を評価する方法で、Maruo⁷⁾は遠方におけるポテンシャルの漸近解(遠場解)を用いることにより無限水深における定常波漂流力の簡潔な表示式を導いている。Nossen et al.¹⁰⁾はMaruoの理論を前進速度が存在する場合に適用し、Grue and Biberg⁸⁾はこれを拡張して有限水深の影響を考慮した定常波漂流力の表示式を与えている。

Grue and Biberg⁸⁾によれば、浮体に作用する x および y 方向の定常波漂流力は、遠方 $r \rightarrow \infty$ におけるポテンシャル Φ の漸近解を用いて、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \overline{F_x} = & \frac{\rho}{2g} \int_0^{2\pi} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=h}^2} \cos \theta r d\theta \\ & + \rho \int_0^{2\pi} \int_0^h \left[\frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \cos \theta - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] dz r d\theta \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{F_y} = & \frac{\rho}{2g} \int_0^{2\pi} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=h}^2} \sin \theta r d\theta \\ & + \rho \int_0^{2\pi} \int_0^h \left[\frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \sin \theta - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] dz r d\theta \quad (19) \end{aligned}$$

ここに、 $\overline{\quad}$ は時間平均を示す。

(その1) で得られた解を用いれば、入射波ポテンシャル ϕ_I および攪乱波ポテンシャル ϕ_D の $r \rightarrow \infty$ における漸近解は次式のよう表される。

$$\phi_I \sim -\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} \frac{\cosh kz}{\cosh kh} e^{ikr \cos(\theta-\beta)} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \phi_D \sim & r^{-1/2} e^{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[\left\{ \left(\frac{H_n^0}{K_n^0} \right) + \tau \left(\frac{H_n^1}{K_n^1} \right) \right\} \frac{\cosh kz}{\cosh kh} \right. \\ & \left. + \tau k \left(\frac{H_n^{0*}}{K_n^{0*}} \right) \left(\frac{z \sinh kz}{\cosh kh} + \frac{ir \cosh kz}{\cosh kh} \right) \right] \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\theta \quad (21) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{pmatrix} H_n^0 \\ K_n^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{H_n^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(2n+1)\pi/4} \left[E_{n0}^0 - \frac{i\omega}{\epsilon_n} \left(\frac{\xi_{nj}}{\eta_{nj}} \right) G_{nj0}^0 \right] \quad (22)$$

$$H_0^1 = \frac{1}{H_0^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \left[E_{00}^1 - i\omega \{ \xi_{0j} G_{0j0}^1 + \xi_{1,j} G_{1,j0}^{1-} \} \right]$$

$$K_0^1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} H_n^1 \\ K_n^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{H_n^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(2n+1)\pi/4} \left[E_{n0}^1 - \frac{i\omega}{\epsilon_n} \left\{ \left(\frac{\xi_{nj}}{\eta_{nj}} \right) G_{nj0}^1 + \left(\frac{\xi_{n+1,j}}{\eta_{n+1,j}} \right) G_{n+1,j0}^{1-} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\epsilon_{n-1}} \left(\frac{\xi_{n-1,j}}{\eta_{n-1,j}} \right) G_{n-1,j0}^{1+} \right\} \right], \quad n \geq 1 \quad (23)$$

$$H_0^{0*} = \frac{\gamma}{H_0^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \left[E_{00}^{0*} - i\omega \{ 2 \cos \beta \xi_{0j} G_{0j0}^{0*} + i \xi_{1,j} G_{1,j0}^{0*-} \} \right]$$

$$K_0^{0*} = 0$$

$$\begin{pmatrix} H_n^{0*} \\ K_n^{0*} \end{pmatrix} = \frac{\gamma}{H_n^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(2n+1)\pi/4} \left[E_{n0}^{0*} - \frac{i\omega}{\epsilon_n} \left\{ 2 \cos \beta \left(\frac{\xi_{nj}}{\eta_{nj}} \right) G_{nj0}^0 \right. \right. \\ \left. \left. + i \left(\frac{\xi_{n+1,j}}{\eta_{n+1,j}} \right) G_{n+1,j0}^{0-} - \frac{i}{\epsilon_{n-1}} \left(\frac{\xi_{n-1,j}}{\eta_{n-1,j}} \right) G_{n-1,j0}^{0+} \right\} \right], \quad n \geq 1 \quad (24)$$

$$\gamma = \frac{1}{\tanh kh + \frac{kh}{\cosh^2 kh}} \quad (25)$$

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_n = 2 \quad (n \geq 1) \quad (26)$$

