はり柱理論を基礎としたハイブリッド型応力法 2 次元要素 DEVELOPMENT OF HYBRID STRESS 2D FINITE ELEMENT BASED ON THE PLANE BEAM-COLUMN THEORY CONSIDERING HIGHER ORDER SHEAR DEFORMATION

北 農 幸 生*, 近 藤 一 夫**
Yukio KITANO and Kazuo KONDOH

A new and effective hybrid stress 2D finite element based on the plane beam-column theory considering higher order shear deformation and the bi-axial effect in stresses and strains is developed. Using the so-called semi-inverse method, the shearing and the lateral normal stresses as well as the axial normal one are prepared in expression of resultant stresses of the beam-column. These stress fields compose the completely equilibrated ones in the plane stress state. Standard polynomial expansions are employed as the displacement fields on inter-element boundaries. According to the standard hybrid stress finite element procedure shown in the previous papers, a new 2D finite element with the present stress fields is derived, and the availability and the applicability of the present approach are, with aid of several numerical tests, discussed and examined.

Keywords: Hybrid stress method, Higher order shear deformation, Bi-axial effect in stress and strain,
Equilibrated stress field, Semi-inverse method

ハイブリッド型応力法, 高次のせん断変形, 2 軸効果, 平衡応力場, 半逆解法

1. 緒 言

現在, 骨組構造を中心とした建築構造解析分野における主要な課題の一つに, たれ壁, 腰壁あるいは耐震壁等に代表される壁要素や, 接合部のモデル化, 離散化の問題が挙げられる^{8), 9)}。通常のはり柱部材とは異なり, これ等の構造要素は, 2 軸変形状態となるため, その挙動を的確に追跡するためには, こうした効果をも正当に評価する必要がある。この問題を克服する最も簡便な解析方法は, 変位型 2 次元要素を用いた手法であると思われるが, 十分な精度と信頼性を有する解を得るためには非常に細かな要素分割, 膨大な自由度数が必要であり, 現在のコンピュータの性能をもってしても, はなはだ困難なのが現状である。

一方, 著者等が文献 5) 等で提示している, 2 軸効果を考慮したハイブリッド型応力法高次平面はり柱要素は, 文献 1) 等に示した高次のせん断変形を考慮したはり柱要素を基礎に, はり柱断面各点の平衡条件を用いてせん断応力を直応力表示するという, 文献 2)-4) 等に示した応力場の設定法を適用することにより, 材軸方向直成分やせん断成分だけでなく, これまで全く考慮されていなかった横方向直成分や 2 軸効果をも正当に評価したものであり, はり柱全体としての挙動だけでなく, これまで非常に困難であった荷重点や支持点近傍の局所的な変形

をも, 的確に, 又, 比較的容易に, 評価, 算定することが可能である。

本報告では, 壁構造あるいは壁要素を有する架構の解析を主要な目的に, 文献 5) 等に示されたハイブリッド型応力法高次平面はり柱要素を基礎とした高精度な 2 次元要素モデルの提案を行うと共に, いくつかの数値実験により, その精度, 収束性や有効性等を検証した結果について報告する。

提示する 2 次元要素は, 前述した 2 軸効果を考慮したハイブリッド型応力法高次平面はり柱要素を拡張, 一般化し, 要素の左右両端に加え, 断面の上下面をも要素境界とする取り扱いを行ったものであり, これにより, 通常の変位型 2 次元要素と同様, 要素の上下左右の各辺について, 隣接する 2 次元要素あるいははり柱要素, パネ要素等の他の構造要素と容易に連結することが出来るから, 前述した壁構造あるいは壁要素を有する架構を取り扱うことが可能となる。

モデル展開の基本的アイデアは以下のように要約される。

i) 図 1 に示すような, 材軸を z 軸とする 2 次元要素を考え, この要素は左右両端だけでなく上下面でも他の構造要素と連結されているものとする。したがって, 要素の左右両端に加え, 断面の上下面をも要素境界とする取り扱いを行う。

ii) 材の応力-ひずみ関係における独立な状態量は, 2 つの直応力と

* 広島大学大学院工学研究科 大学院生・修士(工学)
** 広島大学大学院工学研究科 准教授・工博

Graduate Student, Graduate School of Engineering, Hiroshima Univ., M. Eng.
Assoc. Prof., Graduate School of Engineering, Hiroshima Univ., Dr. Eng.

せん断応力とし、材軸方向直応力は、断面内無ひずみの仮定から誘導される高次のせん断変形を考慮したはり柱理論により、評価、設定する。

iii) 一方、せん断応力および横方向直応力については、文献2)-4)等)に示された場の設定法を拡張、一般化し、材軸方向および横方向の平衡条件式を用いて、ii)で設定した材軸方向直応力により算定する。これにより、断面全体としての合応力レベルでの平衡条件だけでなく、要素各点の平衡条件をも厳正に満足する、2次元問題としての完全な平衡応力場が構築される。

iv) 材軸方向変位場は、前述した高次のせん断変形を考慮したはり柱理論と同様の場とするが、隣接要素との連結性を考慮し、より一般性、汎用性のあるLagrange多項式を用いた場とする。又、横方向変位場については、横方向の変形成分や2軸効果を正當に評価し、又、要素境界上の平衡条件をより厳正に取り扱うため、材軸方向変位と同様な場とする。

v) ハイブリッド型応力法による定式化は、文献6)、7)等)に示された標準的手法に従うが、要素内応力場として、ii)、iii)で誘導した2次元平衡応力場を、又、要素境界上変位場として、iv)で設定した場を用いる。

vi) コンプリメンタリーエネルギーは、2つの直成分、せん断成分およびその連せり効果を考慮し、厳正に算定する。

図1 ハイブリッド型応力法2次元要素

2. 高次のせん断変形を考慮した平面はり柱理論^{1), 5)}

本節では、まず、本2次元要素の基礎となる、高次のせん断変形を考慮した平面はり柱について、その基礎式を示す(図2参照)。

○変位場

$\epsilon_x = 0$ という断面内無ひずみの仮定を用い、又、材軸方向変位を断面方向と材軸方向とに変数分離し、断面方向については、はり柱の上下面を含めて設けたいくつかのサンプリング点での値を用いて多項式表示すると、この平面はり柱部材の任意点の z および x 軸方向変位: (W, U) は、それぞれ、次式のように表される。

$$\begin{aligned} W(z, x) &= w_0(z) - x \cdot \theta(z) + \sum_{i=1}^{N_s} {}^{\circ} H_i(x) \cdot \hat{w}_i(z) \\ U(z, x) &= u(z) \end{aligned} \quad (1.a, b)$$

