端部回転を受ける免震用積層ゴムの弾性理論

AN ELASTIC THEORY ON LAMINATED RUBBER BEARINGS SUBJECTED TO END ROTATIONS

飯塚真巨*, 濱本卓司**
Masao IIZUKA and Takuji HAMAMOTO

The end faces of laminated rubber bearings are subjected to large rotation in cases where the beams to which the bearings are attached are low in stiffness or are omitted. Since there have been few studies on the effect of end rotations on the mechanical properties of bearings, many points remain unclear. In this study, based on the Haringx theory, exact load-deflection relations are derived considering end rotations. Then, simplified expressions are derived as a first approximation, which make it easy to understand the effect of end rotations on the mechanical properties of bearings. To show another advantage of these approximate expressions, a bearing rotationally constrained by a superstructure is analyzed. It is shown that the solutions can be easily and accurately obtained by using these expressions. In addition, applicable deformation limits of these expressions obtained by elastic theory are presented. Based on numerical studies, effectiveness and accuracy of the above expressions are presented.

Keywords : base isolation system, laminated rubber bearing, mechanical theory, mechanical model, stiffness, buckling
免震、積層ゴム、力学理論、力学モデル、剛性、座屈

1. はじめに

積層ゴムを用いた免震構造の設計では、積層ゴムの水平剛性と座屈荷重が最も重要な特性である。これらの特性に関する古典的力学理論として、Haringx 理論¹⁾がよく知られている。Gent²⁾はHaringx 理論を積層ゴムに適用し、積層ゴムの水平剛性および座屈荷重に関する理論式を導いた。その理論はいくつかの文献^{例えば 3)~5)}に紹介され、理論式は現在の積層ゴムの設計に広く活用されている。これらの文献で紹介されている理論式は、積層ゴム端面に回転が生じないことを前提に導出されている。一般には積層ゴムは剛強な梁で挟み込んで設置されるので、端面の回転は非常に小さく、理論式的前提条件は満足されている。

ところで、免震レトロフィットでは積層ゴムを柱頭・柱脚などに設置する例が多く見られる。また、最近では杭頭に免震装置を設置し、杭頭間を軽微な基礎梁で連結する構法が検討・一部実施されている。そのような場合の多くは、積層ゴムが取り付け上梁あるいは下梁が無い、もしくは軽微なため、剛強な梁がある一般の場合に比べて、積層ゴム端面は大きな回転を受けることになる。このような場合、既往理論式的前提条件は満足されないため、既往式をそのままの形で適用すると大きな誤差を生じることになる。これまで、端部回転を受ける

積層ゴムの力学挙動に関する研究はほとんど行われておらず、端部回転が力学挙動に及ぼす影響については不明な点が多い。

そこで、端部回転を生じる積層ゴムの力学挙動を明らかにする第一段階として、積層ゴムの弾性的特性を解析的に把握することを目的に、以下の事項を実施する。

- ① Haringx 理論に基づいて、材端での水平自由度と回転自由度を考慮した剛性方程式を定式化する。また、積層ゴムの高さ方向の変位分布・断面力分布に及ぼす鉛直荷重と端部回転の影響を事例によって明らかにする。
- ② ①で誘導した剛性方程式は複雑である。そこで、理解の促進と実用性の観点から剛性方程式の近似式を誘導する。また、近似式の有効性と利用法の一例を示すために、連結部材で端部回転が拘束された積層ゴムの特性を近似式を用いて解析し、連結部材一積層ゴム系の水平剛性式を誘導する。さらに、近似式および連結部材一積層ゴム系の水平剛性式の精度を事例によって検証する。
- ③ ①、②で提示した結果は、材料の線形性の仮定に基づいているため、荷重・変形に対する適用限界が存在する。本論では、積層ゴムのせん断特性、曲げ特性の線形限界条件を規定し、その限界条件に対応する材端水平変位・材端回転角について考察する。

本論文の一部は既に文献6)において発表されている。

* 鹿島建設技術研究所 上席研究員・修士(工学)

** 武蔵工業大学工学部建築学科 教授・工博

Supervisory Research Engineer, Kajima Technical Research Institute, Kajima Corp., M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Musashi Institute of Technology, Dr. Eng.

2. Haringx 理論

2.1 理論の概要

Haringx 理論の概念図を図1に示す。積層ゴムの両端(A, B端)に、鉛直荷重 P 、水平力 Q_A , Q_B 、曲げモーメント M_A , M_B が作用し、水平変位 δ_A , δ_B 、回転角 θ_A , θ_B が生じている状態を考える。このとき積層ゴムの内部では、任意高さ z 位置で水平変位 x が生じ、高さ z における平面 ($a-a'$ 面) は、回転角 θ で回転し、せん断変形角 γ_s が生じている。また $a-a'$ 面には断面力として曲げモーメント M および回転面に沿うせん断力 Q_s が生じている。座標系および荷重・断面力と変位・変形の正方向は図1のとおりである。鉛直荷重は圧縮を正とする。定式化に際し、鉛直方向の変位を無視し、回転角は微小であるとする。また、材料は線形であると仮定する。