(8)~(10) および (20), (21) を (18), (19) に代入して時間平均をとり、さらに停留位相の方法¹¹⁾を用いて積分を実行し、 $O(\tau^2)$ の項を省略すれば、定常波漂流力の表示式が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \overline{F_x} = & -\frac{\rho\pi k}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \Re \left[H_n^0 \tilde{H}_{n+1}^0 + K_n^0 \tilde{K}_{n+1}^0 + \tau (H_n^0 \tilde{H}_{n+1}^1 \right. \\ & + H_{n+1}^0 \tilde{H}_n^1 + K_n^0 \tilde{K}_{n+1}^1 + K_{n+1}^0 \tilde{K}_n^1) \\ & + \tau\gamma kh (H_n^0 \tilde{H}_{n+1}^{0*} + H_{n+1}^0 \tilde{H}_n^{0*} + K_n^0 \tilde{K}_{n+1}^{0*} \\ & + K_{n+1}^0 \tilde{K}_n^{0*}) + \frac{\tau}{4} (2n+1) (H_n^0 \tilde{H}_{n+1}^{0*} - H_{n+1}^0 \tilde{H}_n^{0*} \\ & \left. + K_n^0 \tilde{K}_{n+1}^{0*} - K_{n+1}^0 \tilde{K}_n^{0*}) \right] - \frac{\rho k}{2\gamma} \Re(S) \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{F_y} = & -\frac{\rho\pi k}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \Re \left[H_n^0 \tilde{H}_{n+1}^0 - K_n^0 \tilde{H}_{n+1}^0 + \tau (H_n^0 \tilde{K}_{n+1}^1 \right. \\ & - H_{n+1}^0 \tilde{K}_n^1 - K_n^0 \tilde{H}_{n+1}^1 + K_{n+1}^0 \tilde{H}_n^1) \\ & + \tau\gamma kh (H_n^0 \tilde{K}_{n+1}^{0*} - H_{n+1}^0 \tilde{K}_n^{0*} - K_n^0 \tilde{H}_{n+1}^{0*} \\ & + K_{n+1}^0 \tilde{H}_n^{0*}) + \frac{\tau}{4} (2n+1) (H_n^0 \tilde{K}_{n+1}^{0*} + H_{n+1}^0 \tilde{K}_n^{0*} \\ & \left. - K_n^0 \tilde{H}_{n+1}^{0*} - K_{n+1}^0 \tilde{H}_n^{0*}) \right] - \frac{\rho k}{2\gamma} \Re(T) \quad (28) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} = & -\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{-i\pi/4} \left[\begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \beta \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ \tilde{H}_n^0 + \tau \tilde{H}_{n+1}^1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \tau \left(\gamma - \frac{1}{4} \right) \tilde{H}_n^{0*} \right\} \cos n\beta + 2 \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tilde{K}_n^0 \right. \right. \\ & \left. \left. + \tau \tilde{K}_n^1 + \tau \left(\gamma - \frac{1}{4} \right) \tilde{K}_n^{0*} \right\} \sin n\beta \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \beta \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n n \tilde{H}_n^{0*} \sin n\beta \right. \\ & \left. \left. \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} \tau \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \beta \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{K}_n^{0*} \cos n\beta \right] \quad (29) \end{aligned}$$

で、 $\sim$ は複素共役を示す。

4. 数値解析例および考察

解析モデルとして、直径 100m の円板状浮体ユニットを想定し、その諸元を表 1 に示す。これらはメガフロート Phase 1 モデルの値¹⁾を参考に設定したものであり、浮体は上下端にフランジをも

表 1: 円板状浮体の主要目

浮体半径	50m
水深	50m
喫水深	0.5m
浮体総厚	2m
上下フランジ厚	22.75mm
ヤング係数	206GPa
ポアソン比	0.3
曲げ剛性	$1.03 \times 10^7 \text{ kN-m}$
材料減衰定数	0.02

つ鋼製のサンドイッチ断面で構成されていると仮定している。波の伝播方向に平行に曳航される場合のみ扱い、曳航速度 $U > 0$ の場合が向かい波、 $U < 0$ の場合が追い波状態に対応するものとする。解析に際しては、採用モード数を円周方向に $n \leq 30$ 、半径方向に $j \leq 4$ まで、また m, s の級数項を $m \leq 10, s \leq 40$ まで、それぞれ収束解が得られることを確認した上で、採用している。

曳航速度がない場合と曳航速度 $U = \pm 1 \text{ m/s}$ の場合のモード振幅の周波数伝達関数を比較して図 1 に示す。なお、横軸は出会い周波数である。低周波数域では剛体モードや低次弾性モードが支配的であり、周波数の増加とともに高次弾性モードが卓越してくるが、曳航速度の影響は剛体モードに対しては小さく、弾性モードに対しては顕著である。