図2 高次のせん断変形を考慮した平面はり柱

ここに、

$w_0(z)$: はり柱断面の平均的材軸方向変位
 $\theta(z)$: 反時計回りを正とする断面の平均的回転
 $u(z)$: はり柱の横方向変位

又、

$H_i(x)$: 材軸方向変位の断面方向の分布性状を規定する

Lagrange 多項式を用いた形状関数

$\hat{w}_i(z)$: 断面のゆがみによって生じる $x = x_i$ のサンプリング点における材軸方向相対変位

であり、 N_s は材軸方向変位を規定するサンプリング点の総数を、又、 $\sum_{i=1}^{N_s} {}^{\circ}$ は、はり柱断面の平均的材軸方向変位および平均的回転を定める点^{注1)}を除いた、すべてのサンプリング点についての総和を表す。

○ひずみと一般化ひずみ

(1.a, b)式より、 z および x に関する微分を、それぞれ、 $(\cdot)'$ および $(\cdot)^*$ と表すことにすると、ひずみ場は、次式となる。

$$\begin{aligned} \epsilon_z(z, x) &= \epsilon_0(z) + x \cdot \kappa(z) + \sum_{i=1}^{N_s} {}^{\circ} H_i(x) \cdot \kappa_i(z) \\ \gamma_{zx}(z, x) &= \gamma_0(z) + \sum_{i=1}^{N_s} {}^{\circ} H_i(x) \cdot \gamma_i(z) \end{aligned} \quad (2.a, b)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \epsilon_0(z) &= w_0' : \text{軸ひずみ}, \quad \kappa(z) = -\theta' : \text{曲率} \\ \gamma_0(z) &= u' - \theta : \text{断面の平均的せん断ひずみ} \\ \kappa_i(z) &= \hat{w}_i', \quad \gamma_i(z) = \hat{w}_i : \text{高次の一般化ひずみ} \\ (i &= 1 - N_s, \neq s_1, s_2) \end{aligned} \quad (3.a-c)$$

であり、 s_1, s_2 は、平均的材軸方向変位および平均的回転を規定するサンプリング点番号である^{注1)}。

○応力と合応力

材軸方向直応力を σ_z 、又、せん断応力を τ_{zx} とすると、(3.a-c)式の一般化ひずみとエネルギー的に対応する合応力と (σ_z, τ_{zx}) との間の関係は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} N &= \iint_A \sigma_z \cdot dA : \text{軸力} \\ M_0 &= \iint_A \sigma_z \cdot x \cdot dA : \text{曲げモーメント} \\ Q_0 &= \iint_A \tau_{zx} \cdot dA : \text{合せん断力} \\ M_i &= \iint_A \sigma_z \cdot H_i \cdot dA, \quad Q_i = \iint_A \tau_{zx} \cdot H_i^* \cdot dA : \text{高次の合応力} \\ (i &= 1 - N_s, \neq s_1, s_2) \end{aligned} \quad (4.a-e)$$

ここに、

A : はり柱の断面積

○一般化ひずみ-合応力関係式

σ_z, τ_{zx} 以外の応力成分はすべて0であるとし、又、材のひずみ-応力関係を、

$$\begin{bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_z \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (5)$$

と書くことにすると、(2.a, b)式、(4.a-e)式および(5)式より、一般化ひずみ-合応力関係は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} N &= D_{00}^{(1,1)} \cdot \epsilon_0 + D_{01}^{(1,1)} \cdot \kappa_0 + D_{00}^{(1,2)} \cdot \gamma_0 + \sum_{j=1}^{N_s} {}^{\circ} (D_{0(j)}^{(1,1)} \cdot \kappa_j + D_{0<j>}^{(1,2)} \cdot \gamma_j) \\ M_0 &= D_{10}^{(1,1)} \cdot \epsilon_0 + D_{11}^{(1,1)} \cdot \kappa_0 + D_{10}^{(1,2)} \cdot \gamma_0 + \sum_{j=1}^{N_s} {}^{\circ} (D_{1(j)}^{(1,1)} \cdot \kappa_j + D_{1<j>}^{(1,2)} \cdot \gamma_j) \\ Q_0 &= D_{00}^{(2,1)} \cdot \epsilon_0 + D_{01}^{(2,1)} \cdot \kappa_0 + D_{00}^{(2,2)} \cdot \gamma_0 + \sum_{j=1}^{N_s} {}^{\circ} (D_{0(j)}^{(2,1)} \cdot \kappa_j + D_{0<j>}^{(2,2)} \cdot \gamma_j) \end{aligned} \quad (6.a-c)$$

$$M_i = D_{(i)0}^{(1,1)} \cdot \varepsilon_0 + D_{(i)1}^{(1,1)} \cdot \kappa_0 + D_{(i)0}^{(1,2)} \cdot \gamma_0 + \sum_{j=1}^{N_S} \otimes \left(D_{(i)(j)}^{(1,1)} \cdot \kappa_j + D_{(i)(j)}^{(1,2)} \cdot \gamma_j \right) \quad (6.d,e)$$

$$Q_i = D_{(i)0}^{(2,1)} \cdot \varepsilon_0 + D_{(i)1}^{(2,1)} \cdot \kappa_0 + D_{(i)0}^{(2,2)} \cdot \gamma_0 + \sum_{j=1}^{N_S} \otimes \left(D_{(i)(j)}^{(2,1)} \cdot \kappa_j + D_{(i)(j)}^{(2,2)} \cdot \gamma_j \right)$$

ここに,

$$D_{ij}^{(\alpha,\beta)} = D_{ji}^{(\alpha,\beta)} = D_{ij}^{(\beta,\alpha)} = \iint_A d_{\alpha\beta} \cdot x^{i+j} \cdot dA \quad (7.a)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2 \quad i, j = 0, 1)$$

$$D_{(i)(j)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(j)(i)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(i)(j)}^{(\beta,\alpha)} = \iint_A d_{\alpha\beta} \cdot x^i \cdot H_j \cdot dA$$

$$D_{(i)(j)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(j)(i)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(i)(j)}^{(\beta,\alpha)} = \iint_A d_{\alpha\beta} \cdot x^j \cdot H_i^* \cdot dA \quad (7.b,c)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2 \quad i = 0, 1 \quad j = 1 - N_S)$$

$$D_{(i)(j)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(j)(i)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(i)(j)}^{(\beta,\alpha)} = \iint_A d_{\alpha\beta} \cdot H_i \cdot H_j \cdot dA$$

$$D_{(i)(j)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(j)(i)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(i)(j)}^{(\beta,\alpha)} = \iint_A d_{\alpha\beta} \cdot H_i \cdot H_j^* \cdot dA \quad (7.d-f)$$

$$D_{(i)(j)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(j)(i)}^{(\alpha,\beta)} = D_{(i)(j)}^{(\beta,\alpha)} = \iint_A d_{\alpha\beta} \cdot H_i^* \cdot H_j^* \cdot dA$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2 \quad i, j = 1 - N_S)$$

