厚肉螺旋曲板要素を用いた極薄肉螺旋曲板の自由振動解析

FREE VIBRATION ANALYSIS OF ULTRA THIN SPIRAL SHELL PANEL USING A THICK SPIRAL SHELL ELEMENTS

板倉和則*¹, 須田量哉*¹, 有木伸也*², 山城友哉*²

*Kazunori ITAKURA, Kazuya SUDA, Shinya ARIKI
and Tomoya YAMASHIRO*

This paper presents a method for a numerical analysis of free vibration behavior of ultra thin spiral shell panel with a spiral axis, using finite element method with a isoparametric element together with some numerical results. The method is based on accurate strain-displacement relationships in finite displacement theory, using a spiral coordinate system. Numerical results are compared with those in the literature, and those obtained by isoparametric shell element method, etc. The comparison shows the method presented in this paper is useful for analyzing free vibration of ultra thin spiral shell.

Keywords : 3-D.F.E.M., Rayleigh-Ritz Method, Spiral shell plate, Ultra thin plate, Free vibration

三次元有限要素法, レーレ・リッツ法, 螺旋曲板, 極薄板, 自由振動

1. はじめに

建築、土木、機械関係等で用いられる螺旋構造物等、特殊な形状物の解析には、通常、構造物の形状にそれぞれの節点座標を合わせ、複雑な形状を写像変換し仮想仕事式等の積分を容易にして解析する、アイソパラメトリック型有限要素法を用いることが考えられる。

本論は、螺旋曲線を主軸（ x 軸）として、法線方向に y 軸、 y 軸上の任意の点で基本ベクトルに垂直な方向に z 軸をとる螺旋座標を考え、その座標軸上の基礎式（三次元ひずみ・変位関係式）を求めて、その基礎式をアイソパラメトリック型有限要素法に適用するので、形状に特化したシェル要素の一つと考えられる。

この基礎式を用いれば、例えば、螺旋曲線の曲率・ねじれ率を与えて平板あるいは円筒を解けば、螺旋曲板あるいは螺旋円筒を解いたことになり、平易な形状の仮想仕事式等の積分で対応できることとなる。このことは、例えば、螺旋曲板の場合では、座標補間式がそれぞれ一次の独立した式（ブロック要素として考えられる）で表せるため、ヤコビアン式、ヤコビアンの逆行列式が簡単になり、かつ、主軸方向のひずみ・変位関係式及び変位は主軸の座標に独立に表されるため、要素を等分割すれば、主軸方向の剛性マトリックス、質量マトリックス等は一度だけ計算すればよく、計算時間の短縮が図れる。

また、基礎式を用いない通常のアイソパラメトリック型有限要素法は変位・応力等が形状に関係なく、全体（デカルト）座標で定義されるのに対し、基礎式を用いたアイソパラメトリック型有限要素法

は、変位・応力等、形状に則して決定することができ、幾何学的境界条件、異方性（積層）、形状最適化等、様々な面で使用しやすいものとする。

さらに、螺旋を主軸とした基礎式は、曲がっている主軸上での座標、主軸に沿って回転する座標（ねじれが考慮できる）で表せる様々なシェル形状構造物にも適用可能である。

なお、本論で求めた基礎式は、駐車場形式建物の螺旋状の車道に適用できる。また、螺旋曲板が平面と傾きを持つ場合にも容易に展開でき、建築以外にも適用範囲は広いと考えられる。

本論では、三次元有限要素法により、薄肉および極薄肉螺旋曲板の自由振動解析を行う。薄肉、極薄肉螺旋曲板の解析には、通常、アイソパラメトリックシェル要素か、シェル理論により求めた薄肉螺旋曲板の基礎式による薄肉有限要素法等が考えられ、三次元有限要素法はロッキング現象等が生じるとして用いられない。しかし、本論では、薄肉、極薄肉に対応させるために、螺旋曲板の面内方向には、曲げやねじれを持つ螺旋曲板の複雑な変位を表せる高次のラグランジュ型補間式を、厚さ方向には厚さの 0 次項、一次項、二次項と、変位に対する影響の度合いをよく反映できる、べき級数型補間式を用いている。よって、この解法は、面内方向には有限要素法、厚さ方向にはレーレ・リッツ法の混合型解法を用いていることになる。

なお、高次のラグランジュ型変位補間式は、式が複雑であるために

*¹ 都城工業高等専門学校建築学科 教授・博士(工学)
*² 都城工業高等専門学校専攻科建築学専攻

Prof., Dept. of Architecture, Miyakonojo National College of Technology, Dr. Eng.
The Advanced Engineering Course, Advanced Course of Architecture, Miyakonojo
National College of Technology

一般的には余り使用されないが、式自体に規則性があるために、高次項まで簡単に作成することができる。

また、本論の手法では、螺旋曲板の基礎式が平板の形状を基本としているため、これらの補間式を容易に用いることができる。

本論では、まず、築地らがねじれた板に用いた方法(曲線座標を用いた有限変形理論)¹⁾により、螺旋座標上の三次元ひずみ・変位関係式を導き、前に述べた補間式を用いたアイソパラメトリック要素に組み込んで、螺旋座標軸上のアイソパラメトリック要素(これ以後螺旋要素と称す)を作成する。

