解の存在条件に基づく構造解析

釣合幾何から初期幾何と応力を求める

STRUCTURAL ANALYSIS BASED ON CONDITION FOR EXISTENCE OF SOLUTION

Decision of initial shape and stress from equilibrium shape

田波 徹行*

Tetsu-yuki TANAMI

A mixed-type finite deformation analysis is theoretically carried out by putting the equilibrium shape as known constant. The equilibrium shape is assumed as such one that the condition for the existence of the solution of the equilibrium equation is satisfied under the predicted load. One variable in this case is the self-stress components which are included in the stress distribution of the equilibrium shape. Another is the initial geometrical shape before loading. As application, the finding of the initial geometry of cable structures is also presented. The mixed-type infinitesimal deformation linear analysis is shown in the appendix in order to help the fundamental ideas including the nonlinear problem in this paper. The analysis is supported by using the some mathematical properties of the Moore-Penrose generalized inverse.

Keywords : *Mixed-type finite deformation analysis, Self-stress, Continuity and discontinuity of topology, Condition for existence of solution, Moore-Penrose generalized inverse*

混合法的有限変位解析、自己応力、適合と分断、解の存在条件、ムーア・ペンローズ一般逆行列、

1. はじめに

通常の建築構造解析を行う上で、相性もよく、必然の如く用いられている正則条件は、一つの数学上の制約条件であり、力学原理のように本質的なものではない。解の存在をこの正則条件に頼らず、剛体変位を誘発するかしないかにより判断することで、不安定を含む全ての構造物を対象にした構造解析が、文献[1]と[2]である。ムーア・ペンローズ一般逆行列（以下では単に一般逆行列と記す）の利用が前提であり、そこで得た結果の幾つかを振り返っておく。

文献[1]では、解の存在条件を満たすとき、微小変位仮定範囲の解析では、応力法の解が陽な形で表現できることを示し、同じ文献で提案した変位法の解との一致を示した。解の存在条件を満たさないときの有限剛体変位解析にも言及している。微小変位の範囲で解の存在条件を満たさない場合にも対応できる有限弾性変位解析（以下では単に有限変位解析と記す）を文献[2]の中で試みた。そこでは、力学的な量である不釣合力（のモード）を直接更新することで解、すなわち、釣合幾何と発生応力を得ている。以上で、全ての構造に対応する基本的な構造解析は可能と考えている。ただし、そこでの解析の場合、構造解析に利用する設計図面上の幾何は、無荷重時のもの（以下では、「初期幾何」と記す）であり、荷重を受けた状態で実在する「釣合幾何」との間には僅かなずれが許容されている。

この釣合幾何と初期幾何の区別が必要な構造物を設計する機会は、

まれであろう。しかし、現実には、無荷重時の初期幾何でなく釣合幾何として構造物は実在している。この実在する釣合幾何を解析上の既知量とすることは、自然である。

本論文は、このずれを解消するためのものである。すなわち、実在する釣合幾何を設計図面上の幾何にするときの、有限変位範囲での構造解析である。なお、一般逆行列を利用する式の説明を単純にするため、本論で具体的に扱う構造物としては、平面トラス構造と自己応力で釣合状態にある平面ケーブル構造に限定するが、本質的な考え方は、解の存在条件を満たすとき、他の構造に対して有効である。

一般逆行列とその構造解析への応用に関する知識は、例えば、文献[3][4][5]から学べる。形態解析に関する文献[6]では、一般逆行列を用いた Newton-Raphson 法の数値計算を利用している。本論文においても、その利用が前提である。

2. 本解析の説明

(a) 初期幾何

(b) 軸力と変位

図1 微小変位解析

* 工博

Dr. Eng.

例えば、3部材2自由度の平面トラス構造に対する微小変位仮定による解析のイメージは、図1のようになる。

図1(a)は、荷重を受ける前の初期幾何である。同図(b)は、下向きの荷重を受けるときの、初期幾何上で成立する釣合軸力を矢印で示し、初期幾何からの変位を点線で示している。

次に、有限変位解析で得られる解のイメージを図2に示す。

図2 有限変位解

有限変位解析と微小変位解析の違いは、図2と図1(b)で示した様に、生じる軸力が、前者は、変形後の釣合幾何に対して得られるが、後者では、初期幾何に対するものであることを確認しておく。