今, (6.a-e)式の関係をも, マトリックス表示で,

$$\{\sigma_R\} = [D] \cdot \{\varepsilon_G\} \quad (8.a)$$

と書くことにすると, 一般化ひずみは, 合応力を用いて, 次式のように表される。

$$\{\varepsilon_G\} = [C] \cdot \{\sigma_R\} \quad (8.b)$$

ここに,

$$[C] = [D]^{-1} \quad (9)$$

又,

$\{\varepsilon_G\}$: (3.a-e)式で定義される一般化ひずみベクトル

$\{\sigma_R\}$: (4.a-e)式で定義される合応力ベクトル

○平衡条件式

2次元応力状態における要素内部の平衡方程式と, はり柱上下面における平衡条件式は, それぞれ, 次式で与えられる。

・平衡方程式

$$(\sigma_z \cdot b)' + (\tau_{zx} \cdot b)' + (\bar{p}_z \cdot b) = 0 \quad (10.a,b)$$

$$(\tau_{zx} \cdot b)' + (\sigma_x \cdot b)' + (\bar{p}_x \cdot b) = 0$$

・はり柱上下面における平衡条件式

$$T_z^{(T)}(z) = \tau_{zx}|_{x=x_T} \cdot b_T, \quad T_x^{(T)}(z) = \sigma_x|_{x=x_T} \cdot b_T \quad (\text{上面}) \quad (11.a,b)$$

$$T_z^{(B)}(z) = \tau_{zx}|_{x=x_B} \cdot b_B, \quad T_x^{(B)}(z) = \sigma_x|_{x=x_B} \cdot b_B \quad (\text{下面}) \quad (12.a,b)$$

ここに,

σ_x : 横方向直応力

b : はり柱の幅

b_T, b_B : はり柱上下面における幅

x_T, x_B : はり柱上下面の x 座標

$\bar{p}_z, \bar{p}_x$: 単位体積当りの z および x 方向物体力

$(T_z^{(T)}, T_x^{(T)}), (T_z^{(B)}, T_x^{(B)})$: はり柱上下面に働く単位長さ当りの

z および x 方向内力

(10.a,b)式および(11.a)式の左右両辺に x および H_i を乗じたものを, はり柱断面について積分し, (11.a,b)式, (12.a,b)式および(4.a-e)式を用いて変形, 整理すると, 高次のせん断変形を考慮したはり柱における断面全体としての平衡方程式は, それぞれ, 次式となる。

$$N' + \bar{p}_{z,0} + (T_z^{(T)} - T_z^{(B)}) = 0$$

$$M'_0 - Q_0 + \bar{p}_{z,1} + (T_z^{(T)} \cdot x_T - T_z^{(B)} \cdot x_B) = 0$$

$$Q'_0 + \bar{p}_{x,0} + (T_x^{(T)} - T_x^{(B)}) = 0 \quad (13.a-d)$$

$$M'_i - Q_i + \bar{p}_{z,(i)} + (T_z^{(T)} \cdot H_i(x_T) - T_z^{(B)} \cdot H_i(x_B)) = 0$$

$$(i = 1 - N_S, \neq s_1, s_2)$$

ここに,

$$\bar{p}_{z,i}(z) = \iint_A \bar{p}_z \cdot x^i \cdot dA, \quad \bar{p}_{z,(i)}(z) = \iint_A \bar{p}_z \cdot H_i \cdot dA \quad (14.a-c)$$

$$\bar{p}_{x,0}(z) = \iint_A \bar{p}_x \cdot dA$$

尚, 本研究で提示する2次元要素では, この(13.a-d)式で与えられるはり柱断面全体についての合応力レベルの条件に加え, (10.a,b)式, (11.a,b)式および(12.a,b)式で表される応力レベルの条件をも応力場に課せられる平衡条件として採用する。

3. 2次元応力場の設定について^{注2)}

本節以降の3節では, 前節に示した高次のせん断変形を考慮したはり柱を基礎に, 材軸方向直成分やせん断成分だけでなく, 横方向の直成分をも正当に評価した, ハイブリッド型応力法2次元要素の誘導を行う。本節では, まず, 前節に示した高次のせん断変形を考慮したはり柱理論を基礎にした2次元応力場の設定法について示す。

さて, (2.a,b)式の一般化ひずみ-ひずみ関係式, (5)式のひずみ-応力関係式および(8.b)式の合応力-一般化ひずみ関係式を用いれば, 材軸方向直応力: σ_z は, 合応力表示される。

一方, (10.a)式および(12.a)式より, せん断応力: τ_{zx} は, 材軸方向直応力: σ_z を用いて, 次式のように表される。

$$\tau_{zx} \cdot b = - \left(\int_{x_B}^x (\sigma_z \cdot b)' \cdot dx \right) - \left(\int_{x_B}^x (\bar{p}_z \cdot b) \cdot dx \right) - T_z^{(B)} \quad (15)$$

同様に, (10.b)式, (12.b)式および(15)式より, 横方向直応力: σ_x は, 次式のように表される。

$$\sigma_x \cdot b = - \left(\int_{x_B}^x (\tau_{zx} \cdot b)' \cdot dx \right) - \left(\int_{x_B}^x (\bar{p}_x \cdot b) \cdot dx \right) - T_x^{(B)} \quad (16.a)$$

$$= \left(\int_{x_B}^x \left(\int_{x_B}^x (\sigma_z \cdot b)'' \cdot dx \right) \cdot dx \right) + \left(\int_{x_B}^x \left(\int_{x_B}^x (\bar{p}_z \cdot b)' \cdot dx \right) \cdot dx + T_z^{(B)'} \cdot (x - x_B) \right) - \left(\int_{x_B}^x (\bar{p}_x \cdot b) \cdot dx \right) - T_x^{(B)} \quad (16.b)$$

尚, 合応力が, (13.a-d)式のはり柱断面全体としての合応力レベルの平衡方程式を満足するものであれば, (15)式および(16.a,b)式で表される τ_{zx} , σ_x が, (11.a,b)式のはり柱上面における平衡条件を満足することも, 容易に知れる。

4. 基礎変分原理

図1に示すような, 要素境界[1]-[4]を有する代表的(m)要素を考える。2次元平面応力(あるいは平面ひずみ)問題におけるハイブリッド型停留コンプリメンタリーエネルギーの原理の汎関数: Π_{HC}^m は, 次式のように表される。

$$\Pi_{HC}^m = \iiint_V (-B(\sigma_z, \sigma_x, \tau_{zx})) \cdot dV + \iint_{\partial_b} (\sigma_z|_{[2]} \cdot W|_{[2]} + \tau_{zx}|_{[2]} \cdot U|_{[2]}) \cdot dA$$

$$- \iint_{\partial_b} (\sigma_z|_{[1]} \cdot W|_{[1]} + \tau_{zx}|_{[1]} \cdot U|_{[1]}) \cdot dA + \iint_{\partial_T} (\tau_{zx}|_{[4]} \cdot W|_{[4]} + \sigma_x|_{[4]} \cdot U|_{[4]}) \cdot dA$$

$$- \iint_{\partial_B} (\tau_{zx}|_{[3]} \cdot W|_{[3]} + \sigma_x|_{[3]} \cdot U|_{[3]}) \cdot dA \quad (17)$$