次に、この螺旋要素を用いて、薄肉、および、極薄肉の片持ち板、片持ち螺旋曲板の自由振動解析を行い、この提案した解法(本解法と称す)が、三次元解析では問題となる薄肉あるいは極薄肉板の解析にも十分に対応できることを、既存の解^{2), 3)}、アイソパラメトリックシェル要素法解⁴⁾(8 節点要素：シェル要素と称す)、および、三次元アイソパラメトリック型有限要素法解⁵⁾(27 節点ラグランジ型要素：ラグランジ要素と称す)との比較で示す。

2. 解析方法

2. 1 螺旋曲板の形状

図1に示すように、半径 a の円筒による底面の中心を原点 o 点とし、円筒の側面を時計回りに底面との角度 α で上がっていく x 軸を考える。その x 軸上の任意の点における接線方向の単位ベクトルを i_1 、円筒の半径方向の単位ベクトルを i_2 とする。 i_1, i_2 と右手系をなし、両者に垂直な単位ベクトルを i_3 とする。したがって i_1, i_2, i_3 は局部座標系の単位ベクトルであり、移動するにつれて方向が変わるベクトルである。なお、螺旋曲板は軸 i_1, i_2 上にあり、 x 軸は一定の曲率及びねじれ率を有するものとする。

2. 2 ひずみ-変位関係式⁶⁾

板の中央面上における点 P の位置ベクトル $r_0^{(0)}$ は局部座標で表わすと次式で示される。ただし、全体座標の原点は o 点にとっている。

$$r_0^{(0)} = (x \sin^2 \alpha) i_1 + (a + y) i_2 + (x \sin \alpha \cos \alpha) i_3 \quad (1)$$

セレ・フレネの公式より i_1, i_2, i_3 の間に次のような関係式がある。

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_1}{\partial x} &= -\kappa i_2 \\ \frac{\partial i_2}{\partial x} &= \kappa i_1 - \tau i_3 \\ \frac{\partial i_3}{\partial x} &= \tau i_2 \end{aligned} \quad (2)$$

螺旋曲板の場合、曲率 κ 、ねじれ率 τ は次の式で表される(付録参照のこと)。

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{a}{a^2 + c^2} = \frac{1}{\omega} \cos \alpha \\ \tau &= \frac{c}{a^2 + c^2} = \frac{1}{\omega} \sin \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

ここに $\omega = \sqrt{a^2 + c^2}$ である。

したがって、中央面上の基本ベクトル a_1, a_2, a_3 は次のようになる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial r_0^{(0)}}{\partial x} = (1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha) i_1 - (\frac{y}{\omega} \sin \alpha) i_3 \\ a_2 &= \frac{\partial r_0^{(0)}}{\partial y} = i_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$a_3 = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \left(\frac{y}{\omega} \sin \alpha \right) i_1 + \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) i_3 \right\}$$

ここに、

$$g = 1 + \frac{2y}{\omega} \cos \alpha + \frac{y^2}{\omega^2} \quad (5)$$

である。

図1 螺旋座標と変形状態

板の中央面から距離 z にある点の位置ベクトル $r^{(0)}$ は

$$\begin{aligned} r^{(0)} &= r_0^{(0)} + z a_3 \\ &= (x \sin^2 \alpha + \frac{yz}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha) i_1 + (a + y) i_2 \\ &\quad + \{ x \sin \alpha \cos \alpha + \frac{z}{\sqrt{g}} (1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha) \} i_3 \end{aligned} \quad (6)$$

となり、変形前の任意点での基本ベクトル g_i ($i=1,2,3$) は次のようになる。

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\partial r^{(0)}}{\partial x} = (1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha) i_1 + \frac{z}{\omega \sqrt{g}} (\sin \alpha) i_2 - \frac{y}{\omega} (\sin \alpha) i_3 \\ g_2 &= \frac{\partial r^{(0)}}{\partial y} = \frac{z}{\omega g \sqrt{g}} \sin \alpha (1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha) i_1 + i_2 \\ &\quad - \frac{yz}{\omega^2 g \sqrt{g}} (\sin^2 \alpha) i_3 \end{aligned} \quad (7)$$

$$g_3 = \frac{\partial r^{(0)}}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{y}{\omega} (\sin \alpha) i_1 + \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) i_3 \right\}$$

変位ベクトル U の a_i ($i=1, 2, 3$) 方向の成分を $U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)$ とすると

$$U = U a_1 + V a_2 + W a_3 \quad (8)$$

となり、したがって、変形後の任意点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{U} \quad (9)$$

となる。また、 $\mathbf{r}$ の x, y, z による微分 $\mathbf{G}_i$ ($i=1,2,3$) はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{g}_1 + \left\{ \frac{V}{\omega} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial x} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right. \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \left. \right\} \mathbf{i}_1 + \left\{ -U \frac{a+y}{\omega^2} + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha + \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \mathbf{i}_2 \\ &\quad + \left\{ -\frac{V}{\omega} \sin \alpha - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{y}{\omega} \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\} \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{G}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{g}_2 + \left\{ \frac{U}{\omega} \cos \alpha + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right. \\ &\quad + \frac{\partial U}{\partial y} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \left. \right\} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{i}_2 \\ &\quad + \left\{ -\frac{U}{\omega} \sin \alpha - \frac{Wy}{\omega^2 \sqrt{g}} \sin^2 \alpha - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{y}{\omega} \sin \alpha \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial W}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\} \mathbf{i}_3 \quad (10) \\ \mathbf{G}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{g}_3 + \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\} \mathbf{i}_1 \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{i}_2 + \left\{ -\frac{\partial U}{\partial z} \frac{y}{\omega} \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\} \mathbf{i}_3 \end{aligned}$$

