繰返し軸力と2軸曲げを受ける鉄骨梁柱部材の ひずみ硬化および塑性領域の拡がりを考慮した塑性論モデル PLASTICITY MODEL WITH CONSIDERATION OF HARDENING AND EXPANTION OF PLASTIC REGIONS FOR STEEL BEAM-COLUMNS SUBJECTED TO REPEATED AXIAL FORCE AND BIAXIAL BENDING

元結 正次郎*, 金子 健作**
Shojiro MOTOYUI and Kensaku KANEKO

This paper describes the plasticity model which can take account for gradual plastification and hardening for steel beam-columns subjected to axial force and biaxial bending moment. The beam model composed of fibers, in which plastic regions expand in one direction, is developed. It is clarified how the basic equations (the yield function, the plastic flow rule and the hardening rule) should be formulated in bilinear stress-strain relation using an additive decomposition technique of the total displacement for the beam model. Finally, numerical examples are shown to examine the performance of the model with the return mapping algorithm and a convenient evaluation method of the plastic regions.

Keywords: beam element, plastic hinge model, biaxial bending, plastic region, hardening

梁要素、塑性ヒンジモデル、2軸曲げ、塑性領域、ひずみ硬化

1. はじめに

構造物が完全倒壊するまでの挙動をコンピューターシミュレーションにより追跡することは、近年、重要な課題となりつつある。そのための数値解析手法として、2・3次元有限要素法を用いて構造物をモデル化する方法、あるいは骨組構造において梁柱などの部材を梁要素などの1次元(線材)要素でモデル化する方法が挙げられる。特に、後者の方法では、現実的な時間で効率良く解析可能であるのみならず、構造物の設計上有効な諸量である部材の断面力などが解析により直接得られることから、構造設計などの実務レベルでの数値解析においては、線材要素モデルは特に有効であるといえる。

構造物の非線形挙動を精度良く追跡するためには、精度良い部材モデルの適用が必要である。本研究の目的は、鋼構造骨組の倒壊挙動を精度良く解析することを目標として、材料的非線形に限定して、単一部材を一あるいは二要素で精度良くかつ簡便に解析できる梁要素を構築することである。部材の非線形挙動は複合的な要因により支配されるが、材料的非線形性に限定すれば、応力-ひずみ関係における非線形性、断面の部分的降伏、材の軸方向への塑性負荷領域の拡がりによる塑性応答の変化に集約される。通常、断面の部分的降伏については、終局耐力を降伏曲面とする塑性ヒンジ法などにより無視される場合も多いが、構造物の不安定問題を論じる上ではこれは無視することのできない影響である。特に、最大耐力後に耐力が急激に劣化するよ

うな全体構造あるいは部分構造では、早期の剛性低下が不安定性に結びつくため、断面が部分的に降伏している状態の影響を無視することにより、それら構造物の最大耐力を過大に評価する恐れがある^{1),2)}。また、塑性領域の長さは、部材端力と部材端変位の関係におけるひずみ硬化の程度に大きく影響し、一般的に塑性領域が梁端部に留まるほど、局部的な塑性変形による降伏応力の上昇が大きくなり、その結果、塑性領域が長いときに比べて、部材としてのひずみ硬化は相対的に大きくなる³⁾。このように、材料非線形性のみに注目しても、倒壊解析を意識する場合には、通常良く使用される塑性ヒンジモデルについて言えば、捉えきれない要因が多く存在する。塑性ヒンジモデルを拡張したモデル^{4),5)}も幾つか存在するが、塑性領域の拡がりを無視したモデルについては、繰返し時のひずみ硬化挙動までもを整合的かつ包括的に精度よく評価できるとは言い難い。

著者らは既に、塑性領域長を考慮した2フランジ梁モデル^{6),9)}を提案しているが、断面が2フランジ(中空断面)に限られており、外力も軸力と1軸曲げを受ける場合のみとしている。一方で、断面力レベルに限定しているが、断面の最外縁降伏から全塑性状態に至るまでの中間的な状態を考慮した断面力の弾塑性評価手法¹⁰⁾を提案している。鋼構造骨組の倒壊挙動を予測するために、これらの手法を基にして、精度良く、かつ計算効率の高い、塑性論に基づいた梁要素(マクロモデル)を構築することが本論文の目的である。

* 東京工業大学大学院人間環境システム専攻 准教授・工博

Assoc. Prof., Dept. of Built Environment, Interdisciplinary Graduate School, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

** 東京工業大学都市地震工学センター
COE研究員・博士(工学)

Post-doctoral Fellow of COE, Center of Urban Earthquake Engineering, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

2. 塑性論に基づいた梁要素の定式化

2.1 解析対象

部材（以下、梁）の変位を剛体変位と相対変位に分離し、相対変位は微小であると仮定する。梁の剛体運動と共に移動する座標系（ $O-x, y, z$ ）および無次元化座標系（ $O-\xi, \eta, \zeta$ ）（ $\xi, \eta, \zeta \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ ）を導入し、Co-rotational beam element¹¹⁾として、Fig. 1に示す単純梁モデルを解析対象とする。有限回転の効果は要素の剛体運動による座標変換則により導入される。断面積 A 、 $y(\eta), z(\zeta)$ 軸まわりの断面2次モーメント I_y, I_z および材長 L を有する梁に、軸力 N 、節点 i, j （あるいは梁材端 i, j ）にそれぞれ η, ζ 軸まわりの材端モーメント M_y, M_z および M_{y_i}, M_{y_j} が作用する弾塑性問題を考える。Bernoulli-Eulerの仮定を導入し、節点変位として、梁の伸縮変位 u および節点 i, j における η, ζ 軸まわりの相対回転変位 $\theta_{y_i}, \theta_{z_i}$ および $\theta_{y_j}, \theta_{z_j}$ を導入する。

梁は混合硬化（移動硬化、等方硬化）を含む線形硬化弾塑性体からなり、全領域にわたり均質な材料により構成されるものとする。せん断応力に対しては弾性挙動を仮定し、部材の降伏は材の軸方向の直応力 σ （以下、応力）のみに起因するものとして、単軸応力場の von Mises の降伏条件を採用する。したがって、単位体積あたりの Helmholtz 自由エネルギー（以下、自由エネルギー） ψ 、降伏条件式 ϕ は以下のようになる。

$$\psi = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon^p)^2 + \frac{1}{2} E^K \varepsilon^K^2 + \frac{1}{2} E^I \varepsilon^I{}^2 \quad (1a)$$

$$\phi = \frac{|\sigma - \sigma^K|}{\sigma_Y} - \left(1 + \frac{\sigma^I}{\sigma_Y}\right) \leq 0 \quad (1b)$$

ここに $\varepsilon, \varepsilon^p$ は直ひずみ（以下、ひずみ）の全成分、塑性成分、 σ^K, σ^I はそれぞれ移動硬化、等方硬化を表す応力であり、 $\varepsilon^K, \varepsilon^I$ はそれらに対応するひずみである。 σ_Y は初期降伏応力であり、 E, E^K, E^I はヤング係数、移動および等方硬化係数である。

式(1)で設定した自由エネルギーおよび降伏条件式から、応力レベルでの基礎方程式は以下のようになる。

$$(\text{弾性構成則}) \quad \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2a)$$

$$(\text{塑性流れ則}) \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \dot{\gamma}^p, \quad \dot{\varepsilon}^K = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^K} \dot{\gamma}^p, \quad \dot{\varepsilon}^I = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^I} \dot{\gamma}^p \quad (2b-d)$$

$$(\text{硬化則}) \quad \dot{\sigma}^K = -E^K \dot{\varepsilon}^K, \quad \dot{\sigma}^I = -E^I \dot{\varepsilon}^I \quad (2c, f)$$

$$(\text{Kuhn-Tucker 条件式}) \quad \phi \leq 0, \quad \phi \dot{\gamma}^p = 0, \quad \dot{\gamma}^p \geq 0 \quad (2g-i)$$

$$(\text{塑性散逸項}) \quad \sigma \dot{\varepsilon}^p + \sigma^K \dot{\varepsilon}^K + \sigma^I \dot{\varepsilon}^I \geq 0 \quad (2j)$$

ここに上付きのドットは時間微分を表わす。 $\dot{\gamma}^p$ は塑性進展パラメータと呼ばれ、ここでは単位体積あたりの塑性散逸率に等しい。

2.2 部分的降伏を考慮した断面力レベルの塑性論モデル

式(2)からなる Fig. 1の梁要素の断面力レベルでの塑性論モデルを構築する。著者らは、軸力と1軸曲げを受ける梁断面を対象として、断面の部分的降伏を考慮するために、断面の塑性領域において積分された巨視的な状態量を導入することにより、効率的な解析手法を

