非正規確率変数の同時確率密度関数を用いた基準強度の算定

CALCULATION OF REFERENCED STRENGTH BY JOINT PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF NON-NORMAL RANDOM VARIABLES

中村 昇*, 堀江和美**, 飯島泰男***

Noboru NAKAMURA, Kazumi HORIE and Yasuo IJIMA

Joint probability density function (JDF) for non-normal random variables was derived by bivariate normal distribution function. From this JDF, the referenced strength, the 5th percentile of the strength distribution with 75% confidence level, for each grade of stress graded lumbars was calculated, assuming modulus of elasticity (MOE) as Normal distribution and modulus of rupture (MOR) as 2P Weibull distribution. And the referenced strength was also calculated by Monte Carlo simulation using linear regression analysis by weighted residue (LRA). These values were compared. The results are as follows.

(1) The difference between these values depends on species. For example, in Douglas-fir and Dahurian larch they are relatively similar because the standard error by LRA of these species is relatively large. But for some species having small standard error, the difference is relatively large.

(2) In lower grades than mean MOE, the referenced strength by LRA method is larger than that by JDF method, but in higher grades the situation is reverse. The reason is that the standard error is proportional to $\sqrt{\text{MOE}}$ and the standard deviation of MOR in lower grades is small and that in higher grades is large.

JDF method is really true from the probabilistic and statistical point. So it is hoped to recalculate load and resistance factors for stress graded lumbars in the Recommendation for Limit State Design of Timber Structures(draft) by JDF method.

Keywords : joint probability density function, non-normal random variable, stress graded lumber, referenced strength

同時確率密度関数、非正規変数、機械等級区分材、基準強度

1. はじめに

「木質構造限界状態設計指針(案)・同解説」¹⁾では、設計点と荷重および強度の公称値から算出した部分安全係数を用いた、荷重・耐力係数倍設計を採用している。同指針(案)では、機械等級区分材、目視等級区分材に係わらず、耐力の分布を2Pワイブル分布とし、変動係数の値に応じて荷重・耐力係数を算出し、設計者が適切な値を選べるようにしてある。しかし、機械等級区分材の場合、曲げヤング係数(MOE)値の範囲により強度分布が規定されるが、同指針(案)ではこのことを考慮していない。この問題は、MOEと強度の同時確率密度関数に関し、MOE値の範囲で制限された強度分布を用いて、荷重・耐力係数を算出することができれば解決する。

また、荷重・耐力係数を算出するためには、強度の公称値=基準強度が必要であり、機械等級区分材の曲げ強度(MOR)に関する基準強度=信頼水準75%における5%下限値(TL値)の算出方法は、次に示すような方法が考えられる。ただし、以下のいずれの方法も、実大材の強度試験データに基づいている。

- 1) バンド法²⁾: MOE値の範囲を決め、その範囲に含まれるデータのMOR値の分布からTL値を算出する。
- 2) 回帰分析を用いる方法²⁾: MOE-MORについての回帰分析を行

い、必要であれば重み付けをした回帰直線からTL値を算出する。

3) モンテカルロシミュレーションを用いる方法²⁾: 2)の回帰分析を用い、仮定のMOE-MORを発生させ、MOE値の範囲に含まれる発生値からTL値を算出する。

4) 同時確率密度関数を用いる方法: MOE-MORについての同時確率密度関数を用いて、MOE値の上下限値で挟まれた範囲におけるTL値を算出する。

しかし、各番号の方法に対して、以下の問題点もあげられる。

1) MOE値の範囲におけるデータ数が少ない場合、算出されたTL値の信頼性が低い。2) MOE値の範囲のどの値を代入すれば5%下限値となるのか分からない。2, 3) 回帰分析そのものが残差標準偏差を正規分布と仮定しており、残差標準偏差の重ね合わせがMORとなるのであるから、MORの分布も正規分布になってしまう。しかし、MORが正規分布以外の分布にフィットした場合、整合性が取れない。また、重みの根拠についての理論的な裏付けがない。1~4) 実大材の強度試験データが、必ずしも母集団を表していないかも知れない。

確率・統計学的観点から正しい手法は4)であるが、上述した問題点も存在する。しかし、どのような場合にも得られるデータの数

* 新潟大学農学部応用生物化学科 教授・農博

** 木質構造研究所 代表・農博

*** 秋田県立大学木材高度加工研究所 教授・農博

Prof., Dept. of Applied Biological Chemistry, Faculty of Agriculture, Niigata Univ., Dr. Agr.

