連結構造物における定点理論に基づく質量比－周波数比空間の 領域分類と最適パラメータの誘導

PARTIONING OF MASS AND FREQUENCY RATIO SPACE BASED ON INVARIANT POINT THEORY OF CONNECTED BUILDINGS AND DERIVATION OF OPTIMUM PARAMETERS

楊 貴 君*, 岩崎良二**, 高田毅士***

Yang GUIJUN, Ryoji IWASAKI and Tsuyoshi TAKADA

The Invariant point theory were developed two decades ago for reduction of response of a main system by putting an additional subsystem on it. This paper presents that this theory is now extended to a system consisting two single-degree-of-freedom systems connected each other with the joint and is found to be applicable to determine the optimum characteristics (a damping ratio and a stiffness of the systems and joint) under stationary excitations. This theory can categorize optimum solutions into three domains in terms of the mass ratio and the frequency ratio. The optimum systems with the optimum joint characteristics derived from the theory were verified by a series of experiments where scaled models with the optimum joints are tested on a shaking table under the stationary excitations. The results demonstrate effectiveness of the theory by observing that the system response gets reasonably small. It is also reported that the response of the model is measured under several earthquake ground motions. The result can show efficiency of the proposed method.

Keywords: Invariant Point, Optimum Tuning Ratio, Optimum Damper, Passive Vibration Control,

Seismic Response, Shaking Test

定点、最適同調比、最適ダンパー、パッシブ振動制御、地震応答、振動台実験

1. はじめに

近年、様々な入力に対する構造物の応答を制御する方法が提案され、実用化されている。この中には、構造物そのものへの入力エネルギーを抑えたり、特定の階以上へのエネルギーを抑える免震装置に代表される passive 制御や、質量を付加したり、構造部材の剛性制御を行い応答を抑える active 制御など多くの方法がある。また、地震被害調査などの結果から I_s 値の小さい構造物に対しての補強効果の有効性から新たな構造部材の追加や有効断面積の増加や繊維膜で覆うことによる補強などの構造物の耐力補強の方法もある。

中でも隣接する構造物を接合することによる補強効果を取り入れた所謂連結制震の方法も提案され、一部実際にも適用されている。連結部のダンパーやばねについて弾塑性履歴特性を有する鋼材を用いる研究¹⁾や位相制御を利用したダンパーの選定²⁾、捩れ振動に対する効果^{3),4)}、多層建物の場合の効果など広範囲になされている。中でも伝達関数においての接合ダンパーによらない点（定点）を基礎に最適ダンパーやばねを決める定点理論による研究がある。古く Den Hartog⁵⁾は定点の存在を示し、それ以来多くの研究がなされているが^{6),7)}など蔭山による研究^{8),9)}がその代表的なものであり、連結する2つの構造物

を主構造物、従構造物(主構造物は質量が大きく固有周期が短い)とし、主構造物の伝達関数のピークが最小となる接合ダンパーやばねの最適値と質量比、固有周波数比(主構造の特性に対する比)の関係を示している。しかし、集合住宅、歴史的構造物などの既存構造物に対す

図1 本研究で扱うモデル

* 株式会社横河システム建築

** 東京大学大学院工学系研究科建築学専攻 助手・工博

*** 東京大学大学院工学系研究科建築学専攻 教授・工博

Yokokawa System Buildings Corp.

Research Assoc., Graduate School of Eng., the Univ. of Tokyo, Dr. Eng.

Prof., Graduate School of Engineering, the University of Tokyo, Dr. Eng.