波上側端部 $x = -a, y = 0$ における鉛直変位の周波数伝達関数を図 2 に、円板中央部 $x = -a/5, y = 0$ における曲げ歪の周波数伝達関数を図 3 に示す。また波下側端部でピーク値をとる瞬間の鉛直変位と $x = -a/5, y = 0$ でピーク値をとる瞬間の曲げ歪の x 軸上の分布を図 4 と図 5 に示す。なお、図中の $T (= 2\pi/\omega_0)$ は入射波の周期である。図より、曳航速度の影響は鉛直変位よりも曲げ歪に

図 2: $x=-a, y=0$ における鉛直変位の周波数伝達関数 図 3: $x=-a/5, y=0$ における曲げ歪の周波数伝達関数

対してより顕著であること、また剛体モードが支配的な低周波数域 ($\omega < 0.7 \text{ rps}$) では曳航速度の影響は小さく、弾性モードが卓越する高周波数域 ($\omega > 0.7 \text{ rps}$) では、追い波状態 ($U < 0$) で応答が減少し、向かい波状態 ($U > 0$) で応答が増加することが分かる。図 2, 図 3 には、曳航速度により出会い周波数が変化する、いわゆるドップラー効果のみを考慮した近似解析の結果も示してある。これより、曳航速度の影響は波と流れの相互干渉により生じるもので、ドップラー効果のみを考慮した近似解析は鉛直変位に対する影響を過大評価し、曲げ歪に対する影響を過小評価することが分かる。

不規則波中の円板の $x = -a/5, y = 0$ における曲げ歪の有義値と曳航速度の関係を、種々の海象条件について計算した結果を図 6 に示す。なお、不規則波スペクトルには PM スペクトルを採用し、海象条件を海面上 19.5m における風速 W によって代表させている。不規則波中での曲げ歪応答は追い波状態 ($U < 0$) では減少し、向かい波状態 ($U > 0$) では増加する。曳航速度がない状態からの変化量は風速レベルにかかわらずほぼ同程度である。このことは、曳航速度の影響は海象条件が穏やかなほど大きく、逆に海象条件が厳しくなるほど小さくなることを意味する。計算した範囲で最も厳しい海象条件下 ($W = 18 \text{ m}$) での向かい波状態における応答の増加率は、曳航速度が 2 m/s 以下であれば、高々 10% 程度にとどまる。

図 1: モード振幅の周波数伝達関数

図 4: x 軸上の鉛直変位の分布

図 5: x 軸上の曲げ歪の分布

図 6: $x=-a/5, y=0$ における曲げ歪の有義値

曳航速度がない場合と曳航速度 $U = \pm 1\text{m/s}$ の場合の x 方向の定常波漂流力を比較して図 7 に示す。定常波漂流力も追い波状態 ($U < 0$) では減少し、向かい波状態 ($U > 0$) では増加する。曳航速度が波漂流力に及ぼす影響は極めて顕著であり、 $U = 1\text{m/s}$ の

図 7: 定常波漂流力

図 8: 波漂流減衰係数

曳航速度の存在により、定常波漂流力は曳航速度がない場合の約 140~180%にも増加している。この結果は、浮体一係留系の長周期運動の重要な減衰機構としての波漂流減衰の存在を意味する。

波漂流減衰係数 B_{WD} は定常波漂流力 $\bar{F}_x$ の前進速度 U に関する微係数として、次式によって定義される。

$$\bar{F}_x(U) = \bar{F}_x(0) + U B_{WD} \approx \bar{F}_x(0) + U \left(\frac{\partial \bar{F}_x}{\partial U} \right)_{U=0}$$

波漂流減衰係数を数値微分により計算した結果を図 8 に示す。

波漂流減衰の大きさを定量的に検討して見る。簡単のため、浮体一係留系を 1 自由度系と見なし、その固有円振動数を ω_n とする。臨界減衰に対する減衰比は

$$h_{WD} = \frac{B_{WD}}{2\rho\pi a^2 d \omega_n} = \frac{\zeta_0^2}{2\pi a d} \left(\frac{\omega_0}{\omega_n} \right) \bar{B}_{WD}$$

で表される。ここに、 $\bar{B}_{WD} = B_{WD}/(\rho\omega_0 a \zeta_0^2)$ で、 d は喫水深を示す。 $a = 50\text{m}$, $d = 0.5\text{m}$, $\omega_n = 0.1\text{rps}$, $\omega_0 = 1.0\text{rps}$ および図 8 を参照して $\bar{B}_{WD} \approx 1.8$ を代入すると、 $h_{WD} \approx 0.115\zeta_0^2$ 、ゆえに、 $\zeta_0 = 1\text{m}$ のとき $h_{WD} \approx 11.5\%$ 、 $\zeta_0 = 2\text{m}$ のとき $h_{WD} \approx 45.8\%$ となる。