Fig. 1 Analysis model (co-rotational beam element)

提案している¹⁰⁾。しかしながら、本論文が対象とするような2軸曲げ問題では、断面の塑性領域が2次元に分布するため、この手法を直接的に拡張することは困難である。そこで、梁断面を Fig. 2に示すように、座標 $(\eta(r), \zeta(r))$ ($r=1, 2, \dots, n$) に配置された n 個の線素の集合体であると想定し、各線素は集中した断面積 $A(r)$ を有し、応力は各線素の重心位置で代表値をとるものとする。

e をひずみの全成分、 k_y, k_z をそれぞれ η, ζ 軸に関する曲げひずみの全成分とすると、それらの塑性成分 e^p, k_y^p, k_z^p と塑性ひずみ ε^p は以下のように関係付けられる¹⁰⁾。

$$e^p(\xi) = \frac{1}{A} \int_A \varepsilon^p(\xi, \eta, \zeta) dA \quad (3a)$$

$$k_y^p(\xi) = \frac{1}{I_y} \int_A B_z \zeta \varepsilon^p(\xi, \eta, \zeta) dA, \quad k_z^p(\xi) = \frac{1}{I_z} \int_A B_y \eta \varepsilon^p(\xi, \eta, \zeta) dA \quad (3b, c)$$

ここに B_y, B_z は断面の幅とせいを示す。また、軸力 N 、 η, ζ 軸に関する曲げモーメント M_y, M_z からなる断面力 $s^T = \langle N \ M_y \ M_z \rangle$ 、一般化ひずみ $e^T = \langle e \ k_y \ k_z \rangle$ の塑性成分 $e^{pT} = \langle e^p \ k_y^p \ k_z^p \rangle$ とすると、弾性構成則は以下のように表される。

$$s = k^e (e - e^p) \quad (4)$$

ここに k^e は弾性剛性である。各線素のひずみを $\varepsilon(r)(\xi) = \varepsilon(\xi, \eta(r), \zeta(r))$ と表わし、以降、下添え字 (r) は線素の参照番号を表わし、特に断りのない限り、添え字の範囲 ($r=1, 2, \dots, n$) を省略する。梁の全自由エネルギー Ψ 、硬化ポテンシャル W^{e2}, H は次式で表される¹⁰⁾。

$$\Psi = \int_X \left(\frac{1}{2} (e - e^p)^T k^e (e - e^p) \right) d\xi + W^{e2} + H \quad (5a)$$

$$W^{e2} = \int_X \left(-\frac{1}{2} e^{pT} k^e e^p + \sum_{r=1}^n \frac{1}{2} E A(r) \varepsilon(r)^2 \right) d\xi \quad (5b)$$

$$H = \int_X \left(\sum_{r=1}^n \left(\frac{1}{2} E^K A(r) \varepsilon(r)^2 + \frac{1}{2} E^I A(r) \varepsilon(r)^2 \right) \right) d\xi \quad (5c)$$

ここに $X = [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ は ξ 軸方向の解析領域である。式(3)の一般化ひずみを次式のように離散化表示しておく。ただし、簡単のために断面形状は η, ζ 軸に関して対称であるものとする。

$$e^p = \sigma_Y \sum_{r=1}^n (\text{sgn} \sigma(r)) d(r) \varepsilon(r) A(r) \equiv \sum_{r=1}^n e_r^p \quad (6a)$$

$$d(r) = \frac{\text{sgn} \sigma(r)}{\sigma_Y} \left\langle \frac{1}{A} \ \frac{\zeta(r)}{1/2 Z_y} \ \frac{\eta(r)}{1/2 Z_z} \right\rangle \quad (6b)$$

ここに $\text{sgn}()$ は符号関数である。 Z_y, Z_z は η, ζ 軸に関する断面係数である。ひずみ硬化を表す一般化ひずみ $e^{KT} = \langle e^K \ k_y^K \ k_z^K \rangle$ および $e^{IT} = \langle e^I \ k_y^I \ k_z^I \rangle$ を導入し、式(6)に倣い以下の関係を定義する。

$$e^K = \sigma_Y \sum_{r=1}^n (\text{sgn} \sigma(r)) d(r) \varepsilon(r) A(r) \equiv \sum_{r=1}^n e_r^K \quad (7)$$

Fig. 2 Division of cross section (example)

等方硬化に対しても同様に定義する。式(6)と式(7)を速度表現としたものに式(2)を代入し、一般化ひずみに対する塑性流れ則を求める。

$$\dot{\epsilon}_{(r)}^p = d_{(r)} \dot{\gamma}_{(r)}^p A_{(r)} \equiv d_{(r)} \dot{g}_{(r)}^p \quad (8a)$$

$$\dot{\epsilon}_{(r)}^K = -d_{(r)} \dot{g}_{(r)}^p, \quad \dot{\epsilon}_{(r)}^I = -(\text{sgn } \sigma_{(r)}) d_{(r)} \dot{g}_{(r)}^p, \quad \dot{g}_{(r)}^p = A_{(r)} \dot{\gamma}_{(r)}^p \quad (8b-d)$$

ここに $\dot{g}_{(r)}^p$ は、各線素の単位長さ当たりの塑性散逸量の変化率である。

熱力学的力の導入とそれらの硬化則

式(6)と式(7)から塑性ひずみを、

$$\epsilon_{(r)}^p = b_{(r)} \cdot e_{(r)}^p, \quad \epsilon_{(r)}^K = b_{(r)} \cdot e_{(r)}^K, \quad \epsilon_{(r)}^I = b_{(r)} \cdot e_{(r)}^I \quad (9a-c)$$

$$b_{(r)}^T = \langle A / A_{(r)} \quad 0 \quad 0 \rangle \quad (9d)$$

として定義することができる。本来、上式の関係は一義的に決定できないが、式(6)および式(7)に対して整合的であれば、式(9)においてどのような定義を用いたとしても、後述の結果は変わらずに一般性は保たれる。

式(9)を式(5)に代入したものを、さらに Clausius-Duhem 不等式:

$$-\dot{\Psi} + \int_{\mathcal{V}} s \cdot \dot{\epsilon} d\xi \geq 0 \quad \text{に代入し、塑性散逸項を再度計算すると、}$$

$$\Gamma_{\text{sect}} = \int_{\mathcal{V}} \left\{ s \cdot \dot{\epsilon}^p - s^{p1} \cdot \dot{\epsilon}^p + \sum_{r=1}^n \left(-s_{(r)}^{p2} \cdot \dot{\epsilon}_{(r)}^p + s_{(r)}^K \cdot \dot{\epsilon}_{(r)}^K + s_{(r)}^I \cdot \dot{\epsilon}_{(r)}^I \right) \right\} L d\xi \quad (10)$$

ここに

$$s^{p1} = -k^e e^p, \quad s_{(r)}^{p2} = k_{(r)}^p e_{(r)}^p, \quad s_{(r)}^K = -k_{(r)}^K e_{(r)}^K, \quad s_{(r)}^I = -k_{(r)}^I e_{(r)}^I \quad (11a-d)$$

$$k_{(r)}^p = E A b_{(r)} \otimes b_{(r)}, \quad k_{(r)}^K = E^K A b_{(r)} \otimes b_{(r)}, \quad k_{(r)}^I = E^I A b_{(r)} \otimes b_{(r)} \quad (11e-g)$$

ここに、 $\otimes$ はテンソル積である。 $s^{p1T} = \langle N^{p1} \quad M_y^{p1} \quad M_z^{p1} \rangle$, $s_{(r)}^{p2T} = \langle N_{(r)}^{p2} \quad M_{y(r)}^{p2} \quad M_{z(r)}^{p2} \rangle$ は断面最外縁が降伏する初期降伏段階から全塑性状態までの断面力の上昇を規定する。

$s_{(r)}^{KT} = \langle N_{(r)}^K \quad M_{y(r)}^K \quad M_{z(r)}^K \rangle$, $s_{(r)}^{IT} = \langle N_{(r)}^I \quad M_{y(r)}^I \quad M_{z(r)}^I \rangle$ は断面力空間において移動および等方硬化を規定する熱力学的力となる。

制約条件式

式(2j)の体積分と式(10)の Γ_{sect} の塑性散逸エネルギーの変化率を等値し、Kuhn-Tucker 条件: $\phi_{(r)} = 0$, $\dot{\gamma}_{(r)}^p \geq 0$ および塑性流れ則から、次式の断面力レベルの降伏条件式が誘導される。

$$\phi_{(r)} = d_{(r)} \cdot (s - s^{p1} - s_{(r)}^{p2} - s_{(r)}^K - \text{sgn } \sigma_{(r)} s_{(r)}^I) - 1 \leq 0 \quad (12)$$