ここに,

$$B = \int_{path} (\varepsilon_z \cdot d\sigma_z + \varepsilon_x \cdot d\sigma_x + \gamma_{zx} \cdot d\tau_{zx}) \quad (18)$$

: 単位体積当たりのコンプリメンタリーエネルギー

又,

W, U : z および x 方向変位, V : 要素の体積,

A_S : z 軸に垂直な要素断面, A_T, A_B : 要素の上下面

であり, $(\quad)_{[\alpha]}$ ($[\alpha]=[1]-[4]$) は, 左右および上下の4つの要素境界上における値の意である。

(17)式における独立関数は, 各要素で独立に与えられる $\sigma_z, \sigma_x, \tau_{zx}$ と, 該当の境界を共有する隣接要素について共通に定義される $W_{[\alpha]}$, $U_{[\alpha]}$ ($[\alpha]=[1]-[4]$) であり, 又, 付帯条件は, (10.a,b)式-(12.a,b)式で与えられる要素内部の平衡条件である。

5. 変位場, 合応力場の離散化

次に, 変位場, 合応力場の離散化の方法について示す。

5.1 要素境界上変位場

本研究で提示する2次元要素では, 要素境界上変位場は, 図1に示す[1]-[4]の全ての要素境界について, 通常の変位型有限要素法と同様, 各要素境界上に, 境界両端を含め $N_{D[\alpha]}$ 個の節点を導入し, z および x 軸方向変位共, 各節点上に導入した変位パラメータと Lagrange 多項式を用いた, 次式のような場とする。

○要素境界[1], [2]

$$W = \sum_{i=1}^{N_{D[1]}} H_i(x) \cdot w_i, \quad U = \sum_{i=1}^{N_{D[1]}} H_i(x) \cdot u_i \quad (19.a,b)$$

○要素境界[3], [4]

$$W = \sum_{i=1}^{N_{D[1]}} H_i(z) \cdot w_i, \quad U = \sum_{i=1}^{N_{D[1]}} H_i(z) \cdot u_i \quad (19.c,d)$$

ここに,

w_i, u_i : 該当の境界を共有する隣接要素について共通に定義される変位パラメータ

$H_i(x), H_i(z)$: ($N_{D[\alpha]}-1$) 次の Lagrange 多項式を用いた形状関数であり, $N_{D[\alpha]}$ は, 各要素境界上に想定した節点数である^(注3), 4)。

尚, 4隅の節点については, 停留条件である要素境界上の平衡条件の取り扱いを, より厳正に行うため, 各要素境界ごとに, 同じ節点上に, 別個の変位パラメータを導入する。

5.2 要素内合応力場

一方, 要素内合応力場については多項式展開を用いる。

今, 要素上下面に働く内力を, 多項式展開を用いて,

$$\begin{aligned} T_z^{(T)} &= a_{z,0}^{(T)} + a_{z,1}^{(T)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right) + \cdots + a_{z,j}^{(T)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^j + \cdots + a_{z,N_{BR}-1}^{(T)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_{BR}-1} \\ T_x^{(T)} &= a_{x,0}^{(T)} + a_{x,1}^{(T)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right) + \cdots + a_{x,j}^{(T)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^j + \cdots + a_{x,N_{BR}-1}^{(T)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_{BR}-1} \\ T_z^{(B)} &= a_{z,0}^{(B)} + a_{z,1}^{(B)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right) + \cdots + a_{z,j}^{(B)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^j + \cdots + a_{z,N_{BR}-1}^{(B)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_{BR}-1} \\ T_x^{(B)} &= a_{x,0}^{(B)} + a_{x,1}^{(B)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right) + \cdots + a_{x,j}^{(B)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^j + \cdots + a_{x,N_{BR}-1}^{(B)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_{BR}-1} \end{aligned} \quad (20.a-d)$$

のように設定すると, 付帯条件である(13.a-d)式で与えられる合応力レベルでの平衡方程式より, 要素内合応力場は, それぞれ, 次式のように表される。

$$\begin{aligned} N &= n - (a_{z,0}^{(T)} - a_{z,0}^{(B)}) \cdot l \cdot \left(\frac{z}{l}\right) - (a_{z,1}^{(T)} - a_{z,1}^{(B)}) \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^2 - \cdots \\ &\quad - (a_{z,j}^{(T)} - a_{z,j}^{(B)}) \cdot \frac{l}{j+1} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{j+1} - \cdots - (a_{z,N_{BR}-1}^{(T)} - a_{z,N_{BR}-1}^{(B)}) \cdot \frac{l}{N_{BR}} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_{BR}} \\ &\quad - \int_{-l}^z \bar{p}_{z,0} \cdot dz \\ M_0 &= m_{0,0} + m_{0,1} \cdot \left(\frac{z}{l}\right) - (x_T \cdot a_{z,0}^{(T)} - x_B \cdot a_{z,0}^{(B)}) \cdot l \cdot \left(\frac{z}{l}\right) \\ &\quad - (x_T \cdot a_{z,1}^{(T)} - x_B \cdot a_{z,1}^{(B)}) \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^2 - \cdots \\ &\quad - (x_T \cdot a_{z,j}^{(T)} - x_B \cdot a_{z,j}^{(B)}) \cdot \frac{l}{j+1} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{j+1} - \cdots \\ &\quad - (x_T \cdot a_{z,N_{BR}-1}^{(T)} - x_B \cdot a_{z,N_{BR}-1}^{(B)}) \cdot \frac{l}{N_{BR}} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_{BR}} - \int_{-l}^z \bar{p}_{z,1} \cdot dz \\ &\quad - (a_{x,0}^{(T)} - a_{x,0}^{(B)}) \cdot \frac{l^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^2 - (a_{x,1}^{(T)} - a_{x,1}^{(B)}) \cdot \frac{l^2}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^3 - \cdots \\ &\quad - (a_{x,j}^{(T)} - a_{x,j}^{(B)}) \cdot \frac{l^2}{(j+1) \cdot (j+2)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{j+2} - \cdots \\ &\quad - (a_{x,N_{BR}-1}^{(T)} - a_{x,N_{BR}-1}^{(B)}) \cdot \frac{l^2}{N_{BR} \cdot (N_{BR}+1)} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_{BR}+1} \\ &\quad - \int_{-l}^z \left(\int_{-l}^z \bar{p}_{x,0} \cdot dz \right) \cdot dz \end{aligned} \quad (21.a-c)$$