ひずみテンソル f_{ij} ($i, j=1,2,3$) は、次式に代入すると求まる。

$$2f_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j - \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (11)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\partial U}{\partial x} g + V \frac{a+y}{\omega^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - U \frac{a+y}{\omega^2} + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right) \frac{z}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{V}{\omega} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial x} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -U \frac{a+y}{\omega^2} + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha + \frac{\partial V}{\partial x} \right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{V}{\omega} \sin \alpha - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{y}{\omega} \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\}^2 \\ f_{22} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} g + U \frac{a+y}{\omega^2} + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right) \frac{z}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{U}{\omega} \cos \alpha + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial U}{\partial y} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{U}{\omega} \sin \alpha - \frac{Wy}{\omega^2 \sqrt{g}} \sin^2 \alpha - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{y}{\omega} \sin \alpha \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial W}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\}^2 \\ f_{33} &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial U}{\partial z} \frac{y}{\omega} \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2f_{12} &= \frac{\partial U}{\partial y} g + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{2W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \\ &\quad + \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{V(a+y)}{\omega^2 g} \right) \frac{z}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \\ &\quad + \left\{ \frac{V}{\omega} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial x} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\} \left\{ \frac{U}{\omega} \cos \alpha \right. \\ &\quad + \left. \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial U}{\partial y} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial W}{\partial y} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\} + \left\{ -U \frac{a+y}{\omega^2} + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha + \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \frac{\partial V}{\partial y} \\ &\quad + \left\{ -\frac{V}{\omega} \sin \alpha - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{y}{\omega} \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\} \\ &\quad \left\{ -\frac{U}{\omega} \sin \alpha - \frac{Wy}{\omega^2 \sqrt{g}} \sin^2 \alpha - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{y}{\omega} \sin \alpha \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial W}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2f_{13} &= \frac{\partial U}{\partial z} g + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{V}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{z}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \\ &\quad + \left\{ \frac{V}{\omega} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial x} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\} \\ &\quad + \left\{ -U \frac{a+y}{\omega^2} + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha + \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \frac{\partial V}{\partial z} \\ &\quad + \left\{ -\frac{V}{\omega} \sin \alpha - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{y}{\omega} \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\} \\ &\quad \left\{ -\frac{\partial U}{\partial z} \frac{y}{\omega} \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2f_{23} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{U}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{z}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \\ &\quad + \left\{ \frac{U}{\omega} \cos \alpha + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial U}{\partial y} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{y}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} \\ &\quad + \left\{ -\frac{U}{\omega} \sin \alpha - \frac{Wy}{\omega^2 \sqrt{g}} \sin^2 \alpha - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{y}{\omega} \sin \alpha \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial W}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\} \left\{ -\frac{\partial U}{\partial z} \frac{y}{\omega} \sin \alpha \right. \\ &\quad + \left. \frac{\partial W}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

となる。ただし、アンダーラインの項は変位の 2 次項である。

ひずみテンソルを、直交座標系に関するひずみ-変位関係式に変換するため、曲板内の任意点において、局部直交直線座標軸 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ をベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 方向に設け、それぞれの方向の単位ベクトルを $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ とする。

$$\mathbf{j}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \left(1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha \right) \mathbf{i}_1 - \frac{y}{\omega} (\sin \alpha) \mathbf{i}_3 \right\} \quad (13)$$

$$\mathbf{j}_2 = \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} = \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{j}_3 = \frac{\mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}_3|} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{y}{\omega} (\sin \alpha) \mathbf{i}_1 + (1 + \frac{y}{\omega} \cos \alpha) \mathbf{i}_3 \right\}$$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 座標系におけるひずみテンソル e_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) は、次式から計算される。

$$2e_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \alpha^k}{\partial y^i} \frac{\partial \alpha^l}{\partial y^j} 2f_{kl} \quad (14)$$

ここに、

$$\frac{\partial \alpha^k}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^3 g^{kj} (\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{g}_j) \quad (15)$$

であり、 g^{kj} は次式に示すとおりである。

$$g^{kj} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 \\ & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \text{sym} & & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ & g^{22} & g^{23} \\ \text{sym} & & g^{33} \end{bmatrix} \quad (16)$$