以上述べた基礎式を基にして、材端塑性ヒンジモデルに容易に修正することができ、さらに塑性領域の拡がりを考慮する場合には、梁内部に複数の参照点を設け、Multi-surface 問題を扱うことにより対応が可能である¹⁰⁾。本論文では、さらに、各状態量を節点に関する状態量に集約した材端力レベルの塑性論モデルについて述べる。

2. 3 塑性領域の拡がり考慮した材端力レベルの塑性論モデル

Fig. 2 の断面を有する梁モデルとして、Fig. 3 を導入する。Fig. 3 の梁モデルを構成する各線素には、中心位置 $\xi_{k(r)}^e$ 、長さ $L \xi_{k(r)}^p$ の 1 次元の塑性領域が材端近傍 $\xi_{k(r)}^e$ から $\xi_{k(r)}^e$ まで存在する。各変数の下添え字 $k(r)$ は、それぞれ梁の節点 i, j を示す指標 ($k = i, j$)、各線素の参照番号 ($r = 1, 2, \dots, n$) である。節点 i 側の塑性領域 $X_{i(r)}^p = [\xi_{i(r)}^e, \xi_{i(r)}^e]$ 、節点 j 側の塑性領域 $X_{j(r)}^p = [\xi_{j(r)}^e, \xi_{j(r)}^e]$ とする。本論文では、 $\xi_{k(r)}^e, \xi_{k(r)}^e$ を常に変数として取り扱うため、以降、現時刻において塑性負荷にある領域を塑性負荷領域と定義し、過去に何らかの塑性変形を生じ、現時刻では弾性である領域と明確に区別する。ここで示したモデルは、2 フランジ梁モデル^{8), 9)}を単純に一般の断面を有する梁へと拡張したもの

である。ただし、2 フランジ梁モデルでは、静定構造物であるがゆえに、節点力と応力が一対一対応しており、節点の状態量の変化率と一般化ひずみなどの梁内部の状態量の変化率は容易に関係付けられる。しかしながら、一般の断面ではこの限りではないため、2 フランジ梁モデルにおける定式化手法に修正を加える必要がある。

Fig. 3 Spread plasticity model

弾性構成則

節点力を $f^T = \langle N \quad M_{yi} \quad M_{zi} \quad M_{yj} \quad M_{zj} \rangle$ とし、それに対応する節点変位を $u^T = \langle u \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj} \rangle$ とする。節点変位 u の塑性成分 (以下、節点塑性変位) $u^{pT} = \langle u_i^p + u_j^p \quad \theta_{yi}^p \quad \theta_{zi}^p \quad \theta_{yj}^p \quad \theta_{zj}^p \rangle$ 、およびそれらを用いた弾性構成則は、以下のように表される。

$$f = K^e (u - u^p), \quad u^p = \int_{\mathcal{V}} A(\xi) e^p(\xi) L d\xi \quad (13a, b)$$

ここに K^e は梁の弾性剛性マトリクス、 A は梁内部の相対変位を微小とし、軸力均一、曲げモーメント線形変化を仮定したときの平衡方程式 $s(\xi) = A(\xi)^T f$ を記述するマトリクスである。式(13b)の表現に倣い、ひずみ硬化を表す節点変位 $u_{k(r)}^{KT} = \langle u_{k(r)}^K \quad \theta_{yk(r)}^K \quad \theta_{zk(r)}^K \rangle$, $u_{k(r)}^{IT} = \langle u_{k(r)}^I \quad \theta_{yk(r)}^I \quad \theta_{zk(r)}^I \rangle$ および $u_{k(r)}^{pT} = \langle u_{k(r)}^p \quad \theta_{yk(r)}^p \quad \theta_{zk(r)}^p \rangle$ を定義し、 $e_{(r)}^K, e_{(r)}^I$ との関係を用いたように定義することにする。

$$u_{k(r)}^K = \int_{\mathcal{V}} A_k(\xi) e_{(r)}^K(\xi) L d\xi, \quad u_{k(r)}^I = \int_{\mathcal{V}} A_k(\xi) e_{(r)}^I(\xi) L d\xi \quad (14a, b)$$

$$u_{k(r)}^p = \int_{\mathcal{V}} A_k(\xi) e_{(r)}^p(\xi) L d\xi, \quad A_k = \text{diag}(1, -(\xi_i + \xi_j), -(\xi_j + \xi_i)) \quad (14c, d)$$

ここに A_k は A のサブマトリクスである。当然のことながら、ひずみ硬化により、節点 i, j の降伏曲面はそれぞれ独立に移動および膨張する。しかしながら、塑性変形あるいは塑性流れ則については節点 i, j の挙動はこの限りではなく、これについては塑性流れ則を誘導した後の考察にて述べる。また、式(14)で定義した $u_{k(r)}^K$ および $u_{k(r)}^I$ に対する熱力学的力を誘導する必要があるが、まず $u_{k(r)}^K, u_{k(r)}^I$ の塑性流れ則を誘導しておく。

塑性流れ則

ここで示す塑性流れ則は、文献 8), 9) を節点 i, j に 2 軸の曲げモーメントがある問題へと拡張したものである。微小時間において、 $\xi_{k(r)}^e, \xi_{k(r)}^e$ は変化しないとすると、式(13)と式(14)を速度表現にすることにより、塑性流れ則は以下のように表される。

$$\dot{u}^p = \sum_{k=i,j} \sum_{r=1}^n C_{k(r)} \dot{A}_{k(r)}, \quad A_{k(r)}^T = \langle A_{k(r)}^p \quad A_{k(r)}^u \rangle \quad (15a, b)$$

$$\dot{u}_{k(r)}^K = -C_{k(r)} \dot{A}_{k(r)}, \quad \dot{u}_{k(r)}^I = -\text{sgn } \sigma_{k(r)} C_{k(r)} \dot{A}_{k(r)} \quad (15c, d)$$

ここに、

$$\frac{\partial \phi_{k(r)}}{\partial N} \equiv \frac{\partial \phi_{(r)}}{\partial N} \bigg|_{\xi \in X_{k(r)}^p}, \quad \frac{\partial \phi_{k(r)}}{\partial M} \equiv \frac{\partial \phi_{(r)}}{\partial M} \bigg|_{\xi \in X_{k(r)}^p}, \quad \bar{\xi}_{k(r)} \equiv -(\xi_k + \xi_{i(r)})/2 \quad (16a-c)$$

$$C_{kl(r)} = \begin{bmatrix} \delta_{kl} \frac{\partial \phi_l(r)}{\partial N} & 0 \\ \frac{\bar{\xi}_{kl(r)}}{1/2} \frac{\partial \phi_l(r)}{\partial M_y} & \frac{\partial \phi_l(r)}{\partial M_y} \\ \frac{\bar{\xi}_{kl(r)}}{1/2} \frac{\partial \phi_l(r)}{\partial M_z} & \frac{\partial \phi_l(r)}{\partial M_z} \end{bmatrix}, \quad C_{k(r)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_k(r)}{\partial N} & 0 \\ \frac{\bar{\xi}_{ik(r)}}{1/2} \frac{\partial \phi_k(r)}{\partial M_y} & \frac{\partial \phi_k(r)}{\partial M_y} \\ \frac{\bar{\xi}_{ik(r)}}{1/2} \frac{\partial \phi_k(r)}{\partial M_z} & \frac{\partial \phi_k(r)}{\partial M_z} \\ \frac{\bar{\xi}_{jk(r)}}{1/2} \frac{\partial \phi_k(r)}{\partial M_y} & \frac{\partial \phi_k(r)}{\partial M_y} \\ \frac{\bar{\xi}_{jk(r)}}{1/2} \frac{\partial \phi_k(r)}{\partial M_z} & \frac{\partial \phi_k(r)}{\partial M_z} \end{bmatrix} \quad (16d, e)$$

ここに δ_{kl} は Kronecker のデルタである。梁要素の塑性進展パラメータ (の変化率) $\dot{\lambda}_{k(r)}^p, \dot{\lambda}_{k(r)}^u$ と $\dot{g}_l^s$ は以下のように関係付けられる。

$$\dot{\lambda}_{k(r)}^p = \int_{X_{k(r)}^p} \dot{g}_l^s(\xi) L d\xi, \quad \dot{\lambda}_{k(r)}^u = \int_{X_{k(r)}^u} (\xi_{k(r)}^s - \xi) \dot{g}_l^s(\xi) L d\xi \quad (17a, b)$$