る補強という意味で、質量比が小さく、固有周波数も低い範囲のみでの検討では不十分である。本研究は、定点理論を質量比、固有周波数比共に1.0以上の広範囲な構造物どうしに拡張し、連結ダンパーおよびばねの最適値を決定する手法を提案し、さらに、振動台を使用した自然地震波を模擬した入力波に対する最適モデルの応答を評価してその実用性を示した。

2. 定点理論による領域の区分

本研究で扱うモデルは、図1に示すモデルである。M系列は主構造物でA系列は従構造物とし、従来は、質量、固有周波数はM系列が大きいとされるが、本研究ではこの制限は設けていない。但し、M系列とA系列の間には、質量比も周波数比も小さい時のAの応答を最適にするパラメータが質量比も周波数比も大きい時のMの応答を最適にすることと対応するような相反関係があるが、以下の関係により最適同調比や最適減衰定数はそのままの値とはならない。

このモデルから以下のパラメータを定義する。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{m_A}{m_M} : \text{質量比} & \omega_M^2 &= \frac{k_M}{m_M} & \omega_A^2 &= \frac{k_A}{m_A} \\ \omega_C^2 &= \frac{k_C}{m_M} : \text{連結ばねによる見かけの固有周波数} \\ h_2 &= \frac{C_C}{2m_M\omega_M} : \text{連結部の減衰定数} & f_1 &= \frac{\omega_C}{\omega_M} : \text{同調比} \\ r &= \frac{\omega}{\omega_M} : \text{強制振動数比} (\omega : \text{入力周波数}) \\ f_2 &= \frac{\omega_A}{\omega_M} : \text{独立とした時の固有周波数比} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

運動方程式から伝達関数を求める過程は文献8にもあるのでここでは結果のみを示す。

M系列の伝達率 Z_M (ある周波数における伝達関数値を伝達率とする) とA系列の伝達率 Z_A は、

$$Z_M = \frac{Q_1 + Q_2 h_2 i}{S_1 + S_2 h_2 i} \quad Z_A = \frac{P_1 + P_2 h_2 i}{S_1 + S_2 h_2 i} \quad (2)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= r^2 \left\{ -r^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) f_1^2 + f_2^2 \right\} \\ Q_2 &= 2r^3 \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \\ S_1 &= (1-r^2)(f_2^2 - r^2) + \left\{ (f_2^2 - r^2) + \frac{1}{\mu}(1-r^2) \right\} f_1^2 \\ S_2 &= 2r \left\{ f_2^2 - r^2 + \frac{1}{\mu} - \frac{r^2}{\mu} \right\} \\ P_1 &= r^2 \left\{ -r^2 + 1 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) f_1^2 \right\} \\ P_2 &= 2r^3 \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) (= Q_2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

と表される。また、定点振動数では、伝達率が接続部の減衰に依存しないことから、次の条件を満たす r_f として求まる。

伝達率 Z_M に対する定点振動数の条件式

$$\frac{Q_1}{S_1} = + \frac{Q_2}{S_2} \quad (4-1) \quad \frac{Q_1}{S_1} = - \frac{Q_2}{S_2} \quad (4-2)$$

(4-2)式の場合に求まる定点振動数 r_1 、 r_2 は、

$$r_1^2, r_2^2 = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5)$$

但し、

$$\begin{aligned} a &= 2\mu(1+\mu) \\ b &= -\{2(1+\mu)^2 f_1^2 + (2\mu+3\mu^2) f_2^2 + \mu^2 + 2\mu\} \\ c &= 2(1+\mu) f_1^2 + (2+\mu) \mu f_2^2 + 2\mu(\mu+1) f_1^2 f_2^2 + \mu^2 f_2^4 \end{aligned}$$

であり、定点の伝達率 $(Z_M)_{r_1, r_2}$ は、

$$(Z_M)_{r=r_1, r_2} = \left| \frac{Q_2}{S_2} \right| = \frac{(1+\mu)r^2}{1-r^2 + \mu(f_2^2 - r^2)} = R_1, R_2 \quad (6)$$

となる。

定点振動数 r_1 、 r_2 における伝達率が等しくなる最適同調条件を課すと

$$f_{1opt} = [\phi_0 \phi_1 \phi_2]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

但し、

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{\mu}{2(1+\mu)^2(\mu f_2^2 + 1)} \\ \phi_1 &= f_2^2 - 1, \\ \phi_2 &= \mu^2 f_2^2 - \mu - 2 \end{aligned}$$