Haringx 理論では、P- Δ 効果による付加曲げモーメントを考慮している点、および曲げで傾斜した面に沿う鉛直荷重の分力が付加せん断力として作用し、せん断変形を増大させる効果（以下、この効果のことを、曲げの「P- Δ 効果」に対応させて「P- θ 効果」と呼ぶことにする）を考慮している点の二点が特徴である。

2.2 剛性方程式の導出

P- θ 効果およびP- Δ 効果は以下の二つの力のつり合い式(1), (2)の中で考慮される。すなわち、 $a-a'$ 面でのせん断力のつり合いおよび $a-a'$ 面での曲げモーメントのつり合いは下式である。

$$Q_s = -Q_B + P\theta \quad (1)$$

$$M = M_B - Q_B z + P(x - \delta_B) \quad (2)$$

軸心の傾斜角は下式で与えられる。

$$\frac{dx}{dz} = \gamma_s + \theta \quad (3)$$

せん断力とせん断変形角の関係および曲げモーメントと曲率の関係は、 S_s , S_b をせん断剛性、曲げ剛性として次の関係にある。

$$Q_s = S_s \gamma_s \quad (4)$$

$$M = -S_b \frac{d\theta}{dz} \quad (5)$$

S_s , S_b は中間鋼板を剛として、下式で与えられる^{3)~5)}。

$$S_s = \frac{l}{h} GA \quad (6)$$

$$S_b = \frac{l}{h} E_b I \quad (7)$$

ここに、

$$E_b' = \frac{1}{1/E_b + 1/E_\infty} \quad (8)$$

$$E_b = \left(1 + \frac{2}{3} \kappa S_1^2\right) E \quad (\text{ただし、円形断面に対して}) \quad (9)$$

ここで、 G はゴムのせん断弾性係数、 E_b' はゴムの圧縮性を考慮した曲げに関する見かけの縦弾性係数、 E_b はゴムを非圧縮性とした曲げに関する見かけの縦弾性係数、 E_∞ はゴムの体積弾性係数、 E はゴムの縦弾性係数、 κ はゴムの硬度で定まる補正係数、 S_1 は1次形状係数（円形断面の場合、 $S_1 = D/(4t_r)$ ； D ：直径、 t_r ：ゴム1層厚）、 A は断面積、 I は断面2次モーメント、 l は積層ゴムの全高さ（インサートプレートを含み、フランジプレートを除く）、 h はゴム層の総厚さである。

(1)~(5)式から、つぎの微分方程式が誘導される。

図1 Haringx 理論の概念図

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + q^2 x - \frac{q^2}{P} (-M_B + Q_B z + P \delta_B) = 0 \quad (10)$$

ここに、

$$q^2 = \frac{P}{S_b} \left(1 + \frac{P}{S_s}\right) \quad (11)$$

(10)式的一般解は積分定数 C_1 , C_2 を含む下式である。

$$x = C_1 \sin qz + C_2 \cos qz + \frac{1}{P} (-M_B + Q_B z) + \delta_B \quad (12)$$

$$\theta = \frac{1}{1 + \frac{P}{S_s}} (C_1 q \cos qz - C_2 q \sin qz) + \frac{Q_B}{P} \quad (13)$$

境界条件は以下のとおりである。

$$\text{i) } z=0 \text{ で } x = \delta_B$$

$$\text{ii) } z=0 \text{ で } \theta = \theta_B$$

$$\text{iii) } z=l \text{ で } x = \delta_A$$

$$\text{iv) } z=l \text{ で } \theta = \theta_A$$

なお、既往の理論展開^{3)~5)}においては、両端回転拘束の条件 ($\theta_A = \theta_B = 0$) を仮定しているが、本論では θ_A , θ_B を任意として扱っているところが異なっている。

端部に作用する外力は以下のつり合いを満足している。

$$Q_A + Q_B = 0 \quad (14)$$

$$M_A + M_B - Q_B l + P(\delta_A - \delta_B) = 0 \quad (15)$$

(12), (13)式的一般解に上記境界条件と外力のつり合い式(14), (15)式を用いると、次の剛性方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & -k_1 & k_2 \\ & k_3 & -k_2 & k_4 \\ & & k_1 & -k_2 \\ \text{sym.} & & & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \theta_A \\ \delta_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここに、

$$k_1 = k_h \quad (17. a)$$

$$k_2 = -k_h \frac{S_b q}{P} \tan \frac{ql}{2} = -\frac{1}{2} (lk_h + P) \quad (17. b)$$

$$k_3 = k_h \left(\frac{S_b q}{P} \tan \frac{ql}{2} \right)^2 + \frac{S_b q}{\tan ql} = \frac{l}{4} (lk_h + P) + k_r \quad (17. c)$$

$$k_4 = k_h \left(\frac{S_b q}{P} \tan \frac{ql}{2} \right)^2 - \frac{S_b q}{\sin ql} = \frac{l}{4} (lk_h + P) - k_r \quad (17. d)$$