なお、 $F, g^{11} \sim g^{33}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{g} \left(1 - \frac{z^2}{\omega^2 g^2} \sin^2 \alpha \right) \\ g^{11} &= \frac{1}{F^2} \left(1 + \frac{z^2}{\omega^2 g^2} \sin^2 \alpha \right) \\ g^{12} &= \frac{1}{F^2} \left(-\frac{2z}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right) \\ g^{22} &= \frac{g}{F^2} \left(1 + \frac{z^2}{\omega^2 g^2} \sin^2 \alpha \right) \\ g^{13} &= g^{23} = 0, \quad g^{33} = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 座標系でのひずみ成分は、変換公式(14)を用いると、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} &= U_{\bar{x}} + \frac{1}{2} [U_{\bar{x}}^2 + V_{\bar{x}}^2 + W_{\bar{x}}^2] \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} &= V_{\bar{y}} + \frac{1}{2} [U_{\bar{y}}^2 + V_{\bar{y}}^2 + W_{\bar{y}}^2] \\ \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} &= W_{\bar{z}} + \frac{1}{2} [U_{\bar{z}}^2 + V_{\bar{z}}^2 + W_{\bar{z}}^2] \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} &= U_{\bar{y}} + V_{\bar{x}} + [U_{\bar{x}} U_{\bar{y}} + V_{\bar{x}} V_{\bar{y}} + W_{\bar{x}} W_{\bar{y}}] \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{z}} &= U_{\bar{z}} + W_{\bar{x}} + [U_{\bar{x}} U_{\bar{z}} + V_{\bar{x}} V_{\bar{z}} + W_{\bar{x}} W_{\bar{z}}] \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{z}} &= V_{\bar{z}} + W_{\bar{y}} + [U_{\bar{y}} U_{\bar{z}} + V_{\bar{y}} V_{\bar{z}} + W_{\bar{y}} W_{\bar{z}}] \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、

$$\begin{aligned} U_{\bar{x}} &= \frac{1}{F} \left\{ \sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{V(a+y)}{\omega^2 \sqrt{g}} - \left(\frac{U(a+y)}{\omega^2 g} + \frac{\partial U}{\partial y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{W}{\omega g \sqrt{g}} \sin \alpha \right) \frac{z}{\omega} \sin \alpha \right\} \\ U_{\bar{y}} &= \frac{1}{F} \left\{ \frac{U(a+y)}{\omega^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{V(a+y)}{\omega^2 g \sqrt{g}} \right) \frac{z}{\omega} \sin \alpha \right. \\ &\quad \left. + g \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\} \\ U_{\bar{z}} &= \sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\bar{x}} &= \frac{1}{F} \left\{ -\frac{U(a+y)}{\omega^2} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{z}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right\} \\ V_{\bar{y}} &= \frac{1}{F} \left\{ \sqrt{g} \frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{U(a+y)}{\omega^2} + \frac{W}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha \right) \frac{z}{\omega g} \sin \alpha \right\} \\ V_{\bar{z}} &= \frac{\partial V}{\partial z} \\ W_{\bar{x}} &= \frac{1}{F} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{V}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha + \left(\frac{U}{\omega g} \sin \alpha - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \frac{z}{\omega} \sin \alpha \right\} \\ W_{\bar{y}} &= \frac{1}{F} \left\{ \sqrt{g} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{U}{\omega} \sin \alpha + \left(\frac{V}{\omega \sqrt{g}} \sin \alpha - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{z}{\omega g} \sin \alpha \right\} \\ W_{\bar{z}} &= \frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned} \quad (19)$$

である。ただし、アンダーラインの項は変位の 2 乗項で、微小変形の時は無視する。

なお、文献 6) では、キルヒフホフ・ラヴの仮定を用いて(18)式より、薄肉螺旋曲板のひずみ-変位関係式を導いているが、紙面の都合上、ここでは省略する。

2. 3 応力-ひずみ関係式

弾性応力-ひずみ関係式は次のようになる。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \\ \sigma_{\bar{z}\bar{z}} \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} \\ \sigma_{\bar{x}\bar{z}} \\ \sigma_{\bar{y}\bar{z}} \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}] \{\varepsilon\} \quad (20)$$

等方弾性体の場合の応力-ひずみマトリックス $[\mathbf{H}]$ は次のようになる。

$$[\mathbf{H}] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & H_1 & H_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & H_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & H_2 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & H_2 & 0 \\ & & & & & H_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$H_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad H_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。

2. 4 自由振動に関する仮想仕事の原理

螺旋曲板の自由振動解析に関する仮想仕事の原理は次のようである。

$$\delta \Pi = \delta U + \delta V = 0 \quad (22)$$

ここに、内部仮想仕事 δU は

$$\delta U = \sum_{i=1}^{N_e} \iiint_m \{\delta \varepsilon\}^T [\mathbf{H}] \{\varepsilon\} dm \quad (23)$$

で表される。ここに、 N_e は螺旋曲板の全要素数であり、

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} \\ \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{z}} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{z}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \\ W_{\bar{z}} \\ U_{\bar{y}} + V_{\bar{x}} \\ U_{\bar{z}} + W_{\bar{x}} \\ V_{\bar{z}} + W_{\bar{y}} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

は、ひずみ-変位関係式の線形部分、 δV は慣性力の仮想仕事項で

$$\delta V = - \sum_{i=1}^N \rho \omega^2 \iiint_m (g U \delta U + V \delta V + W \delta W) dm \quad (25)$$

である。

ここで、 ρ は密度、 ω は角速度、微小体積 dm は、

$$dm = F dx dy dz \quad (26)$$

と表される。変位及び座標を無次元化して積分すると、無次元振動数パラメータ λ 及び振動モードが計算される。なお λ は次のように定義している。

$$\lambda^2 = \frac{\rho \omega^2 t^4}{E t^3 / [12(1-\nu^2)]} \quad (27)$$

ここに、 t は板厚、 ℓ は板の長さである。

2. 5 座標補間式及び変位補間式

螺旋座標上の板の座標補間式は、螺旋軸上に沿って x 軸を取ることに、つぎの形状関数 $N_i(\xi)$ を用いた一次式で表される。

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) x_i \\ y(\eta) &= \sum_{j=1}^2 N_j(\eta) y_j \\ z(\zeta) &= \sum_{k=1}^2 N_k(\zeta) z_k \end{aligned} \quad (28)$$