すなわち、 $\dot{\lambda}_{k(r)}^p, \dot{\lambda}_{k(r)}^u$ は、それぞれ節点 k の r 番目の線素における塑性散逸変化率の総和、および $\xi_{k(r)}^s$ を中心とする 1 次モーメントであり、Kuhn-Tucker 条件 $\dot{g}_l^s \geq 0$ から $\dot{\lambda}_{k(r)}^u \leq 0, \dot{\lambda}_{k(r)}^p \geq 0$ を満足する。

本梁要素では、 $\dot{\lambda}_{k(r)}^u$ の影響により、塑性負荷領域の拡がりに応じて、節点力空間 f における節点塑性速度の方向が変化する。また、式(15)における節点に関する Σ で特徴付けられるように、全ての線素が弾性となる節点側でも、梁内部の塑性変形の影響により節点に塑性回転が生じる。この両節点間における塑性回転の連成的挙動は、塑性領域長が大きいほど影響が大きくなる。塑性ヒンジモデルにおいては $\dot{\lambda}_{k(r)}^u = 0$ となり、この効果は欠落している。

硬化則

変位型の有限要素法に倣い、一般化ひずみの全成分を $e = e^e + e^p$ と加法分離し、それぞれの成分に対して、式(14)で定義した各節点塑性変位から内挿関数 $B_{k(r)}^p, \hat{B}_{k(r)}^p$ を介して、一般化塑性ひずみが塑性負荷領域 ($\xi \in X_{k(r)}^p$) において、次式のように表わされるものとする。

$$\dot{e}^e(\xi) = B^e(\xi) \dot{u}^e, \quad \dot{e}_l^p(\xi) = \hat{B}_{k(r)}^p(\xi) \dot{\lambda}_{k(r)}^p \quad (18a, b)$$

$$\dot{e}_l^p(\xi) = B_{k(r)}^p(\xi) \dot{\lambda}_{k(r)}^p, \quad \dot{e}_l^u(\xi) = B_{k(r)}^u(\xi) \dot{\lambda}_{k(r)}^u \quad (18c, d)$$

B^e は、Bernoulli-Euler の仮定に基づく 3 次梁要素に使用される (一般化) ひずみ-変位マトリクスに相当する。これらの関係式から、通常の変位型有限要素法と同様に、節点力を誘導することが可能である。ここで、論旨を明確にするために、どのように内挿関数 $B_{k(r)}^p, \hat{B}_{k(r)}^p$ を定義すべきかについては後述することにし、はじめに硬化則および制約条件式を誘導しておく。

式(10)の塑性散逸項に式(18)を代入し、この第 1 項を $f \cdot \dot{u}^p$ と見なすと、次式を得る。

$$\Gamma_{\text{beam}} = f \cdot \dot{u}^p - \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n (s_{k(r)}^R \cdot \dot{u}_{k(r)}^p + s_{k(r)}^K \cdot \dot{u}_{k(r)}^K + s_{k(r)}^I \cdot \dot{u}_{k(r)}^I) \quad (19)$$

ここに、

$$s_{k(r)}^R = s_{k(r)}^{p1} + s_{k(r)}^{p2} \quad (20a)$$

$$s_{k(r)}^{p1} = \int_{X_{k(r)}^p} \hat{B}_{k(r)}^p(\xi) s_l^{p1}(\xi) L d\xi, \quad s_{k(r)}^{p2} = \int_{X_{k(r)}^p} \hat{B}_{k(r)}^p(\xi) s_l^{p2}(\xi) L d\xi$$

$$s_{k(r)}^K = \int_{X_{k(r)}^p} B_{k(r)}^p(\xi) s_l^K(\xi) L d\xi, \quad s_{k(r)}^I = \int_{X_{k(r)}^p} B_{k(r)}^p(\xi) s_l^I(\xi) L d\xi$$

$$(20b-e)$$

$s_{k(r)}^K, s_{k(r)}^I$ は節点力空間 f において、移動硬化および等方硬化を規定

する力である。それぞれの硬化則は、式(20)を速度表現し、式(18)を式(11)の硬化則に代入することにより、以下ようになる。

$$\dot{s}_{k(r)}^R = \sum_{s=1}^n k_{k(rs)}^p \dot{u}_{k(s)}^p, \quad \dot{s}_{k(r)}^K = -k_{k(r)}^K \dot{u}_{k(r)}^K, \quad \dot{s}_{k(r)}^I = -k_{k(r)}^I \dot{u}_{k(r)}^I \quad (21a-c)$$

ここに、各硬化係数は次式のように表わされる。

$$k_{k(rs)}^p = \delta_{rs} \int_{X_{k(r)}^p} \hat{B}_{k(r)}^p(\xi) k_{k(s)}^p(\xi) L d\xi - \int_{X_{k(r)}^p \cap X_{k(s)}^p} \hat{B}_{k(r)}^p(\xi) k_{k(s)}^p(\xi) L d\xi \quad (22a)$$

$$k_{k(r)}^K = \int_{X_{k(r)}^p} B_{k(r)}^p(\xi) k_{k(r)}^K(\xi) L d\xi, \quad k_{k(r)}^I = \frac{E^I}{E^K} k_{k(r)}^K \quad (22b, c)$$

ここに $X_{k(r)}^p \cap X_{k(s)}^p$ は $X_{k(r)}^p$ と $X_{k(s)}^p$ の共通の塑性負荷領域を表す。

制約条件式

$I_1^T = (1 \ 0)$ とし、Kuhn-Tucker 条件: $\phi_l \dot{g}_l^s \geq 0$ と $\dot{\lambda}_{k(r)} = I_1 \cdot \dot{\lambda}_{k(r)}$ から、塑性負荷における制約条件式が次式のように誘導される。

$$\phi_{k(r)} = C_{k(r)}^T f - C_{kk(r)}^T s_{k(r)}^R - C_{kk(r)}^T \{s_{k(r)}^K + (\text{sgn} \sigma_{k(r)}) s_{k(r)}^I\} - I_1 = 0 \quad \text{for } \dot{\lambda}_{k(r)}^p > 0 \quad (23)$$

$\phi_{k(r)}$ の第 1 成分は各線素における応力参照点位置 $\xi_{k(r)}^s$ での降伏条件式であり、 $\phi_{k(r)}$ の第 2 成分は降伏した線素の応力勾配に対する制約条件式である。また、

$$\dot{u}^p = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial \phi_{k(r)}}{\partial f} \right)^T \dot{\lambda}_{k(r)} \quad (24)$$

を満足することから、 $\phi_{k(r)}$ は塑性ポテンシャルに相当し、上式の塑性流れ則が Multi-surface 問題における Koiter の拡張された Associate flow 則¹²⁾に従うことが理解される。

弾塑性接線係数

式(23)の塑性負荷条件式: $\phi_{k(r)} = 0$ より、最終的に解くべき $\dot{\lambda}_{k(r)}$ に関する連立方程式を得る。

$$\sum_{l \in \text{inactive}} \sum_{s \in \text{active}} G_{kl(rs)} \dot{\lambda}_{l(s)} = C_{k(r)}^T K^e \dot{u} \quad (k \in \text{active}, r \in \text{active}) \quad (25)$$

ここに、係数マトリクスは、

$$G_{kl(rs)} = C_{k(r)}^T K^e C_{l(s)} + \delta_{kl} C_{kk(r)}^T k_{k(rs)}^p C_{ll(s)} + \delta_{kl} \delta_{rs} C_{kk(r)}^T (k_{k(s)}^K + k_{k(s)}^I) C_{ll(s)} \quad (26)$$

となり、 $G_{kl(rs)}$ を成分とするマトリクスの逆マトリクスの成分を $G^{kl(sp)}$ と定義し、通常の塑性論での定式化と同様に、弾性構成則、塑性流れ則から節点変位速度 $\dot{u}$ について次式を得る。

$$\dot{f} = K^{ep} \dot{u} \quad (27)$$

ここに、弾塑性要素マトリクス K^{ep} は以下ようになる。

$$K^{ep} = K^e - \sum_{k \in \text{inactive}} \sum_{r \in \text{active}} \sum_{l \in \text{inactive}} \sum_{s \in \text{active}} (K^e C_{k(r)}) G^{kl(rs)} (C_{l(s)}^T K^e) \quad (28)$$