又,

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{l} \cdot m_{0,1} - (a_{x,0}^{(T)} - a_{x,0}^{(B)}) \cdot l \cdot \left(\frac{z}{l}\right) - (a_{x,1}^{(T)} - a_{x,1}^{(B)}) \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^2 - \cdots \\ &\quad - (a_{x,j}^{(T)} - a_{x,j}^{(B)}) \cdot \frac{l}{j+1} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{j+1} - \cdots - (a_{x,N_{BR}-1}^{(T)} - a_{x,N_{BR}-1}^{(B)}) \cdot \frac{l}{N_{BR}} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_{BR}} \\ &\quad - \int_{-l}^z \bar{p}_{x,0} \cdot dz \\ M_i &= m_{i,0} + m_{i,1} \cdot \left(\frac{z}{l}\right) + \cdots + m_{i,j} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^j + \cdots + m_{i,N_R-1} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_R-1} \\ &\quad - (H_i(x_T) \cdot a_{z,0}^{(T)} - H_i(x_B) \cdot a_{z,0}^{(B)}) \cdot l \cdot \left(\frac{z}{l}\right) - \cdots \\ &\quad - (H_i(x_T) \cdot a_{z,j}^{(T)} - H_i(x_B) \cdot a_{z,j}^{(B)}) \cdot \frac{l}{j+1} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{j+1} - \cdots \\ &\quad - (H_i(x_T) \cdot a_{z,N_{BR}-1}^{(T)} - H_i(x_B) \cdot a_{z,N_{BR}-1}^{(B)}) \cdot \frac{l}{N_{BR}} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_{BR}} \\ &\quad - \int_{-l}^z \bar{p}_{z(i)} \cdot dz \\ Q_i &= m_{i,1} \cdot \frac{1}{l} + m_{i,2} \cdot \frac{2}{l} \cdot \left(\frac{z}{l}\right) + \cdots + m_{i,j} \cdot \frac{j}{l} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{j-1} + \cdots \\ &\quad + m_{i,N_R-1} \cdot \frac{N_R-1}{l} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^{N_R-2} \\ &\quad (i=1-N_S, \neq s_1, s_2) \end{aligned} \quad (21.d,e)$$

ここに,

$$\begin{aligned} &a_{z,j}^{(T)}, a_{x,j}^{(T)}, a_{z,j}^{(B)}, a_{x,j}^{(B)}, n, (m_{0,0}, m_{0,1}), m_{i,j} \\ &(i=1-N_S, \neq s_1, s_2 \quad j=0-(N_R-1)) \\ &: \text{各要素で独立に与えられる合応力パラメータ} \end{aligned}$$

であり, N_{BR} および N_R は, それぞれ, 要素上下面における内力場および高次の合応力場に関する多項式展開の項数である^(注3)。尚, ここでは, 記述の簡略化を計るため, N_{BR} および N_R は, それぞれ, すべての上下面における内力, 合応力について同じ値としている。

(20.a-d)式および(21.a-e)式で与えられる合応力場に, 3節に示した応力場の設定法を適用すれば, 要素内部の平衡条件式を厳密に満足する応力場が設定される。

以後の展開は, 文献6), 7)等に示されているハイブリッド型応力法に関する標準的展開手法に従えばよく, 設定された変位場, 応力場を

(17)式の汎関数に代入，その第一変分を取り，応力パラメータは各要素で独立に与えられることを考慮して，縮約により，応力パラメータを消去すれば，変位パラメータのみを最終的な未知量とする要素剛性方程式が得られる。

6. 数値解析例

本節では，前節までに誘導したハイブリッド型応力法2次元要素モデルの精度，有効性等を検証するため，いくつかの数値実験を行った結果について報告する。尚，本節に示す数値解析では，要素境界上の節点数： $N_{D[\alpha]}$ は，上下左右の4つの要素境界全てについて同じ値とし， N_{BR} ， N_R 等については，脚注3)に従って設定している。

6.1 正弦波荷重を受ける単純ばりの曲げ解析

本節に示す最初の数値解析例題は，図3に示すような，正弦波荷重を受ける1端ピン，他端ローラー支持されたはりである。この解析対象は，変形状が比較的単純な場合についての，本2次元要素モデルの精度，収束性を検証するために選んだものであり，正弦波荷重は，はり上面に載荷されているものとしている。

図3 正弦波荷重を受ける単純ばり

図4 解析で用いた要素分割

解析は，対称性を利用してはり1/2について行い，要素分割として，図4に示すように，材軸方向，深さ方向共に等要素分割とした3種類のMesh Patternを用い，各Mesh Patternについて， $N_{D[\alpha]}$ の値を3，5，7と変化させている。図中， N_{ele} は要素分割数，又， N_{dof} は構造全体としての全自由度数である。又，正弦波荷重は，要素両端を含めて等間隔に $N_{D[\alpha]}$ 個設けた選点の値により， $(N_{D[\alpha]} - 1)$ 次の多項式に近似している。

表1は，いくつかの代表的ポイントにおける応力および変位の収束状況を示したものであり，表中の厳密解は，文献10)に与えられてい

る応力関数を用いた2次元応力解析解である。これ等の結果より，本2次元要素モデルは，非常に良好な精度，収束性を有しており，ここに示した解析対象について言えば， $N_{D[\alpha]}$ の値を5-7程度に設定すれば，1部材1要素程度の分割で，精度，信頼性の非常に高い解が得られることが分かる。

表1 収束性試験結果

Mesh Pattern	$\sigma_z \cdot (BH^2/\bar{p}_0 L^2)$ $z = L/2, x = H/2$	$\tau_{zx} \cdot (BH/\bar{p}_0 L)$ $z = 0, x = 0$	$\sigma_x \cdot (BH^2/\bar{p}_0 L^2)$ $(\times 10^2)$ $z = L/2, x = 0$	$-u \cdot (EBH^3/\bar{p}_0 L^4)$ $(\times 10)$ $z = L/2, x = H/2$
(1)	0.60360(-1.05) 0.61000(0.00) 0.60998(0.00)	0.47855(0.31) 0.47707(0.00) 0.47707(0.00)	0.49989(-0.02) 0.49999(0.00) 0.49999(0.00)	0.12729(1.30) 0.12564(-0.02) 0.12566(0.00)
(2)	0.60936(-0.10) 0.60998(0.00) 0.60998(0.00)	0.48112(0.85) 0.47708(0.00) 0.47707(0.00)	0.49991(-0.02) 0.49999(0.00) 0.49999(0.00)	0.12577(0.09) 0.12566(0.00) 0.12566(0.00)
(3)	0.60974(-0.04) 0.60998(0.00) 0.60998(0.00)	0.47785(0.16) 0.47707(0.00) 0.47707(0.00)	0.49998(0.00) 0.49999(0.00) 0.49999(0.00)	0.12566(0.00) 0.12566(0.00) 0.12566(0.00)
Exact	0.60998	0.47707	0.49999	0.12566 ^{註5)}

Values in the Parentheses : Error(%) to Exact Solution

1st Row : $N_{D[\alpha]} = 3$, 2nd : $N_{D[\alpha]} = 5$, 3rd : $N_{D[\alpha]} = 7$