ここに $N_i(\xi)$ は次のように表せる。

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (29)$$

なお、 $N_j(\eta), N_k(\zeta)$ も同じような一次式で表され、 ξ, η, ζ はともに ± 1 の範囲である。

よって、ヤコビアン $[J]$ は次のように簡単になり

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_2 - y_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_2 - z_1}{2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

ヤコビアンの逆マトリクス $[J]^{-1}$ は

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2 - x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_2 - y_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_2 - z_1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

と簡単に求めることができ、計算時間の短縮が図れる。

また、螺旋曲板の要素をそれぞれの方向に等間隔に分割した場合、ひずみ-変位関係式(18),(19)式は、 x 座標には無関係 ($x_2 - x_1$ の差

図2 螺旋座標の剛性マトリックス

が関係する) なので、 x 方向に1要素、 y, z 座標方向に全部の要素の重ね合わせをすると、後は、図2に示すように、その重ね合わせた要素を x 方向に積み重ねるだけで全体剛性マトリックスが作成できる。質量マトリックスも、似たような作り方となる。

変位補間式は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K f_i(\xi) f_j(\eta) h_k(\zeta) U_{ijk} \\ V(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f_l(\xi) f_m(\eta) h_n(\zeta) V_{lmn} \\ W(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \sum_{r=1}^R f_p(\xi) f_q(\eta) h_r(\zeta) W_{pqr} \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、 $U(\xi, \eta, \zeta)$ は x 方向変位成分、 U_{ijk} は未知変数、形状関数 $f_i(\xi)$ 、 $(i=1, 2, \dots, I)$ はラグランジ型補間式で次式で表わせる。

$$f_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_I)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_I)} \quad (33)$$

ただし、 $\xi_1 \cdots \xi_I$ は等間隔にとっている。なお、 $I=3$ の場合は

$$f_i(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & (i=1) \\ 1-\xi^2 & (i=2) \\ \frac{1}{2}\xi(1+\xi) & (i=3) \end{cases} \quad (34)$$

と表せる。 y 方向の形状関数 $f_j(\eta)$ も同じように表す。

z 方向の形状関数 $h_k(\zeta)$ はべき級数を用いて次式で表す。

$$h_k(\zeta) = \zeta^{k-1} \quad (35)$$

なお、 $V(\xi, \eta, \zeta)$ 、 $W(\xi, \eta, \zeta)$ も $U(\xi, \eta, \zeta)$ と同じように表せる。

3. 解析例

図3に解析に用いる3つの要素を示す。どの要素も数値積分には Gauss-Legendre 積分を用いて完全積分を行う。よって、シェル要素

(8 節点) は二方向とも3点積分、ラグランジ要素(27 節点)は三方向とも3点積分を用いる。螺旋要素(本解法)は、本来、要素の補間次数(点数)を変えれば、積分点数を変えるべきだが、分割数、補間次数、積分点数と要素毎に変えると煩雑になるので、この解析では補間次数の如何にかかわらず、三方向とも10点積分を用いる。

なお、螺旋要素は、内部節点変位が多いため振動解析に当たって静的縮小法⁸⁾を用いる。また、すべての解法において、固有値解析法はサブスペース法⁹⁾を用い、倍精度で計算を行う。

3. 1 薄肉および極薄肉片持平板の自由振動解析

3. 1. 1 板の x, y 方向の分割数と補間次数との関係

式(18)の中の半径 $a=\infty$ 、高さ $c=0$ とおくと通常の三次元ひずみ-変位関係式となる。板の長さ ℓ と板厚の比 $\ell/t=1$ 、板の長さ ℓ と板厚の比 $\ell/t=100$ の薄肉、 $\ell/t=1000$ の極薄肉片持平板の自由振動解析を螺旋要素で行う。なお、解析する際に、板の総未知係数が一定になるように、 x, y 方向の分割数と補間次数を変化させて、無次元振動数パラメータ λ を求め、表1に示す。

表1中、4,4 は x, y 方向の分割数を、 $3 \times 3 \times 3$ は x, y, z 方向の補間次数を、648 は総未知係数を、7 は固有値解析の繰り返し回数を表す。なお、 z 方向はべき級数をとっているため分割数はない。この結果より、分割数よりも補間次数を多くとった方が正しいと思われる解 (λ) への収束が速いことがわかる。

螺旋要素(補間次数 x 方向 5, y 方向 5, 25 節点)

シェル要素(8 節点)

ラグランジ要素(27 節点)

図 3 各要素の形状および節点数

表 1 螺旋要素の分割数、補間次数の変化による λ の収束状況

	薄肉			極薄肉		
	4,4	2,2	1,1	4,4	2,2	1,1
分割数	3×3×3	5×5×3	9×9×3	3×3×3	5×5×3	9×9×3
未知数	648	648	648	648	648	648
繰返	7	10	12	7	10	12
1	3.5603	3.5040	3.4882	3.5630	3.5050	3.4890
2	8.7286	8.5536	8.5287	8.7380	8.5594	8.5360
3	23.252	21.509	21.376	23.314	21.524	21.391
4	28.432	27.305	27.209	28.484	27.326	27.232
5	33.332	31.204	31.043	33.425	31.238	31.081
6	57.742	54.601	54.239	57.928	54.689	54.338
7	72.731	62.231	61.475	73.025	62.322	61.558
8	77.602	64.701	64.120	78.186	64.794	64.205
9	86.676	72.018	71.140	87.283	72.148	71.263
10	102.89	94.255	92.898	103.38	94.484	93.099