ここに、

$$k_h = \frac{P^2}{2S_b q \tan \frac{ql}{2} - Pl} \quad (18)$$

$$k_r = \frac{\frac{ql}{2} \frac{S_b}{l}}{\tan \frac{ql}{2}} \quad (19)$$

k_h は一端固定他端水平移動自由回転拘束の境界条件下での既往の水平剛性式^{3)~5)}である。(17.b)~(17.d)には二つの等式が示されている。一つ目の等式は、筆者⁶⁾が定式化したものである。その後、三山⁷⁾は物理的な意味をより明確化した二つ目の等式を導いた。

上式において、 $\tan(ql/2)$, $\sin ql$, $\tan ql$ を Maclaurin 展開し、 $P=0$ とすれば、(16)式はつぎの曲げせん断要素の剛性方程式に一致する。

$$\begin{Bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \frac{1}{\frac{l^3}{12S_b} + \frac{l}{S_s}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l}{2} & -1 & -\frac{l}{2} \\ \frac{l^2}{3} + \frac{S_b}{S_s} & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{6} - \frac{S_b}{S_s} & \frac{l}{2} \\ \text{sym.} & & \frac{l^2}{3} + \frac{S_b}{S_s} & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \theta_A \\ \delta_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} \quad (20)$$

2.3 変位分布と断面力分布

高さ方向の変位分布および断面力分布を、以下のようにして求めることができる。(16)~(19)式の剛性方程式を得る計算過程で、積分定数が以下のように得られている。

$$C_1 = \frac{S_b q}{P} \left(\theta_B - \frac{Q_B}{P} \right) \quad (21)$$

$$C_2 = \frac{M_B}{P} \quad (22)$$

想定している境界条件を(16)式に与え、すべての材端力・材端変位を求めた後、それらの結果を上式に代入して C_1 , C_2 を求め、(12), (13)式から任意高さ z における水平変位 x と回転角 θ が求められる。さらに(1), (2), (4), (5)式からせん断力 Q_s , 曲げモーメント M , せん断変形角 γ_s , 曲率 $d\theta/dz$ が求められる。なお、 γ_s と $d\theta/dz$ はゴム層と中間鋼板の複合体を等価な均質材料で置換した部材に対するものである。 γ_s と $d\theta/dz$ をゴム層の実質的な値に変換するには、これらに l/h を乗じればよい。

3. 剛性方程式の近似式

3.1 近似式の誘導

(a) 仮定

(17)~(19)式は難解であり、鉛直荷重や端部回転角の影響が直感的に理解できない。そこで、建物免震用積層ゴムを想定して、近似式で表す。

建物免震用積層ゴムでは、一般に次の条件が成立している。

$$1 \ll \frac{P}{S_s} < \frac{P_{cr}}{S_s} \ll \frac{S_b/l^2}{S_s} \quad (23)$$

ここで、 P_{cr} は座屈荷重(次節参照)である。ちなみに、後述の事例検討用の積層ゴムで(表1参照)上の数値を求めると、 $(S_b/l^2)/S_s = 598$, $P_{cr}/S_s = 77$ である。 P に関しては、長期の設計鉛直荷重レベルを $P_{cr}/4$ とすれば、 $P/S_s = 19$ である。一般によく使用されている積層ゴムの $(S_b/l^2)/S_s$ は、事例検討用の積層ゴムと同等であり、(23)式の仮定は妥当である。

(b) 座屈荷重

一端固定他端水平移動自由回転拘束の境界条件下での水平剛性 k_h をゼロにする鉛直荷重を座屈荷重 P_{cr} と定義する。(18)式から、 $ql = \pi$ のとき $P = P_{cr}$ となるので、これらを(11)式に代入して、 P_{cr} について解くと、下式が得られる。

$$P_{cr} = \frac{S_s}{2} \left(\sqrt{1 + 4\pi^2 \frac{S_b/l^2}{S_s}} - 1 \right) \quad (24)$$

上式に(23)式の条件 $(S_b/l^2)/S_s \gg 1$ を適用すると下式となる。

$$P_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{S_s S_b} \quad (25)$$

(24), (25)式は積層ゴムの座屈荷重として知られた式である^{3), 5)}。

(c) 近似式

(17)式を難解にしている主な原因は k_h と k_r の式である。これらの式は、下式で近似できることが知られている^{8), 5)}。

$$k_h = (1-p^2) \frac{S_s}{l} \quad (26)$$

$$k_r = (1-p^2) \frac{S_b}{l} \quad (27)$$

ここで、

$$p = P/P_{cr} \quad (28)$$

(26), (27)式を(17)式に代入して下式となる。

$$k_1 = (1-p^2) \frac{S_s}{l} \quad (29.a)$$

$$k_2 = -\frac{1}{2} \{ (1-p^2) S_s + P \} \quad (29.b)$$

$$k_3 = \frac{l}{4} \{ (1-p^2) S_s + P \} + (1-p^2) \frac{S_b}{l} \quad (29.c)$$

$$k_4 = \frac{l}{4} \{ (1-p^2) S_s + P \} - (1-p^2) \frac{S_b}{l} \quad (29.d)$$

三山⁷⁾は(29)式に水平変形に依存した非線形性を表わすための係数を導入した解析法を提案している。本論では、(29)式に(23)式の条件を適用して、さらに簡略化した下式を得る。