6.2 逆対称部分荷重を受ける単純ばりの解析

本報に示す2番目の解析例題は，図5に示すような，同じく文献10)で取り扱われている，はり中央について逆対称な等分布部分荷重を受ける1端ピン，他端ローラー支持されたはりであり，2つの等分布部分荷重は，それぞれ，はり上面および下面に載荷される。図中， α は等分布荷重を受ける領域の長さを，又， β は荷重の中心間距離であり，はりせいHに対する β の比： β/H が小さい場合，このはりは，はり中央部付近で非常に複雑な変形挙動を示すこと，従って，又，その解析には，非常に困難を伴うことが知られている。この解析対象は，こうした問題に対する本要素モデルの適応性を検証するために選定したものであり，ここでは， β/H の値を1/10，1/5，1/3，1/2，1と変化させた場合を取り扱っている。

図5 逆対称部分荷重を受ける単純ばり

表2は， $\beta/H = 1/5$ の場合について行った収束性試験結果を，比較・対照のため，4節点変位型2次元要素解^{註6)}と共に示したものであり(表中， $\bar{p} = \bar{p}\alpha$)，解析に用いた要素分割は，それぞれ，図6(a)および図6(b)に示している。又，表中の厳密解は，文献10)に示されている手法に従い，著者等が求めた解である。これ等の結果より，本

○Mesh Pattern (1)

$$N_{ele} = 15, N_{def} = 349 \quad (N_{D[\alpha]} = 5) \\ = 489 \quad (N_{D[\alpha]} = 7) \\ = 629 \quad (N_{D[\alpha]} = 9)$$

○Mesh Pattern (2)

$$N_{ele} = 49, N_{def} = 1049 \quad (N_{D[\alpha]} = 5) \\ = 1469 \quad (N_{D[\alpha]} = 7) \\ = 1889 \quad (N_{D[\alpha]} = 9)$$

○Mesh Pattern (3)

$$N_{ele} = 81, N_{def} = 1709 \quad (N_{D[\alpha]} = 5) \\ = 2393 \quad (N_{D[\alpha]} = 7) \\ = 3077 \quad (N_{D[\alpha]} = 9)$$

○Mesh Pattern (4)

$$N_{ele} = 121, N_{def} = 2529 \quad (N_{D[\alpha]} = 5) \\ = 3541 \quad (N_{D[\alpha]} = 7) \\ = 4553 \quad (N_{D[\alpha]} = 9)$$

(a) ハイブリッド型応力法 2 次元要素で用いた要素分割

○Mesh Pattern (i)

$$N_{ele} = 928 \\ N_{def} = 1927$$

○Mesh Pattern (ii)

$$N_{ele} = 3776 \\ N_{def} = 7695$$

○Mesh Pattern (iii)

$$N_{ele} = 15232 \\ N_{def} = 30751$$

(b) 4 節点変位型 2 次元要素で用いた要素分割

図 6 解析で用いた要素分割

表 2 収束性試験結果 ($\beta/H=1/5$)

Mesh Pattern	$\sigma_z \cdot (BH/\bar{P})$		$-\tau_{xz} \cdot (BH/\bar{P})$		$-\sigma_x \cdot (BH/\bar{P})$		$w \cdot (EBH^3/\bar{P}L^3)$		$-u \cdot (EBH^3/\bar{P}L^3)$	
	$z=0, x=0$	$z=0, x=0$	$z=0, x=3H/8$	$z=0, x=H/2$	$z=0, x=0$	$z=0, x=3H/8$	$z=0, x=H/2$	$z=\beta/2, x=H/2$	$z=\beta/2, x=H/2$	$z=\beta/2, x=H/2$
Present										
(1)	0.39680 (-0.07)	0.51848 (-0.12)	1.57928 (3.38)	0.00000 (0.00)	1.64177 (-0.48)	2.10629 (1.18)	0.07259 (3.38)	0.24222 (0.23)		
	0.39681 (-0.06)	0.51872 (-0.07)	1.51512 (-0.82)	0.00000 (0.00)	1.64882 (-0.05)	2.07562 (-0.30)	0.06945 (-1.10)	0.24175 (0.04)		
	0.39711 (0.01)	0.51917 (0.02)	1.52689 (-0.04)	0.00000 (0.00)	1.64957 (0.00)	2.08216 (0.02)	0.07064 (0.59)	0.24170 (0.02)		
(2)	0.39706 (0.00)	0.51911 (0.00)	1.55970 (2.10)	0.00000 (0.00)	1.64961 (0.00)	2.07983 (-0.10)	0.07079 (0.82)	0.24166 (0.00)		
	0.39706 (0.00)	0.51909 (0.00)	1.51660 (-0.72)	0.00000 (0.00)	1.64961 (0.00)	2.08318 (0.07)	0.07001 (-0.30)	0.24168 (0.01)		
	0.39706 (0.00)	0.51909 (0.00)	1.53327 (0.37)	0.00000 (0.00)	1.64961 (0.00)	2.08095 (-0.04)	0.07032 (0.15)	0.24167 (0.00)		
(3)	0.39706 (0.00)	0.51896 (-0.02)	1.52798 (0.03)	0.00000 (0.00)	1.64962 (0.00)	2.08242 (0.03)	0.07019 (-0.04)	0.24165 (-0.01)		
	0.39706 (0.00)	0.51909 (0.00)	1.52756 (0.00)	0.00000 (0.00)	1.64961 (0.00)	2.08181 (0.00)	0.07022 (0.00)	0.24169 (0.01)		
	0.39706 (0.00)	0.51909 (0.00)	1.52757 (0.00)	0.00000 (0.00)	1.64961 (0.00)	2.08182 (0.00)	0.07022 (0.00)	0.24166 (0.00)		
(4)	0.39706 (0.00)	0.51897 (-0.02)	1.52758 (0.00)	0.00000 (0.00)	1.64961 (0.00)	2.08230 (0.02)	0.07022 (0.00)	0.24154 (-0.05)		
	0.39706 (0.00)	0.51909 (0.00)	1.52757 (0.00)	0.00000 (0.00)	1.64961 (0.00)	2.08182 (0.00)	0.07022 (0.00)	0.24170 (0.02)		
	0.39706 (0.00)	0.51909 (0.00)	1.52757 (0.00)	0.00000 (0.00)	1.64961 (0.00)	2.08182 (0.00)	0.07022 (0.00)	0.24166 (0.00)		
4-Nodes Assumed Displacement Finite Element										
(i)	0.39253 (-1.14)	0.51232 (-1.30)	1.50870 (-1.24)	0.16626 (—)	1.65060 (0.06)	2.09970 (0.86)	0.06999 (-0.33)	0.24073 (-0.39)		
(ii)	0.39602 (-0.26)	0.51736 (-0.33)	1.52970 (0.14)	0.04595 (—)	1.65010 (0.03)	2.09390 (0.58)	0.07017 (-0.08)	0.24148 (-0.08)		
(iii)	0.39681 (-0.06)	0.51865 (-0.08)	1.53150 (0.26)	0.01264 (—)	1.64980 (0.01)	2.08870 (0.33)	0.07021 (-0.02)	0.24162 (-0.02)		
Exact										
	0.39706	0.51909	1.52757	0.00000	1.64961	2.08182	0.07022 (注3)	0.24166 (注5)		