浮体一係留系の長周期運動の減衰要因としてはほかに、粘性抗力によるものと底面摩擦力によるものがある。抗力による減衰は喫水

深が小さいので無視できるとし、底面摩擦減衰力と波漂流減衰力の大きさを比較して見る。

底面摩擦力の臨界減衰に対する減衰比は

$$h_{SF} = \frac{(1/2)\rho C_f \pi a^2 U}{2\rho \pi a^2 d \omega_n} = \frac{C_f U}{4d\omega_n}$$

で表される。ここに、 C_f は底面摩擦係数で、原ら³⁾の曳航実験の結果によれば、 $C_f \approx 0.0025$ 程度である。 $U \approx \omega_n \zeta_0 = 0.1\text{m/s}$, $C_f \approx 0.0025$, $d = 0.5\text{m}$ を代入すると $h_{SF} \approx 0.00125\zeta_0$, ゆえに、 $\zeta_0 = 1\text{m}$ のとき $h_{SF} \approx 0.125\%$, $\zeta_0 = 2\text{m}$ のとき $h_{SF} \approx 0.25\%$ となって、波漂流減衰に比べるとはるかに小さい。

5. 結語

本稿では、(その1)で導出した波浪中を曳航される弾性円板状浮体の流体力弾性応答の解析解を拡張して、弾性円板状浮体に働く定常波漂流力の解析的表示を導き、流体力弾性応答や波漂流力に及ぼす曳航速度の影響を数値解析例により考察した。

解析結果から得られた結論を以下に要約しておく。

- 1) 波浪中を曳航される円板状浮体の流体力弾性応答は曳航速度の影響を顕著に受ける。その影響は波と流れの相互干渉により生じるもので、ドップラー効果だけでは説明し得ない。
- 2) 曳航速度の影響は剛体モードに対しては小さく、弾性モードに対しては大きくなる。
- 3) 曳航速度の影響は鉛直変位よりも、曲げ歪や波漂流力に対してより顕著である。剛体モードが支配的な低周波数域 ($\omega < 0.7\text{rps}$) では曳航速度の影響は小さいが、弾性モードが卓越する高周波数域 ($\omega > 0.7\text{rps}$) では、追い波状態 ($U < 0$) で応答が減少し、向かい波状態 ($U > 0$) で応答が増加する。
- 4) 不規則波中での曲げ歪応答の曳航速度がない状態からの変化量は、海象条件にかかわらずほぼ同程度である。このことは、曳航速度の影響は海象条件が穏やかなほど大きく、逆に海象条件が厳しくなるほど小さくなることを意味する。計算した範囲で最も厳しい海象条件下での向かい波状態における応答の増加率は、曳航速度が 2m/s 以下であれば、高々10%程度にとどまる。
- 5) 曳航速度の影響は波漂流力において特に顕著である。 $U = 1\text{m/s}$ の曳航速度の存在により、定常波漂流力は曳航速度がない場合の約140~180%にも増加する。この結果は、浮体一係留系の長周期運動の重要な減衰機構としての波漂流減衰の存在を意味する。
- 6) 浮体一係留系の長周期運動の減衰要因としては、波漂流減衰が支配的であり、底面摩擦力や粘性抗力の寄与は小さい。

付記 本研究には平成12年度~14年度科学研究費補助金基盤研究(B)(2) (研究課題番号12450223)の援助が得られている。

注

注1) 関連文献の紹介は、前稿²⁾に譲る。

注2) 関連文献の紹介は、前稿⁵⁾に譲る。

参考文献

- 1) メガフロート技術研究組合：超大型浮体式海洋構造物（メガフロート）平成7年度研究成果報告書，1996年，平成8年度研究成果報告書，1997年

- 2) 松井徹哉：波浪中を曳航される弾性円板状浮体の流体力弾性挙動—その1 理論の定式化と解析解の導出—，日本建築学会構造系論文集，第577号，pp.145-152，2004年3月
- 3) 原正一，山川賢次，星野邦弘，湯川和浩：超大型浮体ユニットの実機曳航，日本造船学会論文集，第187号，pp.139-149，2000年5月
- 4) Wichers, J.E.W., and van Sluijs, M.F.: The Influence of Waves on the Low-Frequency Hydrodynamic Coefficients of Moored Vessels, *Proc. Offsh. Tech. Conf.*, OTC 3625, Houston, U.S.A., pp. 2313-2324, 1979
- 5) 松井徹哉，李相暉：波と流れの複合作用を受ける回転形浮体に働く流体力，日本建築学会構造系論文集，第466号，pp.165-174，1994年12月
- 6) Watanabe, E., Utsunomiya, T., and Kubota, A.: Analysis of Wave-Drift Damping of a VLFS with Shallow Draft. *Marine Structures*, Vol.13, pp.383-397, 2000
- 7) Maruo, H.: The Drift of a Body Floating in Waves. *J. Ship Res.*, Vol.4, No.3, pp.1-10, 1960
- 8) Grue, J., and Biberg, D.: Wave Forces on Marine Structures with Small Speed in Water of Restricted Depth. *Appl. Ocean Res.*, Vol.15, pp.121-135, 1993
- 9) Ogilvie, T.F.: Second Order Hydrodynamic Effects on Ocean Platforms. *Int. Workshop on Ship and Platform Motions*, University of California, Berkeley, U.S.A., pp.205-265, 1983
- 10) Nossen, J., Grue, J., and Palm, E.: Wave Forces on Three-Dimensional Floating Bodies with Small Forward Speed. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 227, pp.135-160, 1991
- 11) Stoker, J.J.: *Water Waves, The Mathematical Theory with Applications*. Interscience Publishers, New York, 1957