$$k_1 = (1-p^2) \frac{S_s}{l} \quad (30.a)$$

$$k_2 = -\frac{P}{2} \quad (30.b)$$

$$k_3 = (1-p^2) \frac{S_b}{l} \quad (30.c)$$

$$k_4 = -(1-p^2) \frac{S_b}{l} \quad (30.d)$$

(30)式を用いて(16)式を書き直すと下式である。

$$Q_A = -Q_B = (1-p^2) \frac{S_s}{l} (\delta_A - \delta_B) - \frac{P}{2} (\theta_A + \theta_B) \quad (31.a)$$

$$M_A = -\frac{P}{2} (\delta_A - \delta_B) + (1-p^2) \frac{S_b}{l} (\theta_A - \theta_B) \quad (31.b)$$

$$M_B = -\frac{P}{2} (\delta_A - \delta_B) - (1-p^2) \frac{S_b}{l} (\theta_A - \theta_B) \quad (31.c)$$

(30)式は(17)~(19)式に比べてはるかに簡潔な式となっており、積層ゴムの力学挙動に及ぼす鉛直荷重や端部回転角の影響が明確に表現されている。ただし、水平力による曲げモーメントが無視されていることに注意する必要がある。

(d) 近似式の論理的解釈

(26)式は、Buckle 等⁸⁾が初めて提案したものであるが、誘導過程と論理的根拠が明示されていない。その後の文献においても、論理的

根拠について詳しく触れたものが見当たらない。(27)式についても同様である。(31)式の近似式を提案するに当たり、(26)、(27)式に対する論理的解釈を与えておくことは重要であると考え、以下に記述する。

付録には、(18)式に $1 \ll (S_b/l^2)/S_s$ および $1 \ll P_{\sigma}/S_s$ の条件を用いて、下式の近似式が得られることが示されている。

$$k_h = (1 - \frac{\pi^2}{12} p^2) \frac{S_s}{l} \quad (32)$$

なお、上式は下式で定義される新たな座屈荷重を用いて、(26)式と同じ形に変形できる。

$$P_{\sigma} = \frac{\sqrt{12}}{l} \sqrt{S_s S_b} \quad (33)$$

(32)式は、Maclaurin 展開の2次までの項を残した純数学的な近似式である。従って、 P が小さい領域での精度は高いが、 P の増大とともに精度が落ち、剛性を過大に評価する。(33)式が理論式(25)式と異なるのは、級数展開の高次の項を無視したことに起因している。そこで、(32)式で $\pi^2/12=1$ とすれば、 $p=1$ すなわち $P=P_{\sigma}$ のときに $k_h=0$ となり、座屈に関する理論的な矛盾が解消できる。それが(26)式である。すなわち、(25)式の P_{σ} を用いた(26)式は、純数学的な近似に加えて、座屈荷重が理論値に合致するように物理的な意味から修正したものと解釈できる。後述するように(5.3 節参照)、(26)式は(32)式よりも精度が良く、しかも設計上重要な特性値である座屈荷重が理論値と一致する簡明さを備えている。(27)式についても上記と同じ議論が当てはまる。

3.2 近似式の応用例

上で示した剛性方程式の近似式は、架構中に組み込まれた積層ゴムの力学特性の理論的な定式化に利用できる。以下、一例として図2に示す簡単なモデルを用いてそれを示す。図2は、連結部材の回転剛性を表す回転ばねによって積層ゴム端部の回転を拘束したモデルで、Imbimbo 等⁹⁾によって検討されたものである。簡単のため、積層ゴム下端および回転ばね上端の回転を固定する。回転ばねのモーメント-回転角関係は下式である。

$$M_F = K_F \theta_F = K_F \theta_A \quad (34)$$

ここで、 K_F は回転ばねの剛性、 M_F 、 θ_F は回転ばね下端のモーメントと回転角、 θ_A は積層ゴム上端の回転角である。上式の二つ目の等式は、変位の連続条件 $\theta_F = \theta_A$ による。また、モーメントのつり合いは下式である。

$$M_A + M_F = 0 \quad (35)$$

ここで、 M_A は積層ゴム上端のモーメントである。(35)式に(31.b)式(ただし、 $\theta_B = 0$)、(34)式を代入して下式が得られる。

$$\theta_A = \frac{1}{1+k_F-p^2} \frac{P}{2 S_b} (\delta_A - \delta_B) \quad (36)$$

ここで、

$$k_F = \frac{K_F}{S_b/l} \quad (37)$$

(36)式を(31.a)式(ただし、 $\theta_B = 0$)に代入し、(25)式の関係を用いて整理すると下式が得られる。

$$Q_A = K_h (\delta_A - \delta_B) \quad (38)$$

ここで、

図2 連結部材の回転拘束を考慮した積層ゴム-連結部材モデル

$$\frac{K_h}{S_s/l} = 1 - \frac{\pi^2/4 + 1 + k_F - p^2}{1 + k_F - p^2} p^2 \quad (39)$$