Director, Timber Engineering Institute, Dr. Agr.

Prof., Institute of Wood Technology, Akita Prefectural Univ., Dr. Agr.

には限度があること、また、いずれの方法においても MOE や MOR の分布が最もフィットした経験分布を母集団と考えていることを考慮すれば、この点は問題とはならないであろう。したがって、4) に示した同時確率密度関数を用いて、TL 値を算出することが最善と考えられる。

以上概観してきたように、機械等級区分材における限界状態設計では、MOE と MOR の同時確率密度関数を用いることが望まれる。しかし、定式化されている同時確率密度関数は正規分布に関するものであり、MOE や MOR が非正規変数の場合の定式化については、近似式が示されている³⁾ものの、同文献に示されている原著論文⁴⁾でもどのようにして求めたのか式の展開がなされておらず、今後の研究の発展のためには式の展開がなされるべきと考える。

そこで、非正規変数に関する同時確率密度関数を誘導し、これを用いて各機械的等級区分材における基準強度を求め、データの都合上、上述したバンド法を除いた手法により求めた値と比較し、両者の間にどの程度の差異があるかを明らかにした。

2. 非正規変数に関する同時確率密度関数の誘導

2つの確率変数 X 、 Y を正規分布、相関係数を ρ とし、 X 、 Y の平均および標準偏差をそれぞれ μ_X 、 μ_Y および σ_X 、 σ_Y とすれば、同時確率密度関数は次式で表される。

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left\{\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\}\right] \quad (1)$$

次に、2つの非正規変数 X_1 、 X_2 について、それぞれの累積確率分布を $F_{X1}(x_1)$ 、 $F_{X2}(x_2)$ 、確率密度関数を $f_{X1}(x_1)$ 、 $f_{X2}(x_2)$ 、相関係数を ρ_{12} とし、同時確率密度関数を誘導する。

(1) まず、確率変数 X_1 、 X_2 の任意の値において、累積確率および確率密度の値が等しい等価な正規変数のパラメータをそれぞれ m_{X1} 、 m_{X2} および s_{X1} 、 s_{X2} とすると、次式が成り立つ。ただし、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規累積分布関数、 $\phi(\cdot)$ は標準正規確率密度関数を表す。

$$\left. \begin{aligned} \Phi\left((x_1 - m_{X1})/s_{X1}\right) &= F_{X1}(x_1) \\ x_1 \text{ で微分して } 1/s_{X1} \phi\left((x_1 - m_{X1})/s_{X1}\right) &= f_{X1}(x_1) \\ \Phi\left((x_2 - m_{X2})/s_{X2}\right) &= F_{X2}(x_2) \\ x_2 \text{ で微分して } 1/s_{X2} \phi\left((x_2 - m_{X2})/s_{X2}\right) &= f_{X2}(x_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) 次に、 $z_1 = (x_1 - m_{X1})/s_{X1}$ 、 $z_2 = (x_2 - m_{X2})/s_{X2}$ 、 X_1 、 X_2 の相関係数を $\rho_{0,12}$ とし、①式を X_1 、 X_2 を用いて表したのが次式である。