付録A：質量係数および流体力係数

運動方程式に現れる質量係数および流体力係数の陽な表示式を以下に掲げる（非零項のみ示す）。

●一般化質量係数

m_{pl} = 一定とすると

$$m_{00,00} = \pi a^2 m_{pl}, \quad m_{10,10} = \frac{\pi a^2}{4} m_{pl}$$

$$m_{nj,nj} = \frac{2\pi a^2}{\epsilon_n} m_{pl} (A_{nj}^2 I_{AA} + A_{nj} B_{nj} I_{AB} + B_{nj}^2 I_{BB}),$$

$$j \geq 1 \quad (A1)$$

ここに、

$$I_{AA} = \frac{1}{2} [J_n(k_{nj}a)^2 - J_{n-1}(k_{nj}a)J_{n+1}(k_{nj}a)] \quad (A2)$$

$$I_{AB} = \frac{J_{n+1}(k_{nj}a)I_n(k_{nj}a) + J_n(k_{nj}a)I_{n+1}(k_{nj}a)}{k_{nj}a} \quad (A3)$$

$$I_{BB} = \frac{1}{2} [I_n(k_{nj}a)^2 - I_{n-1}(k_{nj}a)I_{n+1}(k_{nj}a)] \quad (A4)$$

●浮力変化による一般化静的復元力係数

$$K_{00,00} = \pi \rho g a^2, \quad K_{10,10} = \frac{\pi}{4} \rho g a^2$$

$$K_{nj,nj} = \frac{2\pi}{\epsilon_n} \rho g a^2 (A_{nj}^2 I_{AA} + A_{nj} B_{nj} I_{AB} + B_{nj}^2 I_{BB}),$$

$$j \geq 1 \quad (A5)$$

●一般化付加質量・減衰係数

$$M_{nj,li} + \frac{i}{\omega} C_{nj,li} = M_{nj,li}^{(0)} + \frac{i}{\omega} C_{nj,li}^{(0)} + \tau \left(M_{nj,li}^{(1)} + \frac{i}{\omega} C_{nj,li}^{(1)} \right) \quad (A6)$$

$$\begin{aligned}
M_{00,0i}^{(0)} + \frac{i}{\omega} C_{00,0i}^{(0)} &= 2\pi\rho a^2 \left[\frac{F_{0i0}^0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} F_{0is}^0 \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_1(l_s a)}{I_0(l_s a)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{0is} Q_{00s} \lambda_{0s} \coth(\lambda_{0s} h)}{a^2} \right] \\
M_{10,1i}^{(0)} + \frac{i}{\omega} C_{10,1i}^{(0)} &= \pi\rho a^2 \left[\frac{F_{1i0}^0}{4} + \sum_{s=1}^{\infty} F_{1is}^0 \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_2(l_s a)}{I_1(l_s a)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{1is} Q_{10s} \lambda_{1s} \coth(\lambda_{1s} h)}{a^2} \right] \\
M_{nj,ni}^{(0)} + \frac{i}{\omega} C_{nj,ni}^{(0)} &= \frac{2\pi}{\epsilon_n} \rho a^2 \left[F_{ni0}^0 \frac{A_{nj} J_{n+1}(k_{nj} a) + B_{nj} I_{n+1}(k_{nj} a)}{k_{nj} a} \right. \\
&\quad + \sum_{s=1}^{\infty} F_{nis}^0 \frac{(-1)^s}{I_n(l_s a)} (A_{nj} I_{An} + B_{nj} I_{Bn}) \\
&\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{nis} Q_{njs} \lambda_{ns} \coth(\lambda_{ns} h)}{a^2} \right], \quad j \geq 1 \quad (A7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{00,0i}^{(1)} + \frac{i}{\omega} C_{00,0i}^{(1)} &= 2\pi\rho a^2 \left[\frac{F_{0i0}^1}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} F_{0is}^1 \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_1(l_s a)}{I_0(l_s a)} \right] \\
M_{00,1i}^{(1)} + \frac{i}{\omega} C_{00,1i}^{(1)} &= 2\pi\rho a^2 \left[\frac{F_{1i0}^{1-}}{2} + \frac{i}{\nu_0 a} \frac{F_{1i0}^0}{2} \right. \\
&\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ F_{1is}^{1-} \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_1(l_s a)}{I_0(l_s a)} + \frac{i}{\nu_0 a} F_{1is}^0 \frac{(-1)^s}{2} \right\} \\
&\quad \left. + \frac{i}{\nu_0 a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{1is}^- Q_{00s} \lambda_{0s} \coth(\lambda_{0s} h)}{a^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{10,0i}^{(1)} + \frac{i}{\omega} C_{10,0i}^{(1)} &= 2\pi\rho a^2 \left[\frac{F_{0i0}^{1+}}{4} + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ F_{0is}^{1+} \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_2(l_s a)}{I_1(l_s a)} \right. \right. \\
&\quad + \frac{i}{\nu_0 a} F_{0is}^0 \frac{(-1)^s}{2} \frac{I_2(l_s a)}{I_0(l_s a)} \left. \right\} \\
&\quad + \frac{i}{\nu_0 a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{0is}^+ Q_{10s} \lambda_{1s} \coth(\lambda_{1s} h)}{a^2} \\
&\quad \left. - \frac{i}{\nu_0 a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{Q_{0is} \coth(\lambda_{0s} h)}{a^2} \frac{J_2(\lambda_{0s} a)}{J_1(\lambda_{0s} a)} \right]
\end{aligned}$$