上式を、Maclaurin 展開して2次までの項を採ると下式となる。

$$\frac{K_h}{S_s/l} = 1 - \frac{\pi^2/4 + 1 + k_F}{1 + k_F} p^2 \quad (40)$$

上式において、 $k_F \rightarrow \infty$ の場合、 p^2 の係数は1となるので、既往式(26)式に一致する。ところが、 $k_F = 0$ (回転自由)の場合、(40)式をゼロにする鉛直荷重は $0.537 P_{\sigma}$ となって、理論値である $0.5 P_{\sigma}$ を過大に評価する。この誤差は級数展開の高次の項を無視したことに起因している。そこで、3.1(d)で述べたと同様に、座屈荷重を理論値に一致させるように、 $\pi^2=12$ とおけば、(40)式は下式となる。

$$\frac{K_h}{S_s/l} = 1 - \frac{4 + k_F}{1 + k_F} p^2 \quad (41)$$

上式は、文献[9]で最終的に得られた近似式である。ただし、文献[9]では、(33)式で定義された P_{σ} を用いており、(25)式ではない。しかし、文献[9]で P_{σ} を(25)式で定義し直せば、本論と文献[9]は全く同一の結論に至ることになる。

文献[9]では Haringx 理論の基礎式から展開を始め、更に各種の近似計算を含む膨大な計算の末、(41)式の結論に辿り着いている。一方上の例から、(31)式を利用すれば、極めて簡単な計算で同一の結果が得られることが示された。より複雑なモデルを想定した場合、(31)式がさらに有効になるものと考えられる。

4. Haringx 理論の適用可能な変形限界

本理論は材料の線形性を仮定しているため、理論が適用可能な変形限界を明示しておくことは重要である。

(4)式の成立条件を下式とする。

$$\frac{l}{h} |\gamma_s(z)| \leq \gamma_h \quad (42)$$

ここで、 $(l/h) |\gamma_s(z)|$ は任意高さ z におけるゴム層のせん断ひずみ度、 γ_h は線形限界せん断ひずみ度 (ハードニング開始時せん断ひずみ度) である。なお、一般に $\gamma_h=2$ 程度であることが知られている。

一方、(5)式の成立条件を下式とする。

$$|M(z)| \leq M_y \quad (43)$$

ここで、 $M(z)$ は任意高さ z における曲げモーメント、 M_y は積層ゴムの線形限界曲げモーメントである。 M_y を断面の縁応力度が降伏応力度に達したときの曲げモーメント (降伏モーメント) として定義する^{10), 11)}。円形断面の場合、降伏モーメントは下式である。

表1 ケーススタディ用積層ゴムの形状・材料諸元

直径	D (mm)	800	ゴムの縦弾性係数	E (N/mm ²)	2.20
ゴム層×枚数	$t_r \times n_r$ (mm)	5.0×40	ゴムのせん断弾性係数	G (N/mm ²)	0.392
ゴム層の総厚	h (mm)	200	ゴムの体積弾性係数	E_∞ (N/mm ²)	1180
中間鋼板厚	t_s (mm)	4.0	ゴム硬度による補正係数	κ	0.85
全高さ	l (mm)	356	ゴムの引張り降伏応力度	σ_y (N/mm ²)	1.47
1次形状係数	S_1	40.0	座屈応力度(注参照)	σ_{cr} (N/mm ²)	53.2
2次形状係数	S_2	4.0			

注) $\sigma_{cr} = P_{cr} / A$ (ここで、 P_{cr} は(24)式、 A は断面積)

$$M_y = Z(\sigma - \sigma_y) = \frac{DP}{8} \left(1 - \frac{P_y}{P} \right) \quad (44)$$

ここで、 Z は断面係数、 σ は平均垂直応力度、 σ_y は引張り降伏応力度 ($\sigma_y < 0$)、 P_y は引張り降伏荷重 ($P_y < 0$)、 D は直径である。

鈴木等¹²⁾ はゴム1層の純曲げ試験から、曲げモーメント-曲率関係が M_y 程度まではほぼ線形で、それを超えると剛性低下する結果を得ている。(44)式の定義は、理想化した応力度分布を仮定しており、ゴム層内の圧力分布を厳密に反映させたものではない。しかしながら、文献[12]の実験結果は、(44)式が線形限界曲げモーメントとして適用できることを示唆している。

ここで、逆対称曲げ ($\theta_A - \theta_B = 0$) に対する線形限界水平変形は基本的な量になるので、それを以下に示しておく。 $S_s \ll P$ の場合、(31.b)式あるいは(31.c)式から、 $M_A = M_B \approx -P(\delta_A - \delta_B)/2$ であり、(43)、(44)式より下式が得られる (ただし、 $-P_y/P \ll 1$)。

$$|\delta_A - \delta_B| \leq D/4 \quad (45)$$

すなわち、逆対称曲げにおける線形限界水平変形は概ね直径の1/4であり、それ以下の水平変形に対して Haringx 理論が適用可能である。

5. 事例検討

5.1 検討用積層ゴムと検討項目

表1に示す2次形状係数4の低減衰積層ゴムを例として、以下の諸点を検討する。

- 1) 端部回転が生じたときの積層ゴムの変位・断面力の分布状況
- 2) 剛性マトリクスの要素の近似式 [(30)式] の精度
- 3) 連結部材の回転剛性を考慮した積層ゴムの水平剛性式 [(40)、(41)式] の精度
- 4) 本論で提示した理論式が適用可能な変形限界に与える端部回転の影響