塑性と判定された参照点での塑性進展パラメータ速度のみを未知数とする連立一次方程式を解くために、塑性判定された参照点が少ないときは、解くべき方程式の元数が小さくなるため、効率よく計算することができる。本梁モデルは、部材としての弾性剛性が予め積分により得られており、弾性時には内力および要素剛性マトリクスを計算するために式(25)を解く必要が無く、数値計算コストは 3 次弾性梁要素と同程度となる。また、本論文の定式化では、Bernoulli-Euler 梁を対象としているが、式(28)の K^e に対して、せん断変形を考慮した弾性剛性マトリクスを与えることにより、弾性成分に対するせん断変形を容易に本モデルに取り入れることが可能である。

3. 梁内部の塑性ひずみの内挿方法

3. 1 ひずみ硬化に対する熱力学的力

式(22)の硬化係数の具体的形式を得るためには $B_{k(r)}^p, \hat{B}_{k(r)}^p$ を定義しなければならないが、 $B_{k(r)}^p$ などの解析解を厳密に求めることは不可能である。そこで、一般化塑性ひずみ $\dot{e}_{(r)}^p$ は式(8)の塑性流れ則により塑性進展パラメータ $\dot{g}_{(r)}^p(\xi)$ により関連づけられていることから、 $\dot{e}_{(r)}^p$ の分布を考える代わりに $\dot{g}_{(r)}^p(\xi)$ の分布を考察する。 $\dot{g}_{(r)}^p(\xi)$ は、式(12)の塑性負荷条件式 $\dot{\phi}_{(r)}(\xi) = 0$ から次式を満足するように分布する。

$$\sum_{s \in \text{active}} d_{(r)}^T \{ \mathbf{k}^e + \delta_{rs} (-\mathbf{k}_{(r)}^p + \mathbf{k}_{(r)}^c + \mathbf{k}_{(r)}^i) \} \dot{g}_{(s)}^p(\xi) = d_{(r)}^T \dot{\mathbf{s}}(\xi) \quad (29)$$

上式から理解されるように、節点 k において、もし仮に塑性負荷状態にある線素全ての塑性負荷領域がお互いに等しければ、文献8)の2フランジ梁モデルと同様に、 $\dot{g}_{(r)}^p(\xi)$ は各線素の各塑性負荷領域内で材軸方向に直線的に変化して分布し、以下のような表現が可能である。

$$\dot{g}_{(r)}^p(\xi) = \dot{\lambda}_{0k(r)} + \dot{\lambda}_{1k(r)} \xi \quad (\xi \in X_{k(r)}^p) \quad (30)$$

ただし、実際には、塑性負荷状態にある線素はそれぞれ異なる塑性負荷領域を有するため、 $\dot{g}_{(r)}^p(\xi)$ は近似表現であるに過ぎない。しかしながら、式(13)で理解される様に、曲げ変形について言えば、梁内部に行くほど、その塑性変形の影響が節点回転に及ぼす程度は小さくなる。これより、式(42)により梁の弾塑性挙動を十分に捉えることができると仮定する。

式(8)、式(14)と式(30)から、 $\dot{\lambda}_{0k(r)}, \dot{\lambda}_{1k(r)}$ を介して $\mathbf{u}_{k(r)}^K, \mathbf{u}_{k(r)}^I$ などを求めると、マトリクス $B_{k(r)}^p(\xi)$ は一般化逆行列を用いて以下となる。

$$B_{k(r)}^p = N_{k(r)}^p \left(\int_{X_{k(r)}^p} A_k N_{k(r)}^p L d\xi \right)^{-1} \quad () : \text{一般化逆行列} \quad (31a)$$

$$N_{k(r)}^p = \frac{\text{sgn } \sigma_{k(r)}}{\sigma_y} \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & \frac{\xi}{A} \\ \frac{\zeta_{(r)}}{1/2 Z_y} & \frac{\zeta_{(r)} \xi}{1/2 Z_y} \\ \frac{\eta_{(r)}}{1/2 Z_z} & \frac{\eta_{(r)} \xi}{1/2 Z_z} \end{bmatrix} \quad (31b)$$

$B_{k(r)}^p(\xi)$ は ξ の1次関数となる。また、当然のことながら、 $B_{k(r)}^p(\xi)$ が1次関数で表されても、断面積分された $\mathbf{e}^K(\xi), \mathbf{e}^I(\xi)$ (あるいは $\mathbf{e}^p(\xi)$) は直線状に変化して分布しないことは明らかである。式(31)を式(22)に代入して、硬化係数を求めると以下ようになる。

$$\bar{\mathbf{k}}_{k(r)}^H = \frac{1}{L \left(\frac{1}{2} \xi_{k(r)}^p \right)^3} \frac{A}{2A_{(r)}} \begin{bmatrix} A \left\{ \left(\xi_k + \xi_{k(r)}^c \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \xi_{k(r)}^p \right)^2 \right\} & 3 \frac{\bar{Z}_{y(r)} (\xi_k + \xi_{k(r)}^c)}{2\zeta_{(r)}} & 3 \frac{\bar{Z}_{z(r)} (\xi_k + \xi_{k(r)}^c)}{2\eta_{(r)}} \\ 3 \frac{\bar{Z}_{y(r)} (\xi_k + \xi_{k(r)}^c)}{2\zeta_{(r)}} & 3 \frac{\bar{Z}_{y(r)} \bar{Z}_{y(r)}}{A(2\zeta_{(r)})(2\zeta_{(r)})} & 3 \frac{\bar{Z}_{y(r)} \bar{Z}_{z(r)}}{A(2\zeta_{(r)})(2\eta_{(r)})} \\ 3 \frac{\bar{Z}_{z(r)} (\xi_k + \xi_{k(r)}^c)}{2\eta_{(r)}} & 3 \frac{\bar{Z}_{z(r)} \bar{Z}_{y(r)}}{A(2\eta_{(r)})(2\zeta_{(r)})} & 3 \frac{\bar{Z}_{z(r)} \bar{Z}_{z(r)}}{A(2\eta_{(r)})(2\eta_{(r)})} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{k(r)}^K = E^K \bar{\mathbf{k}}_{k(r)}^H, \quad \mathbf{k}_{k(r)}^I = E^I \bar{\mathbf{k}}_{k(r)}^H \quad (32a-c)$$

平面問題では、 $\bar{Z}_{y(r)} = Z_y(\eta_{(r)} = 0), \bar{Z}_{z(r)} = Z_z(\zeta_{(r)} = 0)$ となり、一般には

$$\bar{Z}_{y(r)} = \frac{Z_y Z_z^2 \zeta_{(r)}^2}{Z_y^2 \eta_{(r)}^2 + Z_z^2 \zeta_{(r)}^2}, \quad \bar{Z}_{z(r)} = \frac{Z_y^2 Z_z \eta_{(r)}^2}{Z_y^2 \eta_{(r)}^2 + Z_z^2 \zeta_{(r)}^2} \quad (33a, b)$$

となる。H型断面などのように、線素が $\eta_{(r)} = 0$ あるいは $\zeta_{(r)} = 0$ 上に配置される場合には、式(32)の計算において零割が生じるため、数値計算上、線素の座標値に適当な微小値 (0.01 程度) を導入して零割を

防ぐ必要がある。 $\mathbf{k}_{k(rs)}^p$ も同様に、解析的に求めることが可能であるが、 $\mathbf{k}_{k(r)}^K, \mathbf{k}_{k(r)}^I$ と異なり $\mathbf{k}_{k(rs)}^p \neq \mathbf{0}$ (for $r \neq s$) であり、線素 r, s の連成項の計算が必要のために数値計算量が多くなる。そこで、近似的にはあるが簡便な方法を後述する。

断面の部分的降伏状態から全塑性状態の挙動は、塑性負荷領域の拡がりに無関係に定まると仮定し、便宜的に、従来の材端塑性ヒンジモデルと同様に、一般化塑性ひずみが梁端部 $\xi = \xi_k$ に集約して考えられるものとして、次式のように考える。

$$\dot{e}_{(r)}^p(\xi) \approx A_k^{-1} \frac{1}{L_k^p} \delta(\xi - \xi_k) \dot{\mathbf{u}}_{k(r)}^p \equiv \hat{B}_{k(r)}^p(\xi) \dot{\mathbf{u}}_{k(r)}^p \quad (34)$$

ここに $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。 L_k^p はこの定式化で用いられる節点 k の擬定塑性領域長であり、 $L_k^p = 0.1L$ 程度として定数として取り扱う。式(34)を式(22)に代入して、 $\mathbf{s}_{k(r)}^R$ の硬化係数を求める。

$$\dot{\mathbf{s}}_{k(r)}^R = \sum_{s=1}^n \frac{1}{L_k^p} (\delta_{rs} \mathbf{k}_{(s)}^p - \mathbf{k}^e) \dot{\mathbf{u}}_{k(s)}^p = \sum_{s=1}^n \mathbf{k}_{k(rs)}^p \dot{\mathbf{u}}_{k(s)}^p \quad (35)$$