$$M_{10,1i}^{(1)} + \frac{i}{\omega} C_{10,1i}^{(1)} = \pi\rho a^2 \left[\frac{F_{1i0}^1}{4} + \sum_{s=1}^{\infty} F_{1is}^1 \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_2(l_s a)}{I_1(l_s a)} \right]$$

$$\begin{aligned}
M_{10,2i}^{(1)} + \frac{i}{\omega} C_{10,2i}^{(1)} &= \pi\rho a^2 \left[\frac{F_{2i0}^{1-}}{4} + \frac{i}{\nu_0 a} \frac{F_{2i0}^0}{2} \right. \\
&\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ F_{2is}^{1-} \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_2(l_s a)}{I_1(l_s a)} + \frac{i}{\nu_0 a} F_{2is}^0 \frac{(-1)^s}{2} \right\} \\
&\quad \left. + \frac{i}{\nu_0 a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{2is}^- Q_{10s} \lambda_{1s} \coth(\lambda_{1s} h)}{a^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{nj,(n-1)i}^{(1)} + \frac{i}{\omega} C_{nj,(n-1)i}^{(1)} &= \frac{2\pi}{\epsilon_n} \frac{2}{\epsilon_{n-1}} \rho a^2 \left[F_{n-1,i0}^{1+} \frac{A_{nj} J_{n+1}(k_{nj} a) + B_{nj} I_{n+1}(k_{nj} a)}{k_{nj} a} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ F_{n-1,is}^{1+} \frac{(-1)^s}{I_n(l_s a)} \right. \\
&+ \frac{i}{\nu_0 a} F_{n-1,is}^0 \frac{(-1)^s}{2} \frac{l_s}{I_{n-1}(l_s a)} \left. \right\} \\
&\cdot (A_{nj} I_{An} + B_{nj} I_{Bn}) \\
&+ \frac{i}{\nu_0 a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{n-1,is}^+ Q_{njs} \lambda_{ns} \coth(\lambda_{ns} h)}{a^2} \\
&- \frac{i}{\nu_0 a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{n-1,is}^- Q_{njs}^- \lambda_{n-1,s} \coth(\lambda_{n-1,s} h)}{a^2} \left. \right], \\
&\quad n \geq 1, j \geq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{nj,ni}^{(1)} + \frac{i}{\omega} C_{nj,ni}^{(1)} &= \frac{2\pi}{\epsilon_n} \rho a^2 \left[F_{ni0}^1 \frac{A_{nj} J_{n+1}(k_{nj} a) + B_{nj} I_{n+1}(k_{nj} a)}{k_{nj} a} \right. \\
&+ \sum_{s=1}^{\infty} F_{nis}^1 \frac{(-1)^s}{I_n(l_s a)} (A_{nj} I_{An} + B_{nj} I_{Bn}) \left. \right], \\
&\quad n \geq 0, j \geq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{nj,(n+1)i}^{(1)} + \frac{i}{\omega} C_{nj,(n+1)i}^{(1)} &= \frac{2\pi}{\epsilon_n} \rho a^2 \left[\left\{ F_{n+1,i0}^{1-} + \frac{i}{\nu_0 a} (n+1) F_{n+1,i0}^0 \right\} \right. \\
&\quad \cdot \frac{A_{nj} J_{n+1}(k_{nj} a) + B_{nj} I_{n+1}(k_{nj} a)}{k_{nj} a} \\
&+ \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ F_{n+1,is}^{1-} \frac{(-1)^s}{I_n(l_s a)} \right. \\
&+ \frac{i}{\nu_0 a} F_{n+1,is}^0 \frac{(-1)^s}{2} \frac{l_s}{I_{n+1}(l_s a)} \left. \right\} \\
&\cdot (A_{nj} I_{An} + B_{nj} I_{Bn}) \\
&+ \frac{i}{\nu_0 a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{n+1,is}^- Q_{njs} \lambda_{ns} \coth(\lambda_{ns} h)}{a^2} \\
&+ \frac{i}{\nu_0 a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2Q_{n+1,is}^+ Q_{njs}^+ \lambda_{n+1,s} \coth(\lambda_{n+1,s} h)}{a^2} \\
&\quad \left. \cdot \frac{J_n(\lambda_{n+1,s} a)}{J_{n+2}(\lambda_{n+1,s} a)} \right], \\
&\quad n \geq 0, j \geq 1 \quad (A8)
\end{aligned}$$