図1と図2の表現を利用して、本論の解析の立場を、図3に示す。

(a) 釣合幾何上の軸力 (b) 初期幾何

図3 本論の有限変位解析

図3(a)は、荷重下で実在する釣合幾何を知りとして作図し、その幾何上に生じる未知の釣合軸力を矢印で示している。図3(b)は、(a)の釣合幾何を得るために必要となる無荷重時の未知の初期幾何を点線でイメージしている。

すなわち、本論文の解析とは、一つの有限変位解析であり、その既知量は、釣合幾何であり、未知量は、釣合幾何に生じる軸力と初期幾何である。

3. 本解析

3.1 式と記号の説明

微小変位仮定での基礎式を利用して、本論文で用いる式や記号の説明をしておく。

適合式、構成式と釣合式を(1)~(3)式で表現する。

$$Au = \varepsilon, E\varepsilon = \sigma, B\sigma = f \quad (1)(2)(3)$$

トラス構造のとき、 u 、 ε 、 σ と f は、それぞれ変位、伸び、軸力と荷重ベクトルに対応する。 m を部材数、 n を変位の自由度数とすれば、釣合行列 B は、 n 行 m 列を表す (n, m) 行列であり、適合行列 A は (m, n) 行列になる。このとき、構成行列 E は (m, m) 行列である。適合行列 A の転置が釣合行列 B であり、 $B^t = A$ が成立する。すなわち、微小変位仮定での解析では、この A と B は共に、荷重の作用する前の初期幾何の節点座標から得られるものであり、図1(b)の様に、初期幾何で力の釣合が成立する。

一方、本解析では、釣合幾何で(3)式が成立することになる。

3.2 構成行列の要素

トラス構造では、構成行列は対角成分以外が零になる。ここでは、

構成式(2)の i 番目の対角成分、すなわち、部材番号 i に対応する部材の構成式を示しておく。

$$N_i = E_i A_i \frac{l_i - L_i}{L_i} \quad (4)$$

工学ひずみであり、伸びの無い初期幾何での部材長さを L_i 、荷重下の釣合幾何での部材長さを l_i 、そのときの i 部材の軸力を N_i で表現している。その断面積 A_i とヤング率 E_i は定数とする。

よって、上式の中で既知量は、 A_i 、 E_i と L_i であり、求めたい未知量は N_i と l_i である。通常、この初期部材長さ L_i は、節点座標 x の関数であり、次式で表せる。

$$L_i = L_i(x) \quad (5)$$

3.3 解の存在条件

図3(a)で示した釣合幾何は、図面上の形であり、既知量である。よって、この釣合幾何から得られる釣合行列 B は、定数で与えることができる。本解析の解の存在条件は、この釣合幾何が存在することであり、(3)式から、次式で与えることができる。

$$(I_n - BB^t)f = 0 \quad (6)$$

上式は、釣合幾何は、受ける荷重のもとで剛体変位を誘発しないことを意味する。直感的にも、分かり易い条件である。

3.4 初期幾何

(1)式の適合条件は、変形の連続条件である。この条件は、初期幾何を知りとする解析には必須の条件である。ただし、釣合幾何を知りとする本解析では、変形後の連続性は自明である。そして、連続条件を初期幾何を満たすことに意味はあるが、必須では無い。ここでは、初期幾何を得る上での選択肢について触れておく。

3.4.1 位相適合

図3(b)に、求めるべき初期幾何を点線で示した。この初期幾何は、釣合幾何(同図中の実線)と同じ接続関係である。この関係を、「位相適合」な初期幾何と呼ぶことにする。(5)式は、位相適合に対応する関係式で、このとき、初期幾何としての未知量は節点座標 x である。位相適合の場合には、 x を得ることで、初期幾何においても、連続したスムーズな接続関係を持つ初期部材長さ $L(x)$ を得たことになる。