3. 1. 2 補間次数の変化による螺旋要素の λ の収束状況、及び、分割数の変化によるシェル要素⁴⁾の λ の収束状況

表 1 の結果をふまえて、3.1.1 と同じ幾何学的条件で、 x, y 方向の分割数を共に 1 とし、補間次数だけを変化させた薄肉、および、極薄肉片持ち平板の自由振動解析を螺旋要素で行い、表 2 に示す。また、比較する対象として、8 節点シェル要素の分割数を変えて解析した結果を表 3 に示す。なお、シェル要素の 5,5 は x, y 方向の分割数を表し、他の数値は螺旋要素に同じである。

表 2,3 より、シェル要素は切り方が粗い(総未知変位数が少ない)場合は高次の λ におかしな値が生じており、板厚が薄いほど、その傾向は強い。

この結果、螺旋要素は $8 \times 8 \times 3$ (総未知係数 504) の補間次数であれば十分に収束しているとみなせるが、シェル型は 7,7 (総未知変位数 805) の分割でも不十分である。

3. 1. 3 既存の無次元振動数パラメータ λ との比較

既存の λ (Srinivasan²⁾: 二次元有限要素法による結果、Young³⁾: 二次元レーレ・リッツ法による結果) との比較を表 4 に示す。ただ

表 2 螺旋要素の補間次数の変化による λ の収束状況

	薄肉			極薄肉		
	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
補間数	7×7×3	8×8×3	9×9×3	7×7×3	8×8×3	9×9×3
未知数	378	504	648	378	504	648
繰返	12	12	12	12	10	12
1	3.5018	3.4938	3.4882	3.5028	3.4945	3.4890
2	8.5530	8.5373	8.5287	8.5582	8.5446	8.5360
3	21.449	21.407	21.376	21.463	21.421	21.391
4	27.235	27.222	27.209	27.254	27.241	27.232
5	31.138	31.077	31.043	31.169	31.115	31.081
6	54.375	54.295	54.239	54.456	54.379	54.338
7	63.709	61.555	61.475	63.821	61.636	61.558
8	65.972	64.135	64.120	66.079	64.218	64.205
9	73.560	71.220	71.140	73.710	71.341	71.263
10	96.066	92.943	92.898	96.312	93.143	93.099

表 3 シェル要素の分割数の変化による λ の収束状況

	薄肉			極薄肉		
	5,5	6,6	7,7	5,5	6,6	7,7
未知数	425	600	805	425	600	805
繰返	9	10	11	6	9	12
1	3.5134	3.5002	3.4919	3.5380	3.5258	3.5163
2	8.6334	8.5924	8.5671	8.6807	8.6321	8.6016
3	22.443	22.045	21.820	23.093	22.550	22.185
4	28.157	27.759	27.565	32.844	31.555	29.457
5	32.366	31.890	31.610	37.175	32.290	31.948
6	59.428	56.641	55.594	70.850	67.656	65.859
7	69.705	66.981	65.231	79.624	74.997	70.766
8	70.106	67.650	66.532	102.24	82.182	77.197
9	79.834	76.630	74.877	157.94	103.11	77.723
10	113.24	101.86	97.641	165.61	144.26	136.64

表 4 既存の λ との比較 (薄肉・極薄肉平板の場合)

	既存の λ		シェル要素		螺旋要素	
	Srinivasan ²⁾	Young ³⁾	薄肉	極薄肉	薄肉	極薄肉
1	3.479	3.494	3.4919	3.5163	3.4882	3.4890
2	8.561	8.547	8.5671	8.6016	8.5287	8.5360
3	21.277	21.440	21.820	22.185	21.376	21.391
4	27.167	27.460	27.565	29.457	27.209	27.232
5	31.043	31.170	31.610	31.948	31.043	31.081
6	54.290		55.594	65.859	54.239	54.338
7			65.231	70.766	61.475	61.558
8			66.532	77.197	64.120	64.205

し、薄肉 ($l/t=100$)、極薄肉 ($l/t=1000$) とともに未知変数が同じ程度になるように、螺旋要素では分割数は 1,1、補間次数は $9 \times 9 \times 3$ を (総未知係数 648)、シェル要素では分割数 7×7 (総未知変位数 805) を用いている。

螺旋要素解は、薄肉、極薄肉とも既存の λ と似たような値となっている。シェル要素解は、板厚が薄くなるほど、高次振動になるほど、 λ の値が違ってきている。この解析結果より、螺旋要素は薄肉および、極薄肉板の自由振動解析に有効なことが確認される。

また、平板の場合、二次元理論 (薄肉理論) では、板厚が厚くても薄くても λ の値が一定になるという矛盾も、螺旋要素の薄肉・極薄肉の範囲内の解析結果においては、解消されていると考えられる。