5.2 変位分布

以下の二つの変形パターンについて計算した。

- ・一端固定他端回転無し

(a) 一端固定他端回転無し ($\delta_A = h, \delta_B = 0, \theta_A = \theta_B = 0$)

(b) 一端固定他端回転有り ($\delta_A = h, \delta_B = 0, \theta_A = 1/100, \theta_B = 0$)

図3 高さ方向変形分布における端部回転の有無による比較

$$(\delta_A = h, \delta_B = 0, \theta_A = \theta_B = 0)$$

・一端固定他端回転有り

$$(\delta_A = h, \delta_B = 0, \theta_A = 1/100, \theta_B = 0)$$

鉛直荷重 $P/P_{cr} = 0, 0.5, 1.0$ について、無次元化水平変位 x/h , 回転角 θ , 無次元化曲率 $-l(d\theta/dz)$ およびせん断変形角 $(l/h)\gamma_s$ の高さ方向分布を図3に示す。図より以下のことがわかる。

- 1) $P/P_{cr} = 0$ のケースは、特性が軸力に関係なせん断要素に対応するもので、この場合には三角形分布あるいは一様分布の変形分布を示す。ところが、鉛直荷重がある場合は、この分布から大きくかけ離れ、鉛直荷重が変形分布に甚大な影響を及ぼしていることが明瞭である。
- 2) 曲率の分布形状は水平変位分布に類似している。これは $P-\Delta$ 効果による曲げモーメントが支配的であることを意味している。また、せん断変形角の分布形状は回転角分布に類似している。これは $P-\theta$ 効果によるものである。
- 3) 回転有りの $P/P_{cr} = 1$ のケースでは、下部で水平変位が大きく外側にはらみ出し、特に下端固定端直上部では全体変位とは逆向きの変位が生じている。座屈荷重付近になるとこのような特異な変形が現れる特徴がある。回転無しの場合でも、同様の兆候が見られ、事実もう少し大きな鉛直荷重を作用させると、上下端近傍で外側にはらみ出す変形モードが目だってくる。変形分布が上下非対称な場合は対称の場合に比べて、この外側へのはらみ出しが著しいことがわかる。
- 4) 回転有りの $P/P_{cr} = 0.5$ のケースでは、その曲率分布から反曲点が生じており、上下端の曲率すなわち固定端モーメントは下端が上端よりかなり大きい。ところが、 $P/P_{cr} = 1$ では、下側に偏った曲率分布を保持してはいるが、固定端モーメントは上下端で同じ値である。なお、さらに大きな鉛直荷重を作用させると、逆に上端の曲げモーメントが下端より大きくなる逆転現象が現れる。

5.3 近似剛性式の精度

剛性マトリクスの構成要素である k_1, k_2, k_3, k_4 の4要素について、厳密式(17)式と近似式(30)式を比較する。近似式における座屈荷重の評価式として、理論式である(25)式のほかに、(33)式も検討する。 k_1 を S_s/l で、 k_2 を P_{cr} で、 k_3, k_4 を S_b/l でそれぞれ無次元化して、 P/P_{cr} に対してプロットし、図4に示す。なお、 k_2 および横軸の P の無次元化には厳密式(24)式の P_{cr} を用いた。図より、以下のことがわかる。

- 1) いずれの要素においても、近似式(30)式は、厳密式(17)式と良く一致している。
- 2) 座屈荷重に理論式である(25)式を用いて評価した近似式は、(33)式を用いて評価した近似式より厳密式との一致度が良い。特に $0.5P_{cr}$ 以上の領域で(33)式を用いて評価した近似式は精度低

図4 剛性マトリクス要素における厳密式と近似式の比較

図5 連結部材の回転拘束を考慮した積層ゴムの水平剛性—鉛直荷重関係

下が比較的大きい。

5.4 連結部材の回転剛性を考慮した積層ゴムの水平剛性式の精度

$k_F = 10^6, 5, 1, 0$ の4ケースについて、無次元化した水平剛性—鉛直荷重関係を(40), (41)式とHaringx理論による厳密解と比較して図5に示す。Haringx理論による厳密解は、(31)式の代わりに(16), (17)式を用いて、(39)式を求めた手順に従って計算したものである。なお、横軸の P の無次元化には厳密式(24)式の P_{cr} を用いた。図を細かく見れば、(40)式は $k_F = 0$ の鉛直荷重が大きい領域で水平剛性、座屈荷重を過大評価し、一方、(41)式は $k_F = 0$ で厳密解と良く一致しているが、 $k_F = 5$ では水平剛性、座屈荷重を若干過小評価している。しかし、いずれの式も k_F の広範な範囲に対して厳密解との誤差はわずかであり、実用上十分な精度の解が得られることがわかる。

図6 高さ方向の曲げモーメント分布 (Haringx 理論の適用可能範囲: $|M|/M_y \leq 1$) [端部変位 $(\delta_A - \delta_B)/h = 1$, $\theta_B = 0$]