ここに,

$$I_{An} = \frac{k_{nj} J_{n+1}(k_{nj} a) I_n(l_s a) + l_s J_n(k_{nj} a) I_{n+1}(l_s a)}{k_{nj}^2 a + l_s^2 a} \quad (A9)$$

$$I_{Bn} = \frac{k_{nj} I_{n+1}(k_{nj} a) I_n(l_s a) - l_s I_n(k_{nj} a) I_{n+1}(l_s a)}{k_{nj}^2 a - l_s^2 a} \quad (A10)$$

●一般化波強制力

$$F_{nj} = F_{nj}^{(0)} + \tau F_{nj}^{(1)} \quad (A11)$$

$$\begin{aligned}
F_{00}^{(0)} &= 2\pi\rho i\omega_0 a^2 \left[-\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} \frac{J_1(ka)}{ka} + \frac{D_{00}^0}{2} \right. \\
&+ \sum_{s=1}^{\infty} D_{0s}^0 \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_1(l_s a)}{I_0(l_s a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2P_{0s}Q_{00s}\lambda_{0s}\coth(\lambda_{0s}h)}{a^2} \Bigg] \\
F_{10}^{(0)} &= 2\pi\rho i\omega_0 a^2 \left[-\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} \frac{iJ_2(ka)}{ka} \left(\frac{\cos}{\sin}\right)\beta + \frac{D_{10}^0}{4} \right. \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} D_{1s}^0 \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_2(l_s a)}{I_1(l_s a)} \\
& \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2P_{1s}Q_{10s}\lambda_{1s}\coth(\lambda_{1s}h)}{a^2} \right] \\
F_{nj}^{(0)} &= 2\pi\rho i\omega_0 a^2 \left[-\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} i^n (A_{nj}J_{An} + B_{nj}J_{Bn}) \left(\frac{\cos}{\sin}\right)n\beta \right. \\
& + D_{n0}^0 \frac{A_{nj}J_{n+1}(k_{nj}a) + B_{nj}I_{n+1}(k_{nj}a)}{k_{nj}a} \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} D_{ns}^0 \frac{(-1)^s}{I_n(l_s a)} (A_{nj}I_{An} + B_{nj}I_{Bn}) \\
& \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2P_{ns}Q_{njs}\lambda_{ns}\coth(\lambda_{ns}h)}{a^2} \right], \quad j \geq 1 \quad (A12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{00}^{(1)} &= 2\pi\rho i\omega_0 a^2 \left[\frac{D_{00}^1}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{0s}^1 \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_1(l_s a)}{I_0(l_s a)} \right. \\
& + \frac{i}{\nu_0 a} \left\{ -\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} iJ_1(ka) + D_{10}^0 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{1s}^0 \right\} \Bigg] \\
& + \frac{k \cos \beta}{\nu_0} F_{00}^{(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{10}^{(1)} &= 2\pi\rho i\omega_0 a^2 \left[\frac{D_{10}^1}{4} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{1s}^1 \frac{(-1)^s}{l_s a} \frac{I_2(l_s a)}{I_1(l_s a)} \right. \\
& + \frac{i}{\nu_0 a} \left\{ -\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} i^2 J_2(ka) + \frac{D_{20}^0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{D_{2s}^0}{2} \right. \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{D_{0s}^0}{2} \frac{I_2(l_s a)}{I_0(l_s a)} \\
& \left. \left. - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{P_{0s}\coth(\lambda_{0s}h)}{a} \frac{J_2(\lambda_{0s}a)}{J_1(\lambda_{0s}a)} \right\} \right] + \frac{k \cos \beta}{\nu_0} F_{10}^{(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{0j}^{(1)} &= 2\pi\rho i\omega_0 a^2 \left[D_{00}^1 \frac{A_{0j}J_1(k_{0j}a) + B_{0j}I_1(k_{0j}a)}{k_{0j}a} \right. \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} D_{0s}^1 \frac{(-1)^s}{I_0(l_s a)} (A_{0j}I_{A0} + B_{0j}I_{B0}) \\
& + \frac{i}{\nu_0 a} \left\{ -\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} ika (A_{0j}J_{A0} + B_{0j}J_{B0}) \right. \\
& + \frac{2D_{10}^0}{k_{0j}a} (A_{0j}J_1(k_{0j}a) + B_{0j}I_1(k_{0j}a)) \\
& \left. + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{D_{1s}^0}{I_1(l_s a)} l_s a (A_{0j}I_{A0} + B_{0j}I_{B0}) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4P_{1s}Q_{0js}^+\lambda_{1s}\coth(\lambda_{1s}h)}{a} \frac{J_0(\lambda_{1s}a)}{J_2(\lambda_{1s}a)} \Bigg] \\
& + \frac{k \cos \beta}{\nu_0} F_{10}^{(0)}, \quad j \geq 1 \\
F_{nj}^{(1)} &= 2\pi\rho i\omega_0 a^2 \left[D_{n0}^1 \frac{A_{nj}J_{n+1}(k_{nj}a) + B_{nj}I_{n+1}(k_{nj}a)}{k_{nj}a} \right. \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} D_{ns}^1 \frac{(-1)^s}{I_n(l_s a)} (A_{nj}I_{An} + B_{nj}I_{Bn}) \\
& + \frac{i}{\nu_0 a} \left\{ -\frac{ig\zeta_0}{\omega_0} i^{n+1} ka (A_{nj}J_{An} + B_{nj}J_{Bn}) \right. \\
& + \frac{(n+1)D_{n+1,0}^0}{k_{nj}a} (A_{nj}J_{n+1}(k_{nj}a) \\
& + B_{nj}I_{n+1}(k_{nj}a)) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2} \left(\frac{D_{n-1,s}^0}{I_{n-1}(l_s a)} \right. \\
& + \frac{D_{n+1,s}^0}{I_{n+1}(l_s a)}) l_s a (A_{nj}I_{An} + B_{nj}I_{Bn}) \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2P_{n+1,s}Q_{njs}^+\lambda_{n+1,s}\coth(\lambda_{n+1,s}h)}{a} \\
& \cdot \frac{J_n(\lambda_{n+1,s}a)}{J_{n+2}(\lambda_{n+1,s}a)} \\
& \left. \left. - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2P_{n-1,s}Q_{njs}^-\lambda_{n-1,s}\coth(\lambda_{n-1,s}h)}{a} \right\} \right] \\
& + \frac{k \cos \beta}{\nu_0} F_{nj}^{(0)}, \quad n \geq 1, j \geq 1 \quad (A13)
\end{aligned}$$