Values in the Parenthes : Error(%) to Exact Solution

1st Row in the Present Solution : $N_{D[\alpha]} = 5$, 2nd : $N_{D[\alpha]} = 7$, 3rd : $N_{D[\alpha]} = 9$

2次元要素モデルは、通常の4節点変位型要素モデルに比べ、はるかに少ない要素数、自由度で、良好な精度、収束性を示すこと、又、このほりは、前述のように、 β/H の値が小さい場合、はり断面の上下面近傍で、応力が急激に変化するため、前項に示した正弦波荷重を受けるはりに比べ、若干の精度、収束性の低下が見られるが、 $N_{D[\alpha]}$ の値を5程度以上に設定すれば、Mesh Pattern (3)程度の粗い要素分割で、実用上、ほとんど問題のない解が得られることが分かる。

図7には、 $N_{D[\alpha]}$ を5とし、要素分割としてMesh Pattern (2)およびMesh Pattern (4)を採用した場合の、はり中央における各応力分布の収

束状況を示している。この結果より、本研究で提示している要素は、ひずみや応力の分布性状が極めて複雑なものとなるような問題に対しても、非常に少ない要素分割数、自由度で、その挙動を的確に評価しうることが分かる。

図8、図9および図10は、 β/H の値をパラメトリックに変化させたときの、はり中央における材軸方向直応力、せん断応力および横方向直応力の分布を示したものであり、要素分割数、節点数に関しては、先に示した収束性試験結果を参考に、Mesh Pattern (3)、 $N_{D[\alpha]} = 5$ としている。

図 7 はり中央における応力分布の収束状況 ($\beta/H=1/5$, $N_{D[0]}=5$)

これ等の結果より、1) β/H の値の相違により、はり中央部の応力の分布形状は大きく異なったものとなること、2) 材軸方向直応力は、 $\beta/H=1$ の場合は、はり上下面において引張応力、中央部において圧縮応力が生じているが、 β/H の値が小さくなるにつれて、上下面近傍において圧縮応力が急激に立ち上がっていき、それとは逆に中央部においては、引張領域が広がっていくこと、3) せん断応力は、 $\beta/H=1$ のときは、通常の放物線分布に似た分布形状を示すが、 β/H が小さくなるにつれて、はりの上下面近傍において大きい値を示すようになり、中央部では逆に小さくなっていくこと、4) 横方向直応力に関しては、せん断応力の場合と同様に、 β/H が小さくなるにつれて、はりの上下面近傍で応力が立ち上がってくる傾向が見られるが、分布形状の変化は、材軸方向直応力やせん断応力に比べると緩やかであるこ

と、等のことが分かる。尚、参考のために記せば、該当のはり中央における断面全体としての軸力および曲げモーメントは、いずれのケースについても 0 となっている。

7. 結 び

本報告では、文献 5) 等) に示されたハイブリッド型応力法高次平面はり柱要素を基礎とした高精度な 2 次元要素を提示した。又、いくつかの数値実験を行い、その精度、収束性や有効性等を明らかにした。

得られた結論は、以下のように要約される。

1) はり柱断面各点の平衡条件を用いてせん断応力を直応力表示するという文献 2)-4) 等) に示した応力場の設定法は、材軸方向直応力の評価に、断面のゆがみを考慮したはり柱理論を適用すれば、横方向直応力算定の際にも有効に機能するため、2 軸効果を正當に評価した、2

図 8 はり中央における材軸方向直応力分布

図 9 はり中央におけるせん断応力分布

図 10 はり中央における横方向直応力分布

次元問題としての完全な平衡応力場を構築することが出来る。

2) 又, こうした場の設定法は, 要素の上下面で他の要素と連結された場合にも有効に機能し, ひずみや応力の分布性状が極めて複雑なものとなるような問題に対しても, 的確にその挙動を評価, 追跡しうる。

3) 本研究で提示している 2 次元要素は, 高次のせん断変形を考慮したはり柱要素を拡張, 一般化したものであり, 用いた要素内応力あるいは要素境界上変位等の場合は, 通常の古典的はり柱理論あるいは Timoshenko はり柱理論の場を包含したものとなっているため, 要素の形状が細長いものとなっても, その適用に際して, 何等の問題, 不都合も生じない。従って, 壁部材のように辺長比が 1 に近いものから非常にスレンダーなはりまで, 辺長比の値の如何に拘らず, 統一的に取り扱うことが出来る。

4) 又, 要素境界上変位場を, 標準的な Lagrange 多項式としているため, 要素の左右両端あるいは上下面で, 例えば, はり柱やバネ等の他の構造要素と結合されるような場合についても, 標準的な構造解析手法に従えば, その操作, 処理は, 容易である。

尚, 本報告で提示したハイブリッド型応力法 2 次元要素は, 前述のように, 壁構造あるいは壁要素を有する架構の解析を主要な目的に開発したものであり, はり柱要素やバネ要素等の他の構造要素との連結方法の詳細や解析結果については, 報を改めて報告する予定である。

参考文献

- 1) 近藤一夫, 高谷智彦, 花井正実: 高次のせん断変形を考慮したハイブリッド型応力法はり柱要素モデルに関する研究 (その 1) 平面はり柱要素の一般化, 日本建築学会構造系論文集, 488 号, pp.57-66, 1996.10
- 2) 近藤一夫, 田中勝典, 谷口忠広: せん断応力, せん断変形の影響を考慮したハイブリッド型応力法はり柱要素, 構造工学論文集, Vol. 48B, pp.413-421, 2002
- 3) 近藤一夫: ハイブリッド型応力法 Timoshenko はり柱要素について (その 1) はり柱上下面の内力の影響を考慮した定式化, 日本建築学会構造系論文集, 576 号, pp.87-94, 2004.2
- 4) 近藤一夫: ハイブリッド型応力法 Timoshenko はり柱要素について (その 2) 複合はり柱要素の構築とその応用, 日本建築学会構造系論文集, 581 号, pp.63-70, 2004.7
- 5) 近藤一夫: 2 軸効果を考慮したハイブリッド型応力法高次平面はり柱要素, 日本建築学会構造系論文集, 587 号, pp.101-108, 2005.1
- 6) 近藤一夫: 鋼構造骨組の塑性崩壊解析, コンピュータによる極限解析法シリーズ 6, 培風館, 1991
- 7) 近藤一夫: ハイブリッド型応力法による骨組構造解析法, 日本建築学会編: 構造物の崩壊解析 応用編, pp.17-56, 1999
- 8) 例えば, 富井政英, 山川哲雄: Relations Between the Nodal External Forces and the Nodal Displacements on the Boundary Framed Shear Walls, Part I-V, 日本建築学会論文報告集, 237 号, pp.45-57, 1975.11, 238 号, pp.37-46, 1975.12, 239 号, pp.35-42, 1976.1, 240 号, pp.63-70, 1976.2, 241 号, pp.79-89, 1976.3 および 堀井昌博, 和田章: 耐震壁のモデル化の方法とその比較-構造設計のためのメモランダム 5, 建築技術, No.347, pp.131-136, 1980.7
- 9) 日本建築学会: 壁式構造関係設計規準集・同解説 (壁式鉄筋コンクリート造編), 日本建築学会, 1997
- 10) ティモシェンコ, グーディア: 弾性論, pp.35-65, コロナ社, 1975
- 11) 例えば, Y.C.ファン: 固体の力学/理論, pp.163-171, 培風館, 1970
- 12) 例えば, T. J. R. Hughes and E. Hinton (Eds): Finite Element Methods for Plates and Shell Structures, Vol. 1 Element Technology, Pineridge Press, Swansea, pp.153-174, 266-290 and 316-347, 1986 および D. P. Flanagan and T. Belytschko: A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 18, pp.679-706, 1981.