となる。

これが成り立つのは [] 内が正の場合である。更に、(4-1)式の場合に求まる定点振動数 r_3 は、

$$-\mu^2 f_2^2 r^2 + \mu^2 f_2^4 = -\mu^2 f_2^2 r^2 + \mu^2 f_2^4$$

より、

$$r_3^2 = f_2^2 \quad \text{or} \quad f_2 = 1 \quad (8)$$

である。

$f_2 = 1$ は、2つの系が同一の固有周波数を有し、連結の効果が期待できない特別な場合である。また、この r_3 の定点は同調比に関係ないことから第3の定点とする。

同様に定点におけるM系の伝達率も簡単に

$$(Z_M)_{r=r_3} = \left| \frac{(1+\mu)f_2^2}{1-f_2^2} \right| = R_3 \quad (9)$$

と表される。

次に、最適同調条件を満たした場合の3つの定点における伝達率について考える。 r_1 、 r_2 での伝達率 R_1 、 R_2 は、当然等しく

$$R_1 = R_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{r^2(1+\mu)}{\{1 + \mu f_2^2 - (1+\mu)r^2\}} \quad (10)$$

と表される。

ここで $f_1 = (f_1)_{opt}$ を定点振動数を求める(5)式に代入すれば、

$$b = -\frac{2C_c}{1 + \mu f_2^2} \quad c = \frac{C_c}{1 + \mu}$$

但し、

$$C_c = \mu^2(1+2\mu)f_2^4 + 2\mu^2 f_2^2 + \mu(2+\mu)$$

と簡単になる。また、 $\sqrt{b^2-4ac}$ も

$$\sqrt{b^2-4ac} = \frac{2|1-f_2^2|\sqrt{C_c}}{1+\mu f_2^2}$$

となる。これらを(10)式に代入すれば、

$$R_{1,2} = \frac{\sqrt{C_c}}{\mu|1-f_2^2|}$$

となる。一方、 $r=r_3$ では(9)式で与えられるから $(R_{1,2})^2$ と R_3^2 を比較

すると

$$(R_{1,2})^2 - R_3^2 = -\frac{(\mu^2 f_2^2 + \mu)(\mu^2 f_2^2 - 2 - \mu)}{\mu^2 |1-f_2^2|^2} \quad (11)$$

となり、 $(\mu^2 f_2^2 - 2 - \mu) \geq 0$ の時、 $R_3 \geq R_{1,2}$ である。

このことと同調条件とを加味して3つの定点での伝達率の値から図2に示すように3領域に区分した。

図 2 $\mu \cdot f_2$ 領域図

3. 各領域の最適同調比、減衰定数の算定

3.1 領域 I (I型)

定点振動数 r_1 、 r_2 での伝達率が等しい領域で f_1 が最適同調比となる ((7)式参照)。一方、最適減衰条件は、従来の研究と同様、これら2つの定点振動数での r による伝達率の微分係数 = 0 から求まる減衰定数から

$$(h_{2opt})^2 = \frac{(h_{2opt})_{r_1}^2 + (h_{2opt})_{r_2}^2}{2} \quad (12)$$

で与えられる。

図 3 $(f_1)_{opt}$ の等高線(領域 I)

図 4 $(h_2)_{opt}$ の等高線(領域 I)

図3と図4には、領域 I ($\mu=0 \sim 5$, $f_2=0 \sim 1$) での最適同調比、最適減衰定数を等高線で示した。図中太い点線は領域の境界線を示す。どちらも μ が大きいほど、また、 f_2 が小さいほど最適値が大きくなっている。

図5、6、には、最適値を用いた場合の実際の伝達率のピークの値を示した。Mの場合には、 μ が大きく f_2 が小さい部分で小さなピークとなっている(図5参照)。図6にAのピーク値をMとの比で示したが、ほぼ2倍程度の値で μ 、 f_2 によって顕著な差はなかった。主構造物に従構造物を連結するには、質量に依らずバネを柔らかくし接合ばね、減衰を大きくする方が良いことを示す。

図 5 R_M の等高線(領域 I)

図 6 R_A の等高線(領域 I)

3.2 領域 II (II型)