ここに、

$$\mathbf{k}_{k(rs)}^p = \left(1/L_k^p \right) \left\{ \delta_{rs} \text{diag}(EA^2/A_{(r)}, 0, 0) - \mathbf{k}^e \right\} \quad (36)$$

3. 2 断面内の応力再配分を表す熱力学的力

ここでは、本梁モデルの物理的意味を考察し、式(30)、式(34)の仮定により引き起こされる幾つかの不具合について述べ、既に誘導した基礎方程式の一部を修正する。まず、断面力レベルでの基礎方程式を考察しておく。

本モデルの降伏曲面は、各線素の降伏条件により規定される降伏線からなる Multi-surface となる。断面内の初期降伏から全塑性状態までの部分的降伏段階では、断面力の上昇は、Multi-surface で表わされる降伏曲面 (降伏線) の移動則として表わされ、線素の降伏により active な降伏曲面のみならず、弾性状態である active でない降伏曲面も移動する。この挙動は降伏後における断面内の応力の再配分効果を表現している。さらに、式(12)は、各線素の応力に対する降伏条件式として考えられることから、

$$\phi_{(r)} \equiv \frac{1}{\sigma_y} \left| \frac{N}{A} + \frac{\zeta_{(r)}}{1/2 Z_y} \frac{M_y}{\sigma_y} + \frac{\eta_{(r)}}{1/2 Z_z} \frac{M_z}{\sigma_y} - \sigma_{(r)}^R - \sigma_{(r)}^K \right| - (1 + \tau_{(r)}) \quad (37)$$

と書き換えると、 $\sigma_{(r)}^R$ は不静定応力に相当する。ここで、弾性構成則から得られる断面力 $\mathbf{s} = \mathbf{k}^e (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)$ と、各線素の $\sigma_{(r)}$ を積分して得られる断面力は等しくならなければならない。すなわち、軸力に対して、

$$N = \sum_{r=1}^n \sigma_{(r)} A_{(r)} = \sum_{r=1}^n (\text{sgn } \sigma_{(r)}) \sigma_y d_{(r)} \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{(r)}^R) A_{(r)} \quad (38)$$

$$= N - \sum_{r=1}^n (\text{sgn } \sigma_{(r)}) \sigma_y d_{(r)} \cdot \mathbf{s}_{(r)}^R A_{(r)}$$

曲げモーメントに対して、

$$M_y = \sum_{r=1}^n B_z \zeta_{(r)} \sigma_{(r)} A_{(r)} = M_y - \sum_{r=1}^n (\text{sgn } \sigma_{(r)}) \sigma_y h \zeta_{(r)} d_{(r)} \cdot \mathbf{s}_{(r)}^R A_{(r)} \quad (39)$$

が得られるが、本モデルが力学的に整合性を有するためには、式(38)および式(39)において、以下の関係を常に満足する必要がある。

$$\sum_{r=1}^n (\text{sgn } \sigma_{(r)}) \sigma_y d_{(r)} \cdot \mathbf{s}_{(r)}^R A_{(r)} = 0 \quad (40a)$$

$$\sum_{r=1}^n (\text{sgn } \sigma_{(r)}) \sigma_y B_z \zeta_{(r)} d_{(r)} \cdot \mathbf{s}_{(r)}^R A_{(r)} = 0, \quad \sum_{r=1}^n (\text{sgn } \sigma_{(r)}) \sigma_y B_y \eta_{(r)} d_{(r)} \cdot \mathbf{s}_{(r)}^R A_{(r)} = 0 \quad (40b, c)$$

これらの関係は、不静定応力は断面内で自己釣り合いしていなければならないという物理的意味であることが予測され、言い換えれば、

$$\sum_{r=1}^n \sigma_{(r)}^R A_{(r)} = 0, \quad \sum_{r=1}^n B_z \zeta_{(r)} \sigma_{(r)}^R A_{(r)} = 0, \quad \sum_{r=1}^n B_y \eta_{(r)} \sigma_{(r)}^R A_{(r)} = 0 \quad (41a-c)$$

を満足しなければならないということである。実際に、式(40)を速度表現として、式(8)の塑性流れ則、式(11)の硬化則を代入すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^n (\text{sgn} \sigma_{(r)}) \sigma_{(r)} d_{(r)}^T \dot{s}_{(r)}^R A_{(r)} \\ &= \sum_{s \in \text{active}} \left[- \left\{ \sum_{r=1}^n (\text{sgn} \sigma_{(r)}) \sigma_{(r)} A_{(r)} d_{(r)}^T \right\} k^e d_{(s)} \right] \dot{g}_{(s)} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

および、

$$\sum_{r=1}^n (\text{sgn} \sigma_{(r)}) \sigma_{(r)} B_z \zeta_{(r)} d_{(r)}^T \dot{s}_{(r)}^R A_{(r)} = 0 \quad (43)$$

として、断面力レベルでの塑性論モデルの妥当性が検証された。

つづいて、材端力レベルでも同様の検証をおこなう。まず、式(21a)の硬化則を考える上での塑性流れ則を次式で定義しておく。

$$\dot{u}_{k(r)}^p = C'_{kk(r)} \dot{A}_{k(r)} \quad (44)$$

材端部から常に降伏する ($\bar{\xi}_{k(r)} = \text{constant} = \bar{\xi}_{kk}$) と仮定すると、式(40)と同様に、材端の不静定応力の合応力に対して、

$$\sum_{r=1}^n (\text{sgn} \sigma_{k(r)}) \sigma_{(r)} (C_{kk(r)} I_1)^T \dot{s}_{k(r)}^R A_{(r)} = 0 \quad (45)$$

となる。しかしながら、材端の不静定応力の合モーメントに対しては、

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^n (\text{sgn} \sigma_{k(r)}) \sigma_{(r)} B_z \zeta_{(r)} (C_{kk(r)} I_1)^T \dot{s}_{k(r)}^R A_{(r)} \\ &= \sum_{s \in \text{active}} \frac{E}{L_k^p} \left\{ - \left[\begin{array}{c} 0 \\ \bar{\xi}_{kk} \\ 1/2 \end{array} \right] I_y \right\}^T + \left\{ \begin{array}{c} B_z \zeta_{(s)} A \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}^T C'_{kk(s)} \dot{A}_{k(s)} \\ &\neq 0 \quad (\text{if } C'_{kk(s)} = C_{kk(s)}) \end{aligned} \quad (46)$$

となり、塑性流れ則の定義の仕方により、不静定応力の不釣り合い力が生じ、既に断面力レベルで確かめられたような $\dot{s}_{k(r)}^R$ の自己釣り合いは、満足しない。したがって、梁の弾性構成則: $f = K^e(u - u^p)$ から求められる節点力 f と、各線素の応力を積分して得られる節点力とは互いに異なるため、弾完全塑性体からなる梁においても、材端力が初期降伏曲面の外へと逸脱する可能性がある不都合が生じる。これは、式(30)の塑性進展パラメータ $g_{(r)}^p(\xi)$ の分布の仮定が、厳密には塑性負荷条件式を満足しないことによるものと考えられる。そこで、この不都合を回避するために、式(46)の結果が零になるように、便宜的に $C'_{kk(s)}$ を、

$$C'_{kk(r)} = C_{kk(r)} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{\xi}_{kk}}{1/2} \frac{\partial \phi_{k(r)}}{\partial N} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

と定義し、不釣り合い力が生じないようにする。式(47)によれば、

$$\sum_{r=1}^n (\text{sgn} \sigma_{k(r)}) \sigma_{(r)} B_z \zeta_{(r)} (C'_{kk(r)} I_1)^T \dot{s}_{k(r)}^R A_{(r)} = \sum_{s \in \text{active}} \frac{E}{L_k^p} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \dot{A}_{k(s)} = 0 \quad (48)$$

同様に、

$$\sum_{r=1}^n (\text{sgn} \sigma_{k(r)}) \sigma_{(r)} B_y \eta_{(r)} d_{(r)}^T \dot{s}_{(r)}^R A_{(r)} = 0 \quad (49)$$

となり、本梁モデルが各線素の応力の積分により計算される材端力と梁の弾性構成則による材端力が一致する。以上の基礎方程式の修正の妥当性については、後述の数値計算例により検証をおこなう。