注

注 1) 3 節に示した高次のせん断変形を考慮したはり柱では, はり柱断面の平均的材軸方向変位: w_0 および反時計回りを正とする平均的回転: θ を, 2 つ

のサンプリング点の材軸方向変位を用いて, 次式のように定義している。

$$w_{s_1}(z) = w_0(z) - x_{s_1} \cdot \theta(z), \quad w_{s_2}(z) = w_0(z) - x_{s_2} \cdot \theta(z) \quad (\text{A1.a,b})$$

上式を逆変換すると,

$$\begin{aligned} w_0(z) &= \frac{x_{s_2}}{x_{s_2} - x_{s_1}} \cdot w_{s_1}(z) - \frac{x_{s_1}}{x_{s_2} - x_{s_1}} \cdot w_{s_2}(z) \\ \theta(z) &= \frac{1}{x_{s_2} - x_{s_1}} \cdot w_{s_1}(z) - \frac{1}{x_{s_2} - x_{s_1}} \cdot w_{s_2}(z) \end{aligned} \quad (\text{A2.a,b})$$

ここに,

$w_{s_1}(z), w_{s_2}(z)$: 2 つのサンプリング点の材軸方向変位

x_{s_1}, x_{s_2} : 2 つのサンプリング点の x 座標

であり, s_1, s_2 は, 平均的材軸方向変位および回転を定める 2 つのサンプリング点の番号である。

尚, 断面のゆがみによって生じる各サンプリング点の材軸方向変位は,

$$\hat{w}_i = w_i - (w_0 - x_i \cdot \theta) \quad (\text{A3})$$

で与えられるから, (A1.a,b) 式を (A3) 式に代入すると, 次式となる。

$$w_{s_1} = 0, \quad w_{s_2} = 0 \quad (\text{A4.a,b})$$

注 2) 本報告で提示している 2 次元要素では, 材軸方向直応力を高次のせん断変形を考慮したはり柱理論を用いて設定し, 一方, せん断応力および横方向直応力に関しては材軸および横方向の平衡条件式を用いて材軸方向直応力により算定するという手法を用いている。こうした手法は, 通常, 半逆解法と呼ばれる¹¹⁾。

注 3) 本報告で提示しているハイブリッド型応力法 2 次元要素では, 応力および変位パラメータの展開項数を, 基本的には, 以下のように設定する。

$$N_{D[1]} = N_{D[2]} = N_s, \quad N_{D[3]} = N_{BR}^{(B)}, \quad N_{D[4]} = N_{BR}^{(T)} \quad (\text{A5.a-c})$$

$$N_R = \text{Max}(N_{BR}^{(B)}, N_{BR}^{(T)}) + 2 \quad (\text{A6})$$

ここに, $N_{BR}^{(B)}$ および $N_{BR}^{(T)}$ は, それぞれ, 要素上面および下面における内力場の展開項数である。又, N_s は, 2 節に示した高次のせん断変形を考慮したはり柱理論における, 材軸方向変位を規定するサンプリング点の数であり, 各サンプリング点は, 左右両辺の節点と同じ位置に設定する。

(A5.a-c)式は, 要素境界上の平衡条件を, 一方, (A6)式は, 適合条件を考慮して設定したものであり, 変位パラメータの項数を (A5.a-c)式のように定めると, 上下の境界面では, z および x 軸方向成分共, 厳密に, 又, 左右の境界面については, z 軸方向成分に関する平衡条件は, 厳密に満足される。

注 4) 本 2 次元要素では, 要素境界上変位場を, z および x 方向共, (19.a-d)式のように設定しているため, 変位パラメータの項数を (A5.a-c)式のように定めると, 左右両端の x 軸方向成分については, それぞれ 1 個の, いわゆる Zero Energy Mode が生じる¹²⁾。実際の解析上は, こうした Zero Energy Mode の存在は, ほとんど問題とはならないと思われるが, 本研究では, これを制御するため, 左右両端の変位パラメータについては, 最も高次の変形モードを対象に, 次式のような人工的な剛性を賦与している。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \left\{ (2 \cdot l) \cdot \int_{-l}^l G \cdot b \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot l} \left(\sum_{i=1}^{N_{D[1]}} H_i^{\max} \cdot u_i - \sum_{i=1}^{N_{D[1]}} H_i^{\max} \cdot u_i \right) \right)^2 \cdot dx \right. \\ & \left. + (2 \cdot l) \cdot \int_{-l}^l E \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N_{D[2]}} H_i^{\max} \cdot u_i + \sum_{i=1}^{N_{D[2]}} H_i^{\max} \cdot u_i \right)^2 \cdot dx \right\} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

ここに,

$H_i^{\max}$: Lagrange 多項式の最も高次の項

G : せん断弾性係数, E : ヤング係数, b : 要素の厚さであり, γ は, 人工的な剛性の重みである。

尚, 参考のために記せば, 6 節に示した解析例題については, γ の値を 10^{-3} 程度以下にすれば, いずれの場合についても, 人工的に賦与した剛性に対する解の依存性は, 全く見られなかった。

注 5) 変位に関する厳密解は与えられていないため, 本報告では最初の解析例題については, Mesh Pattern (3), $N_{D[1]} = 7$ の値を, 又, 2 番目の解析例題については, Mesh Pattern (4), $N_{D[1]} = 9$ の値を, 厳密解としている。

注 6) 4 節点変位型 2 次元要素モデルは, アイソパラメトリック要素であり, エネルギー積分には, 積分点を (2×2) とした Gauss-Legendre の求積法を用いている。

(2007年2月19日原稿受理, 2007年7月18日採用決定)