この領域は、 R_3 が $R_1 (= R_2)$ より大きい領域である。 $R_1 = R_2$ となる場合以外での R_3 との関係を考える必要がある。そこで、 $R_1 = R_3$ となる f_1 を求めた。定点の伝達率から

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} = \frac{(1+\mu f_2^2)}{(1+\mu) r_1^2} - 1 - \frac{f_2^2 - 1}{(1+\mu) f_2^2} = 0$$

が成立する。整理して分子が0となるとすれば

$$f_2^2 (1+\mu f_2^2) - (1+\mu) r_1^2 f_2^2 - (f_2^2 - 1) r_1^2 = 0$$

となり、 r_1^2 は、

$$r_1^2 = \frac{(1+\mu f_2^2) f_2^2}{(1+\mu) f_2^2 + f_2^2 - 1}$$

となる。一方、 r_1^2 は定点振動数であるから定点振動数方程式の根であることより

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(1+\mu f_2^2) f_2^2}{(1+\mu) f_2^2 + f_2^2 - 1}$$

$$b^2 - 4ac = \left(\frac{2a(1+\mu f_2^2) f_2^2}{(1+\mu) f_2^2 + f_2^2 - 1} - b \right)^2$$

となる。この式から f_1 について求めると

$$(f_{1opt})_{II} = (\phi'_0 \phi_1 \phi_2)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

但し、

$$\phi'_0 = \frac{\mu f_2^2}{(1+\mu)(1+\mu f_2^2)(\mu f_2^2 + 2f_2^2 - 1)}$$

となる。また、 R_2 と R_3 の交点は、 R_2 が f_1 に対して単調減小関数で $f_1=0$ の時 $R_2=R_3$ となることから $f_1=0$ になる(図7参照)。結局、最適同調比は $0 \sim (f_1)_{opt}$ の範囲で与えられる。また、最適減衰定数は従来と同じように求められる。図8,9,10,11には、領域Ⅰの場合と対応する図を示した。但し、 $f_1 = (f_1)_{opt}$ の場合である。

Mの伝達率の最大値は、 μ が小さく f_2 が大きい部分で小さくなっており、この部分ではAのピーク比が若干大きくなっているが、せいぜい1.5倍程度である。即ち、従の構造物の質量が大きい場合には硬くし、接合ばね、減衰とも小さくする方がよい。

図 7 領域Ⅱでの不動点での応答

図 8 $(f_1)_{opt}$ の等高線(領域Ⅱ) 図 9 $(h_2)_{opt}$ の等高線(領域Ⅱ)

図 10 R_M の等高線(領域Ⅱ) 図 11 R_A の等高線(領域Ⅱ)

3.3 領域Ⅲ (Ⅲ型)

2つの定点振動数での伝達率 R_1, R_2 を等しくできない領域である。すべての定点振動数での伝達率を考える。これらの f_1 に対する変化は、 R_1 は単調増加、 R_2 は単調減少、また R_3 は一定から $f_1=0$ での

大小関係により決まる。 $f_1=0$ では、 $R_1 \geq R_3$ となることから、最適同調比は $f_1=0$ となる。最適減衰定数は、 R_1 がピークになるように減衰定数を定めることができるが、他のピークが大きくなる場合が現れたので(図12)、修正最適減衰条件として、2つのピークがなるべく等しくなるような減衰定数として数値的に求めた。最適条件は同じであるが h_{2opt} と R_M の最適結果が μ と f_2 によって変化が異なるので $\mu < 2$ の領域をⅢA、以上をⅢBとして示した。ⅢAでは、複雑な等高線になっているが、ⅢBでは μ にはほとんど関係なく f_2 が大きくなると h_{2opt} は小さく、 R_M は大きくなっている。