図4 片持ち螺旋曲板

3. 2 螺旋曲板の自由振動解析

3. 2. 1 それぞれの解法によるλの収束状況

前述したように、螺旋要素で、極薄肉の振動解析が出来ることをふまえて、図4に示す、板の長さ l と板幅 b の比 $l/b=2$ 、板の長さ l と板厚 t の比 $l/t=50$ （薄肉）、 $l/t=500$ （極薄肉）、水平軸との傾斜角 $\alpha=\pi/6$ 、螺旋円の中心角 $\beta=\pi/2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ を用いた片持ち螺旋曲板の自由振動解析を螺旋要素（本解法）、シェル要素⁴⁾及びラグランジ要素⁵⁾で行い無次元振動数パラメータ λ の収束状況を比較する。なお、螺旋要素は x, y 方向にそれぞれ2,1分割（ $l/b=2$ のため）している。表5より、螺旋要素は $9 \times 9 \times 3$ の補間次数であれば十分と考えられる。シェル要素、ラグランジ要素の分割数に対する λ の収束状況を表6に示す。表7はそれぞれの要素の λ の比較を示しているが、螺旋要素がもっとも λ の収束が良く、シェル要素、ラグランジ要素の順に λ の収束が遠くなっている。また、未知変位も、螺旋要素が最も少なく、シェル要素、ラグランジ要素の順に多くとる必要がある。

3. 2. 2 振動モード

ラグランジ要素、シェル要素、螺旋要素の振動モードを図5に描く。ラグランジ要素の編み目が最も密（未知変位が多く）で、シェル要素、螺旋要素の順に振動モードの編み目が粗くなっている。二次と六次のモード以外は、曲げ振動が主体となったモードと考えられる。また、どの要素の振動モードも似たような形となっている。

4. 結論

螺旋曲板の基礎式（三次元ひずみ-変位関係式）を、曲線座標を用いた有限変形理論より求め、その基礎式の線形部分を用いて、仮想仕事の原理により螺旋曲板の自由振動に関して定式化した。定式化した仮想仕事式に、高次のラグランジ変位補間式（面内方向）、べき級数変位補間式（厚さ方向）を用いた三次元アイソパラメトリック有限要素法を適用して自由振動解析を行い、他の解法の無次元振動数パラメータ λ 及び振動モードと比較検討して、次のような結果を得た。

- 1) 変位の補間関数を面内方向に高次のラグランジ関数、厚さ方向にべき級数を用いた螺旋要素は薄肉・極薄肉板の振動解析に有効である。
- 2) 螺旋要素はシェル要素、ラグランジ要素に比べて、総未知変数が少なくても、正しいと思われる無次元振動数パラメータ λ への収束がしやすい。
- 3) 本基礎式は曲率だけ与えると曲がった板、ねじれ率だけ与えるとねじれた板、曲率・ねじれ率を与えると螺旋曲板の振動解析が行なえる。

表5 螺旋要素の補間次数の変化によるλの収束状況
（極薄肉螺旋曲板の場合）

	面内方向			厚さ方向		
分割数	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1
補間数	$8 \times 8 \times 3$	$9 \times 9 \times 3$	$10 \times 10 \times 3$	$9 \times 9 \times 2$	$9 \times 9 \times 3$	$9 \times 9 \times 4$
未知数	1008	1296	1620	864	1296	1728
繰返	10	12	14	13	12	11
1	3.8147	3.8085	3.8054	4.1560	3.8085	3.8084
2	16.509	16.481	16.466	17.963	16.481	16.481
3	52.356	52.257	52.210	57.016	52.257	52.256
4	108.18	107.92	107.82	117.85	107.92	107.92
5	182.65	181.09	180.94	197.32	181.09	181.09
6	212.11	210.71	210.62	220.41	210.71	210.71
7	279.86	271.97	271.44	296.39	271.97	271.97
8	392.50	380.24	374.95	411.95	380.24	380.24

表6 シェル要素・ラグランジ要素の分割数の変化によるλの収束状況（極薄肉螺旋曲板の場合）

	シェル要素			ラグランジ要素		
分割数	16,8	20,10	24,12	16,8,1	20,10,1	24,12,1
未知数	2080	3200	4560	4896	7560	10800
繰返	13	14	16	13	13	14
1	3.9190	3.8520	3.8264	3.9233	3.8562	3.8313
2	17.018	16.703	16.579	17.061	16.739	16.611
3	54.365	53.204	52.733	54.515	53.338	52.849
4	113.59	110.68	109.44	113.91	110.99	109.72
5	193.34	187.44	184.79	193.91	188.01	185.33
6	215.50	213.11	212.08	215.22	213.19	212.25
7	295.30	284.44	279.33	296.19	285.33	280.28
8	415.27	397.61	389.07	415.83	398.75	390.32

表7 各要素のλの比較（螺旋曲板の場合）

	薄肉			極薄肉		
	ラグランジ	シェル	螺旋要素	ラグランジ	シェル	螺旋要素
分割数	24,12,1	24,12	2,1	24,12,1	24,12	2,1
補間数			$9 \times 9 \times 3$			$9 \times 9 \times 3$
未知数	10800	4560	1296	10800	4560	1296
繰返	14	11	11	14	16	12
1	3.7653	3.7584	3.7650	3.8313	3.8264	3.8085
2	16.073	16.033	16.058	16.611	16.579	16.481
3	49.078	48.963	48.962	52.849	52.733	52.257
4	56.140	56.082	56.093	109.72	109.44	107.92
5	95.525	95.286	95.087	185.33	184.79	181.09
6	107.44	107.33	107.30	212.25	212.08	210.71
7	114.13	114.04	113.97	280.28	279.33	271.97
8	149.94	149.51	148.77	390.32	389.07	380.24