4. 材端力算定手順

4. 1 塑性負荷領域の計算

本梁モデルでは、塑性負荷領域は常に変化するため、その計算手法について述べる。文献 8) の 2 フランジモデルでは、梁内部の降伏応力分布から、ある時刻における塑性負荷領域を予測している。しかしながら、既に述べたように、2 フランジモデルは静定構造であるのに対して、本梁モデルは不静定構造であるため、応力と材端力が一対一対応しない。繰返し载荷においては、降伏後の応力分布および降伏応力分布が直線分布とはならないことから、この手法は本モデルに適用し難い。そこで、塑性散逸エネルギー分布から、比較的簡便に任意の時刻の塑性負荷領域を予測できる手法を提案する。

時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ の増分間 $\tau \in [t, t + \Delta t]$ における要素内力の収斂計算において、収斂計算の段階 q から段階 $q+1$ に至る段階で、塑性負荷領域が変化しないものと仮定して計算された塑性進展パラメータ $g_{(q+1)}^p A_{k(r)}^p, g_{(q+1)}^p A_{k(r)}^u$ が既に求められているものとし (Fig. 4(a))、段階 $q+1$ における塑性負荷領域 $g_{(q+1)}^p X_{k(r)}^p, g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^p, g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^u$ を修正する手順を示す。簡単のために、単調载荷の場合についてははじめに述べておく。塑性進展パラメータ $g_{(r)}^p(\tau, \xi)$ を、 ξ に関して 1 次式で十分近似できるものと仮定し、次式で表す。

$$g_{(r)}^p(\tau, \xi) = \lambda_{0k(r)}(\tau) + \lambda_{1k(r)}(\tau) \xi, \quad \lambda_{k(r)}^T = \langle \lambda_{0k(r)} \quad \lambda_{1k(r)} \rangle \quad (50a, b)$$

一般化塑性進展パラメータ $g_{(r)}^p(\tau, \xi)$ を段階 q から段階 $q+1$ に至る修正量 $\delta A g_{(r)}^p(\tau, \xi)$ で増分分解し、次のように表わす。

$$\begin{aligned} g_{(q+1)}^p \lambda_{k(r)} &= g_{(q)}^p \lambda_{k(r)} + \delta A \lambda_{k(r)} \\ &= g_{(q)}^p L_{k(r)} \left(g_{(q)}^p X_{k(r)}^p \right) g_{(q)}^p A_{k(r)} + g_{(q)}^p L_{k(r)} \left(g_{(q)}^p X_{k(r)}^p \right) \delta A A_{k(r)} \\ &= g_{(q)}^p L_{k(r)} \left(g_{(q)}^p X_{k(r)}^p \right) g_{(q+1)}^p A_{k(r)} \end{aligned} \quad (51)$$

ここに

$$L_{k(r)} \left(X_{k(r)}^p \right) = \begin{bmatrix} \int_{X_{k(r)}^p} L d\xi & \int_{X_{k(r)}^p} \xi L d\xi \\ \int_{X_{k(r)}^p} (\xi_{k(r)}^s - \xi) L d\xi & \int_{X_{k(r)}^p} (\xi_{k(r)}^s - \xi) \xi L d\xi \end{bmatrix} \quad (52)$$

ここで、材端部から常に降伏すると仮定し ($g_{(q)}^p \xi_{k(r)}^s = g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^s = \xi_{kk}$)、一般化塑性進展パラメータ $g_{(r)}^p$ が非零である領域が塑性負荷領域となることから、 $g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^e$ は次式を満足する。

$$g_{(q+1)}^p \lambda_{0k(r)} + g_{(q+1)}^p \lambda_{1k(r)} g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^e = 0 \quad (53)$$

$g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^p = \left| g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^e - g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^s \right|$ に、式(51)と式(53)を代入すれば、段階 $q+1$ における塑性負荷領域は、以下のように求められる。

$$g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^p = g_{(q)}^p \lambda_{k(r)} g_{(q)}^p \xi_{k(r)}^p, \quad g_{(q)}^p \lambda_{k(r)} = \frac{2 g_{(q)}^p \xi_{k(r)}^p g_{(q+1)}^p A_{k(r)}^p - 3 \left| g_{(q+1)}^p A_{k(r)}^p \right|}{3 g_{(q)}^p \xi_{k(r)}^p g_{(q+1)}^p A_{k(r)}^p - 6 \left| g_{(q+1)}^p A_{k(r)}^p \right|} \quad (54a, b)$$

$$g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^e = \xi_{kk} + \frac{1}{2} g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^p, \quad g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^e = \xi_{kk} - \frac{1}{2} g_{(q+1)}^p \xi_{k(r)}^p \quad (54c, d)$$

ただし、塑性負荷領域を修正することにより、それに伴う新たな塑性散逸が発生することに注意しなければならない (Fig. 4(b) の網掛け領域)。そこで、再度 $g_{(q+1)}^p A_{k(r)} = g_{(q+1)}^p L_{k(r)}^{-1} g_{(q+1)}^p \lambda_{k(r)}$ により $g_{(q+1)}^p A_{k(r)}^p, g_{(q+1)}^p A_{k(r)}^u$ を更新する。すなわち、

$$g_{(q+1)}^p A_{k(r)} = g_{(q+1)}^p L_{k(r)}^{-1} g_{(q+1)}^p \lambda_{k(r)} g_{(q+1)}^p A_{k(r)} \quad (55)$$

繰返し载荷の場合には、弾性除荷時の状態量 ${}^{pre}(\quad)$ を記憶してお

Fig. 4 Update procedure of plastic region in case of monotonic loading

き、式(53)の代わりに次式を用いる。

$$_{(q+1)}^r \lambda_{0(r)} + _{(q+1)}^r \lambda_{1(r)} _{(q+1)}^r \xi_{k(r)}^p = {}^{pre} g_{(r)}^p(\xi) \Big|_{\xi = _{(q+1)}^r \xi_{k(r)}^p} \quad (56)$$

$g_{(r)}^p$ が直線状に分布するのに対して、一般に ${}^{pre} g_{(r)}^p$ は降伏を繰り返すに従い直線分布から乱れるが、大局的には ${}^{pre} g_{(r)}^p$ は直線とよく近似できるものと仮定する。この考えに基づいて、式(54a)の $_{(q)}^r A_{k(r)}$ を $(_{(q)}^r A_{k(r)} - {}^{pre} A_{k(r)})$ で置き換えることにより、次式で塑性荷重領域および塑性進展パラメータの更新をおこなう。

$$_{(q)}^r \chi_{k(r)} = \frac{2 _{(q)}^r \xi_{k(r)}^p (_{(q+1)}^r A_{k(r)}^p - {}^{pre} A_{k(r)}^p) - 3 \left| _{(q+1)}^r A_{k(r)}^p - {}^{pre} A_{k(r)}^p \right|}{3 _{(q)}^r \xi_{k(r)}^p (_{(q+1)}^r A_{k(r)}^p - {}^{pre} A_{k(r)}^p) - 6 \left| _{(q+1)}^r A_{k(r)}^p - {}^{pre} A_{k(r)}^p \right|} \quad (57a)$$

$$_{(q+1)}^{t+\Delta t} A_{k(r)} = _{(q+1)}^{t+\Delta t} L_{k(r)}^{-1} \left(_{(q)}^{t+\Delta t} L_{k(r)} \left(_{(q+1)}^{t+\Delta t} A_{k(r)} - {}^{pre} A_{k(r)} \right) + {}^{pre} A_{k(r)} \right) \quad (57b)$$

4. 2 塑性荷重領域の計算手順

節点力の計算は、Return Mapping Algorithm に準ずるが、塑性荷重領域の計算、荷重除荷重についての幾つかの注意点を述べておく。

(既知量) 時刻 $t = t$ の諸量および ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$

(未知量) ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ を除く時刻 $t = t + \Delta t$ の諸量

左上付添え字は時刻を表わす。まず弾性予測子を実行し、降伏関数値により (仮の) 降伏判定をおこなう。active な線素の集合を求め、塑性荷重条件から、最終的に解くべき非線形方程式を Newton 法による収斂計算で解く。収斂回数 $q \geq 0$ の時の各変数を $_{(q)}^r ()$ で表記し (ただし、 $_{(0)}^r () = {}^r ()$)、解くべき方程式は以下となる。

$$\sum_{i \in \text{inactive}} \sum_{j \in \text{active}} _{(q)}^r G_{kl(rs)} \delta A_{l(rs)} = _{(q)}^r \phi_{k(r)} \quad \text{for } k(r) \in \text{active} \quad (58)$$