3.4.2 位相分断

(a) 自己釣合幾何上の軸力 (b1) 全部材の分断

(b2) 一部部材の分断 (c) 支持節点での分断

図4 自己釣合トラス構造における分断

位相適合以外に、分断による位相の非適合を意味する「位相分断」を考慮できる。この分断で生成できる初期幾何の例を図4に

示す。図4(a)は、自己応力による釣合幾何である。ケーブル構造が具体例である。この張力構造では、位相適合する初期幾何は存在しない。初期幾何を得るためには、図4(b)に示した例のように、位相の分断が必要である。分断による初期幾何では、求めたい未知量(独立変数)が(b1)の様に、全ての部材に対する部材長さ L や、(b2)の様に、一部の部材の部材長さ L と連結を保つ残りの部材間の節点座標 x になる。更には、図4(c)の様に、支持節点を分断し自由節点で置き換え、支持反力を荷重として、この新しい節点に与えれば釣合は保たれる。この新しい構造の釣合幾何に対応する初期幾何を得る解析も本論文の解析対象である。なお、位相を分断する場合、その分断位置の応力の特定が必要になる。この応力の特定については、3.6節で示す。

3.5 位相適合の最小長さ制約

位相適合としての解析は制約を伴う。例えば、分断の一例ではあるが、図4(b2)中の2部材は、まだ繋がっており、部分的には位相適合として扱える。が、この2部材は、繋がることで最小長さが制約条件として存在する。一方、図4(b1)は、全てが、単独の部材に分断されているので、位相適合時のその制約は無い。

3.6 分断に伴う既知応力

分断は、初期幾何における位相の非適合を許容することである。この分断で部材に生じる軸力は、(7)式で特定できる。釣合幾何で成立する釣合式(3)から得られる特解であり、既知量である。

$$\sigma_0 = B^- f \quad (7)$$

他にも、微小変位の範囲で得られる応力解を使うこともできる。付録中の(A16)式であり、ここに、記述して置く。すなわち、

$$\sigma_0 = S(BS)^- f \quad (8)$$

前者は、存在し得る自己応力の成分を零にしたときの解であり、非適合を許容する分断には、合理的である。後者は、微小変位の範囲での適合解である。

分断すれば、初期幾何の適合性を、通常、損なうことになるが、張力構造に対する分断は、図4で示した例の様に、多くの場合に必要である。また、不静定安定構造の場合でも、例えば、釣合幾何に内在可能な自己応力の成分を零にして置く設計上の要求があれば、分断することで、その要求に対応できる。(7)式で応力を特定し、その応力から部材長さを定める解法である。この方法で、内在可能な自己応力の成分を零にしておけば、釣合幾何に生じる応力ベクトルの大きさ $|B^- f|$ は、最小な状態であり、その分、温度応力等に対する変動する自己応力の許容量を増すことが期待できる。長さを調整できる部材の配置や所定の位置まで支持節点の移動等、施工上の工夫を伴うが、分断は、応力設計の一つの選択肢になり得る。

3.7 解析

ここでは、位相適合に対する解析と分断にかかわる特徴的な場合の解析を示す。

3.7.1 不静定安定構造

まずは、位相適合に対する解析として不静定安定構造を扱う。

(3)式の釣合式から軸力を次式で与えておく。

$$\sigma(\beta) = B^- f + (I_m - B^- B) \beta \quad (9)$$

(m, m) 行列 B は常に、既知量で、かつ不変である。この行列 B は、不静定安定構造のとき、フルランクであり、 $\text{rank}(B) = n < m$ の関係から、 $B^- = B^+ (BB^+)^{-1}$ が成立する。 β は、未知の m 次元ベ

クトルである。右辺第2項の余解に内在する独立な自己応力モードの数 N_s は、 $N_s = m - n$ である。

位相適合する初期幾何 $L(x)$ を考える。このとき、(2)式の構成式は、例えば、(4)式を用いて、部材番号 i に対応する軸力で表すと、次の様になる。

$$\sigma_i(x) = N_i(x) = E_i A_i \frac{l_i - L_i(x)}{L_i(x)} \quad (10)$$

上式に対応する、全部材での表現式を次式で表す。

$$\sigma(x) = (EA)_0 \left(\frac{I_0}{L(x)} - 1 \right) \quad (11)$$

(9)式と(11)式から、次の非線形方程式を得る。

$$g(x, \beta) = \sigma(x) - \sigma(\beta) = 0 \quad (12)$$

上式の解 x と β が求まれば、 β を(9)式に代入して釣合幾何での応力が得られ、 x と(5)式から、初期幾何と部材長さを特定できる。

この混合的な問題に対する数値解析には、Newton-Raphson法による収束計算を用いる。すなわち、 x と β に代えて、(12)式は、 $x + \Delta x$ と $\beta + \Delta \beta$ のときに成立するとして、テラー展開を施せば次式を得る。

$$G \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \beta \end{pmatrix} = (-g) \quad (13)$$