5.5 理論の適用可能な変形限界

ここでは、(43)式の条件から定まる変形限界に関して検討する。鉛直荷重を $P/P_{cr} = 0, 0.5, 1$ の3レベルに対して、端部変位として、 $(\delta_A - \delta_B)/h = 1$, $\theta_B = 0$ を固定して、 θ_A だけを3水準変えて $M(z)/M_y$ を計算した。 θ_A の値は、 $P/P_{cr} = 0$ の場合 $\theta_A = 0, 1/2000, 1/1000$, $P/P_{cr} = 0.5$ および 1 の場合 $\theta_A = 0, 1/200, 1/100$ とした。 $M(z)/M_y$ の高さ方向分布を図6に示す。

いずれの計算ケースにおいても、下端曲げモーメントが最大、あるいはほぼ最大となっている。 $P/P_{cr} = 0.5, 1$ の場合、 $\theta_A = 0$ では $|M_A|/M_y = |M_B|/M_y \approx 1$ とちょうど線形限界に達している。計算条件である水平変位は $\delta_A - \delta_B = h$ で、これは直径の1/4に対応している。従って、計算結果は、(45)式の正当性を裏付けるものである。端部回転がある場合には、 $P/P_{cr} = 1$ の場合、 $\theta_A = 1/100$ でもほぼ全長にわたって $|M|/M_y \leq 1$ となっているのに対し、 $P/P_{cr} = 0.5$ の場合、 $\theta_A = 1/200$ で下端付近で $|M|/M_y \geq 1$ となっており、 $\theta_A = 1/100$ では $|M|/M_y \geq 1$ の領域が上方に拡大している。 $P/P_{cr} = 0$ の場合、 $\theta_A = 1/1000$ でも下半分の領域が $|M|/M_y \geq 1$ となっている。

以上の結果は以下のようにまとめることができる。すなわち、曲げ特性が線形範囲内にあるための両端間相対水平変位の限界値は、逆対称曲げでは概ね直径の1/4である。両端間相対回転角が存在する場合は、その大きさに応じて限界値は低下し、特に鉛直荷重が小さいほど著しい。

6. 結論

端部回転を受ける積層ゴムの力学特性を Haringx 理論に基づいて検討した。積層ゴム両端の水平自由度と回転自由度を考慮して剛性方程式を定式化した。この剛性方程式は複雑であるため、理解の促進と実用性の観点から剛性方程式の近似式を提示した。近似式の有効性と利用法の一例を示すために、連結部材で端部回転が拘束された積層ゴムの水平剛性式を近似式を用いて導いた。また、積層ゴムのせん断特性、曲げ特性の線形限界条件を規定して、本論で提示した理論が適用可能な材端水平変位、材端回転角の限界値について考察した。最後に、高さ方向の変位分布・断面力分布における特徴、剛性方程式の近似式および連結部材で端部回転が拘束された積層ゴムの水平剛性式の精度、理論が適用可能な材端変位の限界について、事例によって検討した。これらの結果から、以下のことを確認した。

1) 材端回転自由度を考慮した剛性方程式によって、力学挙動に及ぼ

す端部回転の影響を理論的に評価することが可能になった。

- 2) 鉛直荷重と端部回転が積層ゴムの高さ方向の変位分布・断面力分布に大きな影響を与えることを示した。
- 3) 剛性方程式の近似式は、積層ゴムの力学挙動に及ぼす鉛直荷重や端部回転角の影響を簡潔に表現している。また、剛性方程式の近似式は、実用上十分な精度を有している。
- 4) 剛性方程式の近似式を用いることにより、連結部材の回転拘束を考慮した積層ゴムの水平剛性式を容易に得ることができた。得られた式は、既往式と整合しており、厳密解との一致度も良い。
- 5) 曲げ特性が線形範囲内にあるための両端間相対水平変位の限界値は、逆対称曲げでは概ね直径の1/4である。両端間相対回転角が存在する場合は、その大きさに応じて限界値は低下し、特に鉛直荷重が小さいほど著しい。

なお、上記4)に関して、ここでは連結部材による回転拘束をひとつの回転ばねで代表した単純なモデルで検討したが、より複雑なモデルを想定した場合、近似式がよりいっそう有効になるものと期待される。

端部回転を拘束した積層ゴムの圧縮せん断試験から、積層ゴムの力学挙動は Haringx 理論で概ね説明できることが示されている^{例え¹³⁾}。一方で、高面圧下での非線形現象(逆S字形履歴ループや硬化現象)¹³⁾、中間鋼板や中心孔による剛性低下¹⁴⁾など、材料の線形性と剛な中間鋼板を仮定した Haringx 理論では説明できない現象も確認されている。三山⁷⁾は、一部修正を施した Haringx 理論で、端部回転を与えた積層ゴムの圧縮せん断試験結果を説明した。しかし、これが端部回転を与えた実験と Haringx 理論を比較した唯一の例であり、実験データがあまりにも少ない。本論で提示した理論式、近似式を用いる際、これらの点に十分留意する必要がある。また、端部回転を考慮した Haringx 理論の妥当性と適用範囲を実験的に検証することが今後の課題である。