塑性進展パラメータ $\delta A_{k(r)}$ を求めた後、 $_{(q+1)}^r A_{k(r)} = _{(q)}^r A_{k(r)} + \delta A_{k(r)}$ により更新をおこない、その他の各状態量も同様に更新する。ただし、 $_{(q+1)}^r A^p \geq 0$ となる場合には、すべての計算結果を破棄し、この参照点を non-active とし、さらにこの塑性領域長を零として再計算する。式(57)により塑性荷重領域および塑性進展パラメータを修正した後、再び降伏関数値を計算し、結果を以下の場合に分類する。

Case 1: $_{(q)}^r \phi_{k(r)} \geq 0$, $_{(q+1)}^r \phi_{k(r)} \geq 0$ (整合過程)

Case 2: $_{(q)}^r \phi_{k(r)} < 0$, $_{(q+1)}^r \phi_{k(r)} < 0$ (整合過程)

Case 3: $_{(q)}^r \phi_{k(r)} \geq 0$, $_{(q+1)}^r \phi_{k(r)} < 0$ (非整合過程)

Case 4: $_{(q)}^r \phi_{k(r)} < 0$, $_{(q+1)}^r \phi_{k(r)} \geq 0$ (整合過程)

Case 1, 2 の場合には、収斂計算を続行する。Case 3 の場合は整合過程で無いので、すべての計算結果を破棄し、この参照点を non-active とし、この塑性領域長を零として再計算する。ただし、Case 4 の場合に非整合過程として、計算結果を破棄し再計算すると、収斂計算過程において Case 3 と Case 4 が循環することがあるため、Case 4 については整合過程として取り扱う。

5. 数値計算例

本梁モデルの基本概念およびその基礎方程式の妥当性を確認するために、 $\square 400 \times 400 \times 22$ 、材長 $L = 3500 [\text{mm}]$ を有する単純梁モデルを解析対象として数値計算をおこなう。3 次梁要素 (Discrete model) を厳密解と想定し、本梁モデル (Proposed model) との比較をおこなう。Discrete model では単純梁を 40 の梁要素に分割し、Proposed model は Fig. 5 に示すように各板要素を 4 本の線素でモデル化し、一要素で解析をおこなう。両解析ともせん断変形を無視し、用いる材料定数は $E = 2.05 \times 10^5 [\text{N/mm}^2]$, $E/E^K = 50$, $E/E' = 200$ とし、両解析手法とも共通とする。逆対称曲げで Fig. 6 で示す節点の変位経路を増分的に与え、軸力については節点の回転角に比例するような伸縮量を強制変位で与えることにより制御する。応力積分は、両解法とも Return mapping algorithm¹³⁾ によるものとする。

Fig. 7~9 に数値計算結果を示す。Fig. 8 には材端力空間の釣り合い経路を示してあり、灰色の領域は初期許容空間である。①から②に至る段階で Case 3 の非整合過程が発生したが、いずれも数回の収斂計算の後に収束した。なお、Discrete model においても同一収斂計算過程における荷重仮定計算後の弾性除荷が同様に見られた。Fig. 9 には材端力と材端変位の関係を示してあり、縦軸は全塑性耐力、横軸は全塑性耐力時の弾性変位 (Fig. 6) で無次元化されている。両解法は、処女降伏後の部分的降伏状態の挙動および全塑性状態に達した後のひずみ硬化挙動ともに良く一致している。ただし、再降伏後に、特に軸力比が大きくなるにつれて若干の差異が見られるが、これは Discrete model では材軸方向に渡る降伏応力の分布が複雑になり、Proposed model ではこれを直線近似しているためである。Fig. 7 は散逸エネルギーの時間変化であり、Discrete model では各積分点の散逸エネルギーを体積積分して求めている。荷重変位関係においては繰り返し時の挙動の差異が若干見られるものの、塑性散逸エネルギーとしてみると、この違いは僅かであり、本提案モデルは実用上十分な精度を有しているといえる。また、軸力が降伏軸力に近く塑性荷重領域が梁全域に広がる場合においても、梁の中間荷重が無い場合には、一要素にて精度良く解析できることが解る。また、紙面では割愛するが、幾つかの数値計算例題により、梁モデルが実用上、十分な精度を有していることを確認している。

Fig. 5 Modeling of cross section Fig. 6 Nodal displacement path

Fig. 7 Total dissipative energy

(Symbol: proposed model, Line: Discrete model)

Fig. 8 Equilibrium path in nodal force space

(Symbol: proposed model, Line: Discrete model)

Fig. 9 Load-displacement curve

6. まとめ

バイリニアの応力-ひずみ関係に限定して、軸力と2軸の曲げが連成する線素からなる梁柱部材の基礎方程式を誘導し、3次元な塑性領域の広がりを扱うことの可能な塑性論によるマクロモデルを構築した。得られた結論を以下に要約する。

- (1) 梁内部に塑性変形が生じていれば、その影響により、梁端部が弾性的場合にも、その要素端部の節点には塑性回転が生じる。
- (2) Multi-surfaceで構成される降伏曲面のうち、塑性負荷にある降伏線のみならず、断面内の応力再配分により、弾性除荷にある降伏線も含め、全ての降伏線が移動する。
- (3) 梁内部の変位を弾性成分と塑性成分に分離し、それぞれの成分について変位関数を設定する手法を提案した。
- (4) 塑性領域の大きさを変数として導入することにより、ひずみ硬化に対して、応力-ひずみ関係と節点力-節点変位（あるいは材端力-材端変位）関係における硬化係数に整合性を有するモデルを構築した。
- (5) 塑性進展パラメータを用いて梁内部の状態量を微細に評価することなく塑性負荷領域を算定することが可能である。

本研究は、設計現場にて実用に耐えうる構造解析システムの構築を最終目的としており、今後は、ここでは対象外とした鋼材のパウシンガー効果、局部座屈の考慮などの課題をクリアしていく予定である。

謝辞

本研究は(独)防災科学技術研究所が進める「実大三次元震動破壊実験施設 (E-ディフェンス) を活用した国内外共同モデル研究 鉄骨造建物実験研究」の援助にて実施しました。ここに記し謝意を表します。

参考文献

- 1) 大塚貴弘、元結正次郎、金子健作: 弾塑性座屈および局部座屈を考慮したH形鋼トラス要素モデル, 日本建築学会大会学術講演梗概集(近畿), B-1分冊, pp.391-392, 2005
- 2) W. McGuire: Spread of plasticity: Quasi-Plastic-Hinge Approach, ASCE, Journal of Structural Eng., Vol. 120, No.8, pp.2451~2473, 1984
- 3) 花井正実: 繰返し荷重を受ける鋼構造骨組の弾塑性解析, 日本建築学会論文報告集, No.214, pp.29~33, 1973.12
- 4) 井上一朗, 小川厚治: 鋼構造筋違付多層骨組の塑性設計に関する研究: その2. 塑性設計架構の弾塑性応答性状に関する考察, 日本建築学会論文報告集, No.268, pp.87~98, 1978.6
- 5) W.F. Chen and S.E. Kim: LRFD Steel Design Using Advanced Analysis, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997
- 6) S.I. Hilmy and J.F. Abel: Material and Geometric Nonlinear Dynamic Analysis of Steel Frames Using Computer Graphics, Computer & Structures, Vol.21, No.4, pp.825~840, 1985
- 7) Shifted Integration Technique in One-Dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements, Int. J. for Num. Meth. in Engin., 31, pp.1537-1552, 1991
- 8) 元結正次郎, 白奇烈, 金子健作: ひずみ硬化および塑性領域長を考慮した弾塑性梁要素に関する一考察 一単調載荷の場合一, 日本建築学会構造系論文集, No.563, pp.99~106, 2003.1
- 9) 元結正次郎, 三明雅幸, 羽田浩二, 竹内義高: ひずみ硬化および塑性領域長を考慮した弾塑性梁要素に関する一考察 一繰返し載荷を受ける一, 日本建築学会構造系論文集, No.568, pp.107~113, 2003.6
- 10) 元結正次郎, 金子健作: 部分的降伏およびひずみ硬化を考慮した一般化塑性ヒンジモデル, 日本建築学会構造系論文集, No.607, pp.87~95, 2006.9
- 11) Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Vol. 2: M. A. Crisfield, Wiley, 1997
- 12) W.T.Koiter: Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variation Theorems for Elastic-Plastic Materials with a Singular Yield Surface, Quart. Appl. Math., Vol.11, No.3, pp.350-354, 1953
- 13) M. Ortiz and J.C. Simo: An Analysis of a New Class of Integration Algorithm for Elastoplastic Constitutive Relations, Int. J. Num. Mech., Vol.23, pp.353-366, 1986

(2007年5月10日原稿受理, 2007年10月9日採用決定)