図 12 領域Ⅲの減衰定数による伝達関数の変化

図 13 領域ⅢAの結果

図 14 領域ⅢBの結果

4. 模擬地震動入力による振動実験

提案した最適モデルは、周波数特性のない入力に対してのものであるが、実際の地震動波形はいろいろな周波数特性を有している。この

ような場合に対しての最適モデルの有効性を検証するために振動実験を行った。

4.1 振動モデル

図15に示すように厚い鋼板を質量としてこれに4本の鋼板の板ばねをつけたものをM模型、A模型とした。これらを接合する接合ばねは、V字形の板ばねであり、接合ダンパーは特注のオイルダンパーである。オイルダンパーの特性約5%~20%まで設定可能で、周波数および振幅依存性に対する性能実験の減衰定数結果は図16に示す。オイルの出入量は弁の開放度により変わる。弁の開放を1/8回転、3/8回転の場合、正弦波入力の場合と振幅を変えた場合の結果、周波数によって振幅依存性の範囲は異なり、5Hzでは0.1cm以上、主構造物の固有周波数である10Hzでは0.1cm~0.2cmで依存性はないが、15Hz以上では0.15cm以下で依存している。各領域の代表モデルの模型質量、

図 15 振動台実験モデルの概略図

図 16 減衰定数の振幅依存性

表 1 振動台実験に用いたモデル

	f_1	$h_2(\%)$		f_1	$h_2(\%)$		f_1	$h_2(\%)$
I-1	0.464	9.1	II-1	0.464	9.1	III-1	0	9.1
I-2	0.421	9.1	II-2	0	8.2	III-2	0	17.1
I-3	0.51	8.2	II-3	0	17.1	III-3	0.42	0
I-4	0	8.2	II-4	0.421	9.1	III-4	0.51	9.1
I-5	0	17.1	II-5	0.421	9.1	III-5	0.51	9.1
			II-6	0.51				

板ばねを決め、接合ばねとオイルダンパーの最適値を計算し(各ケースの1)、それと比較するケースを選んで表1に示した。但し、M模型単独の固有周波数は10Hzである。用いた入力時刻歴は、El-Centro(1940,NS)、Taft(1952,EW)、八戸(1968,NS)、神戸(神戸海洋気象台1995NS)で、卓越周波数を10Hz 近辺にするため時間軸を1/3に縮めて用いた。

4.2 実験結果—変位の標準偏差比、最大値比

結果は、標準偏差と最大値に注目し、標準偏差は振動台変位の標準偏差との比を、最大値は最適解ケース1との比で整理した。領域Iの結果を図17に示した。ケース2,3が f_1 を変えた場合で標準偏差、最大値ともケース1より大きくなっている。4,5は h_2 を変えた場合で、標準偏差比はあまり変わらないが、最大値比では減衰定数が大きい方が大きくなっている。

図 17 領域Iの結果

領域IIの結果を図18に示した。前述した通り、最適同調比は0から(13)式で与えられた範囲で与えられる。ケース1~5はその範囲の0と上限値で減衰定数を変えた場合で、ケース6のみ最適同調比外である。領域Iと比較して標準偏差比はどの場合でも小さく、また6の場合だけ特に大きくはない。最大値比はケース6が大きい最適同調比内でも減衰定数によっては大きくなる場合もあり、 $f_1 = 0$ 、 $h_2 = 17.1\%$ (ケース3)が一番小さかった。

図 18 領域IIの結果

図 19 領域IIIの結果

領域Ⅲの結果を図19に示した。ケース1~2は最適同調比(接合ばねなし)の場合で減衰定数を変えている。3,4,5は接合ばねの強さを変え、特に3はオイルダンパーがない場合である。標準偏差比、最大値比とも減衰定数に関わらず最適同調比の場合に小さい。また、接合ばねが強いほど両方の比も大きく、減衰定数にはそれほど関係しないように思える。

領域毎の相違をみると、領域Ⅰ、Ⅱでは標準偏差比が小さく、最大値比も最適同調比の結果を中心にばらついているが、領域Ⅲの場合は標準偏差比や最大値比も大きく、また、最適同調比との違いが顕著である。地震動による相違は、標準偏差比では領域Ⅲの Taft、最大値比では領域Ⅰの神戸、領域Ⅲの El-Centro など一部で離れた値をとるものの全体的には差異が認められない。