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi s_{X1}s_{X2}\sqrt{1-\rho_{0,12}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{0,12}^2)} \cdot \left\{\left(\frac{x_1 - m_{X1}}{s_{X1}}\right)^2 - 2\rho_{0,12}\left(\frac{x_1 - m_{X1}}{s_{X1}}\right)\left(\frac{x_2 - m_{X2}}{s_{X2}}\right) + \left(\frac{x_2 - m_{X2}}{s_{X2}}\right)^2\right\}\right]$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{x_1 - m_{X1}}{s_{X1}}\right)^2 - 2\rho_{0,12}\left(\frac{x_1 - m_{X1}}{s_{X1}}\right)\left(\frac{x_2 - m_{X2}}{s_{X2}}\right) + \left(\frac{x_2 - m_{X2}}{s_{X2}}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{0,12}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{0,12}^2)} \cdot \left\{z_1^2 - 2\rho_{0,12}z_1z_2 + z_2^2\right\}\right] \cdot \frac{f_{X1}(x_1)}{\phi(z_1)} \cdot \frac{f_{X2}(x_2)}{\phi(z_2)} \\ &= \phi(z_1, z_2, \rho_{0,12}) \cdot \frac{f_{X1}(x_1)}{\phi(z_1)} \cdot \frac{f_{X2}(x_2)}{\phi(z_2)} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \phi(z_1, z_2, \rho_{0,12}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{0,12}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{0,12}^2)} \cdot \left\{z_1^2 - 2\rho_{0,12}z_1z_2 + z_2^2\right\}\right] \quad (3) \end{aligned}$$

である。

(3) 定義より、確率変数 X_1 、 X_2 に関する相関係数 ρ_{12} は、それぞれの変数の平均および標準偏差を μ_{X1} 、 μ_{X2} および σ_{X1} 、 σ_{X2} とすれば、次式で算出される。

$$\rho_{12} = E\left\{\left(\frac{x_1 - \mu_{X1}}{\sigma_{X1}}\right) \cdot \left(\frac{x_2 - \mu_{X2}}{\sigma_{X2}}\right)\right\} \quad (4)$$

一方、確率変数 X 、 Y の関数 $h(x, y)$ に関する期待値の定義より、 x と y の同時確率密度関数を $f(x, y)$ とすれば、

$$E\{h(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

と表される。 $h(x, y) = ((x_1 - \mu_{X1})/\sigma_{X1}) \cdot ((x_2 - \mu_{X2})/\sigma_{X2})$ と考えれば、

$$\rho_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_1 - \mu_{X1}}{\sigma_{X1}}\right) \cdot \left(\frac{x_2 - \mu_{X2}}{\sigma_{X2}}\right) \cdot f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (5)$$

である。③式を⑤式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_1 - \mu_{X1}}{\sigma_{X1}}\right) \cdot \left(\frac{x_2 - \mu_{X2}}{\sigma_{X2}}\right) \\ &\quad \cdot \phi(z_1, z_2, \rho_{0,12}) \cdot \frac{f_{X1}(x_1)}{\phi(z_1)} \cdot \frac{f_{X2}(x_2)}{\phi(z_2)} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

となる。さらに、②式より

$$\frac{1}{s_{x1}} dx_1 = \frac{f_{x1}(x_1)}{\phi(z_1)} dx_1 = dz_1$$

$$\frac{1}{s_{x2}} dx_2 = \frac{f_{x2}(x_2)}{\phi(z_2)} dx_2 = dz_2$$

であるから、これらを代入して、結局

$$\rho_{12} = \iint \left(\frac{x_1 - \mu_{x1}}{\sigma_{x1}} \right) \cdot \left(\frac{x_2 - \mu_{x2}}{\sigma_{x2}} \right) \cdot \phi(z_1, z_2, \rho_{0,12}) \cdot dz_1 dz_2 \quad (6)$$

と表すことができ、(2)で述べた $\rho_{0,12}$ は、⑥式を満足する値であることが分かる。したがって、非正規変数 X_1 、 X_2 についての同時確率密度関数は次式で表すことができる。

$$f(x_1, x_2) = \phi(z_1, z_2, \rho_{0,12}) \cdot \frac{f_{x1}(x_1)}{\phi(z_1)} \cdot \frac{f_{x2}(x_2)}{\phi(z_2)}$$