ここに,

$$J_{An} = \frac{kJ_{n+1}(ka)J_n(k_{nj}a) - k_{nj}J_n(ka)J_{n+1}(k_{nj}a)}{k^2a - k_{nj}^2a} \quad (A14)$$

$$J_{Bn} = \frac{kJ_{n+1}(ka)I_n(k_{nj}a) + k_{nj}J_n(ka)I_{n+1}(k_{nj}a)}{k^2a + k_{nj}^2a} \quad (A15)$$

付録 B : (その 1) の誤植訂正

• 式 (68)

$$(\text{誤}) \quad Z_{nj}^{\mp} = \frac{k_{nj}}{2} [A_{nj}J_{n\mp 1}(k_{nj}r) + B_{nj}I_{n\mp 1}(k_{nj}r)]$$

$$(\text{正}) \quad Z_{nj}^{\mp} = \frac{k_{nj}}{2} [\pm A_{nj}J_{n\mp 1}(k_{nj}r) + B_{nj}I_{n\mp 1}(k_{nj}r)]$$

• 式 (71)

$$(\text{誤}) \quad Q_{njs}^{\mp} = \frac{k_{nj}}{2} \left[\frac{A_{nj}}{\lambda_{n\mp 1,s}^2 - k_{nj}^2} J_{n\mp 1}(k_{nj}a) \right. \\ \left. + \frac{B_{nj}}{\lambda_{n\mp 1,s}^2 + k_{nj}^2} I_{n\mp 1}(k_{nj}a) \right]$$

$$(\text{正}) \quad Q_{njs}^{\mp} = \frac{k_{nj}}{2} \left[\pm \frac{A_{nj}}{\lambda_{n\mp 1,s}^2 - k_{nj}^2} J_{n\mp 1}(k_{nj}a) \right. \\ \left. + \frac{B_{nj}}{\lambda_{n\mp 1,s}^2 + k_{nj}^2} I_{n\mp 1}(k_{nj}a) \right]$$

(2005年9月7日原稿受理, 2005年11月18日採用決定)