参考文献

- 1) Haringx, J.A : On highly compressible helical springs and rubber rods, and their application for vibration-free mountings, Philips Research Reports 3, pp.401-449, 1948, Philips Research Reports 4, pp.49-80, pp.206-220, 1949
- 2) Gent, A.N. : Elastic stability of rubber compression springs, Journal Mechanical Engineering Science, Vol.6, No.4, pp.318-326, 1964
- 3) Thomas, A.G : The design of laminated bearings I, Proceedings of the Conference on NR for Earthquake Protection of Buildings, pp.229-246, 1982
- 4) 藤田聡, 藤田隆史 : 重量機器免震用積層ゴムの静的加力実験 一第3報 剛

- 性についての理論的検討一, 生産研究, 第38巻4号, pp.189-191, 1986.4
- 5) 日本建築学会, 免震構造設計指針第3版, pp.395-404, 2001
- 6) 飯塚真巨: 積層ゴムの剛性マトリクス, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造B巻, pp.619-620, 1995
- 7) 三山剛史: 積層ゴムの上下面に回転角を与えた場合の力学性状に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第556号, pp.43-50, 2002.6
- 8) Buckle, I. G. and Kelly, J. M: Properties of slender elastomeric isolation bearings during shake table studies of a large-scale model bridge deck, Proc. Second World Congress on Joints and Bearings, American Concrete Institute, SP94-15, Detroit, pp.247-269, 1986
- 9) Imbimbo, M and Kelly, J. M: Stability aspects of elastomeric isolators, Earthquake Spectra, Vol.13, No.3, pp.431-449, 1997
- 10) 飯塚真巨: 圧縮軸力・水平力同時作用下における免震用積層ゴムの大変形マクロモデル, 日本建築学会学術講演梗概集, 構造B巻, pp.721-722, 1992
- 11) 飯塚真巨: 積層ゴムの大変形挙動をシミュレートする巨視的力学モデル, 日本建築学会構造系論文集, 第568号, pp.83-90, 2003.6
- 12) 鈴木重信, 正木信男, 大島靖樹: 積層ゴムの曲げ剛性に関する研究, 日本建築学会学術講演梗概集, 構造B巻, 1998, pp.539-540
- 13) 飯塚真巨: 低減衰積層ゴムの力学特性評価式の適用性, 日本建築学会構造系論文集, 第572号, pp.81-88, 2003.10
- 14) 例えば, 二村有則ほか: 積層ゴムの力学的特性に及ぼす中間鋼板厚と中心孔径の影響, 第10回日本地震工学シンポジウム, pp.2675-2680, 1998

$$k_r = \frac{ql/2}{\tan(ql/2)} \frac{S_b}{l} = \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{ql}{2} \right)^2 \right] \frac{S_b}{l} \quad (A6)$$

(11)式および(25)式を上式に代入して、下式となる。

$$k_r = \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left\{ \frac{S_s}{P_{cr}} \frac{P}{P_{cr}} + \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 \right\} \right] \frac{S_b}{l} \quad (A7)$$

上式に(23)式の条件 ($S_s/P_{cr} \ll 1$) を適用すると、下式となる。

$$k_r = \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 \right] \frac{S_b}{l} \quad (A8)$$

上式において、 $P=P_{cr}$ で $k_r=0$ となるように、 $\pi^2/12 \approx 1$ とみなせば、上式は下式となる。

$$k_r = \left[1 - \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 \right] \frac{S_b}{l} \quad (A9)$$

上式はすなわち(27)式である。

(2006年3月6日原稿受理, 2006年7月6日採用決定)

付録 k_h および k_r の近似式の誘導

一端固定他端水平移動自由回転拘束の境界条件下での水平剛性 k_h の厳密式(本文(18)式、以下本文は略す)から近似式(26)式への誘導、および対象曲げにおける回転剛性の厳密式(19)式から近似式(27)式への誘導を行う。

< k_h の近似式の誘導 >

$\tan(ql/2)$ をその級数展開の第二項までを考慮し、下式で近似する。

$$\tan \frac{ql}{2} = \frac{ql}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{ql}{2} \right)^3 \quad (A1)$$

上式および(11)式を(18)式に代入して、下式となる。

$$k_h = \frac{1}{\frac{l}{S_s} + \frac{l^3}{12S_b} \left(1 + \frac{P}{S_s} \right)^2} \quad (A2)$$

上式を Maclaulin 展開して P^3 以上の項を無視し、(23)式の条件 ($(S_b/l^2)/S_s \gg 1$) を適用し、さらに(25)式を代入すると下式となる。

$$k_h = \left[1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{S_s}{P_{cr}} \frac{P}{P_{cr}} - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 \right] \frac{S_s}{l} \quad (A3)$$

上式に(23)式の条件 ($S_s/P_{cr} \ll 1$) を適用すると、下式となる。

$$k_h = \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 \right] \frac{S_s}{l} \quad (A4)$$

上式において、 $P=P_{cr}$ で $k_h=0$ となるように、 $\pi^2/12 \approx 1$ とみなせば、上式は下式となる。

$$k_h = \left[1 - \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 \right] \frac{S_s}{l} \quad (A5)$$

上式はすなわち(26)式である。

< k_r の近似式の誘導 >

$(ql/2)/\tan(ql/2)$ をその級数展開の第二項までを考慮し、(19)式を下式で近似する。