結局、標準偏差比、最大値比とも入力周波数特性やダンパーの周波数および振幅依存性に関わらず最適モデルが安定して小さな値を与えている。

5. まとめ

2つの1質点系を接合ばねと接合ダンパーで連結した連結建物の主構造物の伝達関数のピークを最小にする最適接合ばねと最適ダンパーの決定方法について、定点理論に基づいて、質量比、周波数比で定義される領域を3つに区分し、各領域での最適値決定方法を提案し、模擬地震入力に対する応答について振動台実験を実施し、提案した手法による最適モデルが小さな応答を示していることにより、手法の妥当性を明らかにした。以上を整理すると以下ようになる。

- (1) 従来の定点理論を基に複数の定点振動数における伝達率の値を等しくする条件により、主構造物と従構造物の質量比と固有周波数比とで定義される領域を3つに分割できることを示した。
- (2) 領域Ⅰは、従来から研究されている領域(質量比 <1 、周波数比 <1)で、2つの定点振動数 r_1 、 r_2 での伝達率が等しくかつピークとなることにより最適同調比、最適減衰定数を定めることができる。
- (3) 領域Ⅱ(周波数比 >1)については第3の定点(文献8)を加味することによって、最適同調比は $0 \sim (f_{1opt})$ の範囲で表される。
- (4) 領域Ⅲ(質量比 <1 で周波数比 >2 と質量比 >2 で周波数比 $1 \sim 0.5$)では、最適同調比は接合ばねが無いときであり、最適減衰定数は、伝達率の2つのピーク値が等しくなる場合であるが、理論的には求められず、本研究では数値計算によって求めた。
- (5) 周波数特性の異なる4種類の模擬地震動を入力とした各領域を代表するモデルの振動台実験を行った結果、振動台の変位と主構造モデル頂部の変位の標準偏差の比や最適モデルの主構造頂部の変位の最大値と他のモデルのそれとの比から、最適モデルが安定して小さな値を与えていることを示した。

最後に本研究では、主構造物の伝達関数を主眼に進め、その結果として、従構造物の伝達関数は、主構造物の約2倍程度に納まっている事実を述べるに留まっている。今後、従構造物をも含めた最適化や卓

越周波数の異なる入力に対する最適化の問題など推し進めなければならない。

6. 謝辞

本研究には、平成17-19年度日本学術振興会科学研究費補助金(代表者 高田毅士、題名 地震に対する都市の確率論的相互連関脆弱性評価手法の構築と応用基盤研究 (A)) の支援が得られている。

参考文献

- 1) 見波他：履歴ダンパーを用いた連結制振構造に関する実験的研究、日本建築学会大会学術講演梗概集B-2、pp703-704、2003、9
- 2) 石丸辰治他：パッシブ型制振構造物の性能設計法について、日本建築学会大会学術講演梗概集B-2、pp875-880、1997
- 3) 小林他：偏心建物の連結による震動応答制御効果、日本建築学会大会学術講演梗概集B-2、pp225-226、2004、8
- 4) 柳沼他：連結制振構造の振れ応答性状に関する実験的研究、日本建築学会大会学術講演梗概集B-2、pp1011-1012、2005、9
- 5) J.P Den Hartog : Mechanical Vibration、4thed.、McGraw-Hill、pp87-106、1956
- 6) T.Ioi & K.Ikeda : On the Dynamic Vibration Damped Adsorber of the Vibration System, Bulletin of the JSME, Vol. 21, No. 151, pp64-71, 1978
- 7) G.B.Warburton : Optimum Absorber Parameters for Minimizing Vibration Response、EESD, Vol. 9, pp251-262, 1981
- 8) 蔭山満他：連結制震の基本モデルにおける連結バネとダンパーの最適解の誘導、日本建築学会構造系論文集、第529号、pp97-104、2000年3月
- 9) 蔭山満：定点理論による連結制振を対象としたパッシブ系の多モード最適制振の設計法に関する研究、日本大学学位論文、2005年12月

(2006年10月10日原稿受理、2007年3月20日採用決定)