これからの研究課題として、

- 1) 螺旋曲板の薄肉理論によるひずみ-変位関係式を求める。
- 2) 様々な幾何学的境界条件を有する薄肉から厚肉までの螺旋曲板の振動特性を調べる。
- 3) 様々な荷重に対する螺旋曲板の敏感度（座屈解析）を調べる。
- 4) 極薄肉曲板から厚肉曲板まで一つの解析法で行えるようにする。等が考えられる。

図5 極薄肉片持ち螺旋曲板の振動モード($\ell/b=2$, $\ell/t=500$)

謝辞

この報告の一部は都城工業高等専門学校専攻科建築学専攻、黒仁田和文君(現(株)コンステック)が修士学位授与の学習成果レポート作成のために纏めたものである。黒仁田君の努力に感謝致します。

また、この報告は、長年にわたり指導して頂いた、元長崎大学工学部構造工学科教授築地恒夫先生、末岡禎佑先生のご助言・ご指導により書けたものである。両先生に感謝の意を表します。

付録

螺旋軸上の任意点と局部座標との関係は次のように表される。

付図に示すように、螺旋軸上の任意点 $\mathbf{R}_0^{(0)}$ は全体座標では、

$$\mathbf{R}_0^{(0)} = (a \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (a \sin \theta) \mathbf{e}_2 + c \mathbf{e}_3 \quad (1)$$

と表される。その接線、法線、従法線方向の単位ベクトル $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ はそれぞれ次のようである。ただし、単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は右手系にとっている。

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \frac{\partial \mathbf{R}_0^{(0)}}{\partial \theta} / \left| \frac{\partial \mathbf{R}_0^{(0)}}{\partial \theta} \right| \\ &= \{(-a \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (-a \cos \theta) \mathbf{e}_2 + c \mathbf{e}_3\} / \sqrt{a^2 + c^2} \\ \mathbf{i}_2 &= -\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial \theta} / \left| \frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial \theta} \right| = (\cos \theta) \mathbf{e}_1 - (\sin \theta) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{i}_3 &= \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 \\ &= \{(c \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (c \cos \theta) \mathbf{e}_2 + a \mathbf{e}_3\} / \sqrt{a^2 + c^2} \end{aligned} \quad (2)$$

ゆえに、単位ベクトル $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ の x での微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial x} &= \frac{-a}{a^2 + c^2} \mathbf{i}_2 = -\kappa \mathbf{i}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_2}{\partial x} &= \frac{a}{a^2 + c^2} \mathbf{i}_1 - \frac{c}{a^2 + c^2} \mathbf{i}_3 = \kappa \mathbf{i}_1 - \tau \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_3}{\partial x} &= \frac{c}{a^2 + c^2} \mathbf{i}_2 = \tau \mathbf{i}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ただし、 $x = \sqrt{a^2 + c^2} \theta$ である。

これより、螺旋の場合、次の関係式が成り立つ。

$$\kappa = a / (a^2 + c^2) = (\cos \alpha) / \omega \quad (4)$$

$$\tau = c / (a^2 + c^2) = (\sin \alpha) / \omega$$

ここに、

$$\omega = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad \cos \alpha = a / \omega, \quad \sin \alpha = c / \omega \quad (5)$$

である。また、(2)式より全体座標の単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は局部座標の単位ベクトル $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ で表すことが出来、螺旋上の任意点 P の位置ベクトル $\mathbf{r}_0^{(0)}$ は

$$\mathbf{r}_0^{(0)} = (x \sin^2 \alpha) \mathbf{i}_1 + (a + y) \mathbf{i}_2 + (x \sin \alpha \cos \alpha) \mathbf{i}_3 \quad (6)$$

となる。(一般的には、目視によって任意点の位置ベクトルを局部座標の単位ベクトル $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ で表すことが出来る。)

付図 全体座標と螺旋座標との関係

参考文献

- 1) 築地恒夫, 末岡禎佑: ねじれた板の自由振動(基礎理論), 日本機械学会論文集, 52-484, C, pp.3042-3046, 1986.
- 2) Srinivasan R.S., and Babu B.J.C.: Free Vibration of Canti-lever Quadrilateral Plates. J. Acoust. oc. Am. 73(3), pp.851-855, 1983.
- 3) D. Young, : Vibration of Rectangular Plates by Ritz Method, J. Appl. Mech. 17, Trans. ASME 72, pp.448-453, 1950.
- 4) 鷲津久一郎, 宮本博, その他: 有限要素法ハンドブック I 基礎編, pp.314-319, 培風館, 1981.
- 5) 同上, pp.363-405.
- 6) 板倉和則: らせん形状板の自由振動(基礎理論), 都城工業高等専門学校研究報告, 第29号, pp.7-15, 1995.
- 7) 鷲津久一郎: VARIATIONAL METHODS IN ELASTICITY AND PLASTICITY, pp.76-92, PERGAMON PRESS, 1968.
- 8) 鷲津久一郎, 宮本博, その他: 有限要素法ハンドブック II 応用編, pp.5-6, 培風館, 1983.
- 9) 同上, pp.1025-1076.

(2005年6月27日原稿受理, 2006年3月24日採用決定)