ただし、 $\phi(z_1, z_2, \rho_{0,12})$ は④式で表され、 $\rho_{0,12}$ は⑥式を満足する値である。

3. 各機械等級区分材における基準強度の算出

3. 1 対象とした樹種およびデータ

文献 1) pp.320 に収集されたデータを用いた。樹種は、スギ (*Cryptomeria japonica*)、エゾマツ (*Picea jezoensis*)、トドマツ (*Abies sachalinensis*)、ダフリカカマツ (*Larix gmelini*)、カマツ (*Larix leptolepis*)、アカマツ (*Pinus densiflora*)、ヒノキ (*Chamaecyparis obtusa*)、ベイマツ (*Pseudotsuga menziesii*)、ヒバ (*Thujopsis dolabrata*) である。実大材の曲げ試験から得られた MOE、MOR の値を ASTM-D2915 の換算式によって、含水率 15% 時の値に調整して解析を行った。ここでは同時確率密度関数を用いることから、100% のデータに対して分布を設定する必要がある。100% データフィットの場合、対数正規分布が適当であるという結果⁴⁾もあるが、文献 1) では 2P ワイブル分布を用いていることから、MOR については 2P ワイブル分布とした。また、MOE については、100% データにフィットする正規分布を仮定した。それぞれの分布パラメータは積率法により算出した。表.1 に樹種ごとの MOE、MOR の平均と変動係数の値を示した。

3. 2 同時確率密度関数を用いた基準強度の算出

前節で示した樹種に対し、MOR および MOE をそれぞれ 2P ワイブル分布、正規分布とした非正規確率変数に関する同時確率密度関数を用いて、各等級区分における基準強度を算出した。例として、スギに関する同時確率密度関数を図.1 示したが、例えば E70 であれば、図.2 に示すように下限値 5.9 (kN/mm²) 上限値 7.8 (kN/mm²) で区切り、経験分布にフィットしないで、この部分 (図.3 参照) における下側 5% 値に当たる強度値を基準強度とした。算出した基準強度を表.2 に示した。すべての樹種に対し、MOR および MOE をそれぞれ 2P ワイブル分布、正規分布としているので、図.1 および 2 に示した、同時確率密度関数や上下限値で区切られた分布の様子は、

すべての樹種で同様であった。

表 1 MOE および MOR における平均と変動係数

樹 種	MOE		MOR	
	平均 (kN/mm ²)	変動 係数	平均 (N/mm ²)	変動 係数
スギ	7.2	0.25	37.6	0.22
エゾマツ	9.8	0.17	39.4	0.24
トドマツ	9.2	0.15	38.2	0.22
ダフリカカマツ	12.7	0.18	51.7	0.27
カマツ	8.7	0.21	39.4	0.27
アカマツ	8.6	0.24	37.4	0.31
ヒノキ	10.6	0.12	49.4	0.21
ベイマツ	11.0	0.26	45.6	0.34
ヒバ	8.8	0.14	41.0	0.19

図 1 スギにおける同時確率密度関数

図 2 スギ E70 における同時確率密度関数

3. 3 重み付け回帰直線分析を用いた基準強度の算出

回帰分析は MOR の残差標準偏差を一定とする場合が一般的であるが、乱数を発生させると MOE の値が小さいところで負の MOR がかなり出現してしまう。そこで、文献 2)にある、残差標準偏差が MOE の平方根に比例する場合について、次式を用いて TL 値を算出した。

$$TL = a + b \cdot MOE - K \cdot Se \cdot \sqrt{MOE}$$

ただし、 a 、 b は回帰係数、 Se は残差標準偏差、 K は信頼限界係数である。3.1 で MOE にフィットさせた正規分布を母集団と考え、 $K=1.645$ とした。

図 3 スギ E70 における確率密度関数

3. 4 シミュレーションを用いた基準強度の算定

3.3 で得られた回帰分析結果を用いた。また、文献 2)に倣い、各等級における MOR を 10,000 発生させ、昇順に並べたときの 500 番目の値を下側 5% 値として求め、表 2 に示した。ただし、残差標準偏差が MOE の平方根に比例する場合、ベイマツおよびダフリカカラマツの E50 において、負の MOR がそれぞれ 15 個、8 個発生してしまったが、それらを除いた発生個数における下側 5% に相当するのはそれぞれ 499.25 番目および 499.6 番目なので、500 番目の値を採用した。

4. 結果と考察

非正規変数に関する同時確率密度関数を用いて、MOR を 2P ワイブル分布、MOE を正規分布とした場合、機械等級区分材に対し、各等級における基準強度を算出し、重み付け回帰直線分析による方法およびモンテカルロシミュレーションによる方法から得られる値と比較した。その結果、次のことが分かった。

- (1) 重み付け回帰直線分析を用いた方法による値と、同時確率密度関数による方法で算出した値は、樹種によってはかなり異なっている。例えば、ベイマツとダフリカカラマツにおける両者の値は比較的近いが、これは重み付け回帰直線の残差標準偏差が大きいためであり、他の樹種では残差標準偏差が小さく、両者の値にかなり大きな差が見られるものがある。
- (2) MOE が平均値より小さい等級では、重み付け回帰直線分析を用いた値より同時確率密度関数を用いた方が小さく、平均値より大きい等級では逆になっている。これは、重み付け回帰直線分析では残差標準偏差を MOE の平方根あるいは MOE に比例させているので、

MOE の小さい等級では MOR の標準偏差が小さく、大きい等級では大きくなってしまいうためである。また、残差標準偏差の仮定により、かなり大きな違いが生じている樹種も存在している。

文献 1)では、機械等級区分材における変動係数に対応して荷重・耐力係数が算定されているが、以上示して来たことから考えると、変動係数ではなく、樹種によって係数が異なる可能性がある。したがって、今後各樹種に対して、荷重・耐力係数を算定し、文献 1)で算定した値と比較する必要があるだろう。

表 2 方法の違いによる基準強度

等級	スギ			エゾマツ			トドマツ		
	RA1	RA2	JDF	RA1	RA2	JDF	RA1	RA2	JDF
E50	23.1	22.6	19.9	12.8	12.6	10.7	15.0	12.9	11.3
E70	27.1	26.9	26.4	18.7	18.5	16.8	20.8	19.5	18.1
E90	31.7	31.5	32.9	25.4	24.6	23.9	27.1	26.2	25.7
E110	36.2	36.1	39.1	32.0	30.8	31.3	33.2	33.0	33.5
E130	41.0	40.9	44.8	38.5	37.2	38.7	39.7	40.0	41.1
E150	45.7	45.8	50.1	45.2	43.6	45.7	46.5	47.0	48.1
等級	ダフリカカラマツ			カラマツ			アカマツ		
	RA1	RA2	JDF	RA1	RA2	JDF	RA1	RA2	JDF
E50	8.1	6.3	7.5	16.5	15.3	12.9	14.0	13.0	11.2
E70	15.5	13.9	12.8	22.0	21.3	19.6	19.2	18.5	17.1
E90	23.6	21.8	20.0	28.3	27.6	27.1	25.0	24.3	24.0
E110	31.5	29.8	29.1	34.4	34.0	29.1	30.8	30.2	29.1
E130	39.3	37.9	38.0	40.7	40.5	42.7	36.7	36.3	39.0
E150	47.4	46.1	47.5	47.1	47.1	50.1	42.7	42.4	46.6
等級	ヒノキ			ベイマツ			ヒバ		
	RA1	RA2	JDF	RA1	RA2	JDF	RA1	RA2	JDF
E50	16.7	13.6	11.0	10.9	10.0	9.3	21.3	19.3	15.8
E70	23.5	20.9	18.5	17.0	16.1	14.7	26.1	24.9	23.0
E90	30.5	28.5	27.2	23.6	22.5	21.4	31.1	30.6	30.3
E110	37.1	36.2	36.2	30.3	29.1	29.1	36.3	36.5	37.6
E130	44.1	44.0	45.4	37.0	35.8	37.5	42.1	42.5	44.5
E150	51.6	51.9	54.1	43.7	42.6	46.0	47.9	48.6	50.8

(注) RA1: シミュレーションによる方法、RA2: 重み付き回帰直線による方法、JDF: 同時確率密度関数による方法

参考文献

- 1) 日本建築学会: 木質構造限界状態設計指針(案)・同解説、2003.
- 2) 建設省建築研究所: 建設省総合技術開発プロジェクト「新木造建築技術の開発報告」、pp.12-68、1989.
- 3) Armen Der Kiureghian, Pei-Ling Liu: *J. of Eng. Mechanics*, 112(1), pp.85-104, 1986.
- 4) Nataf, A.: Determination des Distribution dont t les marges sont Donnees, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, 225, pp.42-43, 1962.
- 5) 堀江和美、中村 昇、飯島泰男: 日本木材学会誌、45(2), pp.103-110、1999.

(2006年9月5日原稿受理、2007年1月12日採用決定)