ただし、

$$G = [G_x : G_\beta] = \left[\frac{\partial g}{\partial x} : \frac{\partial g}{\partial \beta} \right], \quad G_\beta = \frac{\partial g}{\partial \beta} = -(I_m - B^- B) \quad (14)(15)$$

(13)式の連立方程式の式の数、部材数に等しく m である。その連立式に含まれる変数の内、変数 Δx の総数 n は、全て独立変数である。変数 $\Delta \beta$ の総数 m の内で、独立変数の数は、独立な自己応力モードの数 N_s である。このとき、(13)式の収束計算には、係数行列 G の扱い方により、次の3通りを示すことができる。

(i) β の総数 m を変数として利用する場合

行列 G は、フルランクの ($m, n+m$) 長方形行列であり、次式を繰り返すことになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix} + G^- (-g) \quad (16)$$

このとき、 $G^- = G^+ (GG^+)^{-1}$ が成立する。この G^- は、釣合行列 B が、フルランク行列を条件に成立するのではなく、常に成立する。

(付録中、(A23)式に続く行を参照。) また、(16)式の数値計算では、(13)式の余解を省く。(微小変位を前提にするが、付録中、(A20)式から(A25)式に至る展開を、この余解省略の根拠とする。)

(ii) 独立な自己応力モードを抽出する場合

収束解は、次式を繰り返すことで得られる。

$$\begin{pmatrix} x \\ \beta' \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x \\ \beta' \end{pmatrix} + (G')^{-1} (-g') \quad (17)$$

このとき、 $G' = [G_x : G_\beta']$ は、(m, m) 正則行列であり、 G_β' は、 G_β に含まれる、 N_s 個の独立な自己応力モードから成る。 β' は、この G_β' に対応する ($m-n$) 次元ベクトル。このとき、(12)式中の g は、 $g' = g'(x, \beta')$ になる。

(iii) β の係数 $(I_m - B^- B)$ の性質を利用する場合

$-G_\beta = (I_m - B^- B)$ は、直交射影行列であり、 $G_\beta^- = G_\beta$ である。かつ、解析時に不変の既知行列である。この性質を利用すれば、逆行列の演算負荷を減らす意味で、次式の繰り返しから、収束解を得る方法が考えられる。

$$\beta \leftarrow \beta + G_{\beta}^{-}(-g) = \beta - (I_m - B^{-}B)(-g) \quad (18)$$

$$x \leftarrow x + G_x^{-}(-g) \quad (19)$$

ただし、 $G_x^{-} = (G_x' G_x)^{-1} G_x'$ である。

β を更新し、 g を書き換え、次に、 x を更新し、 g を書き換える。この操作を繰り返す方法である。

3.7.2 静定安定構造

自己応力は内在しない。故に、もし、初期幾何を位相適合とすれば、変数は x になり、全ての部材を分断として扱えば、変数は L である。

$m=n$ であり、軸力は、(7)式か(8)式のどちらからでも、次式を得る。

$$\sigma_o = B^{-1}f \quad (20)$$

このとき、(12)式に代えて、次の非線形方程式を得る。

$$g(x) = \sigma(x) - \sigma_o = 0 \quad (21)$$

このとき、次式を得る。

$$G_x \Delta x = -g \quad (22)$$

上式の G_x は、正則行列であり、収束計算は次式である。

$$x \leftarrow x + G_x^{-1}(-g) \quad (23)$$

以上では、節点座標 x を独立変数扱いしたが、変数を部材 L とすれば、(4)式の部材番号 i に対応する構成式は、次式で表せる。

$$E_i A_i \frac{l_i - L_i}{L_i} = (\sigma_o)_i \quad (24)$$

ゆえに、部材番号 i の初期部材長さ L_i は、次式から得られる。

$$L_i = \frac{E_i A_i l_i}{E_i A_i + (\sigma_o)_i} \quad (25)$$

または、この L を変数とする数値計算は、(24)式と(25)式に代えて、次式に対する収束計算から行うこともできる。

$$G_L \Delta L = -g(L) \quad (26)$$

$$g(L) = \sigma(L) - \sigma_o = 0 \quad (27)$$

ただし、 $G_L = \partial g(L) / \partial L$ 。 ΔL は、 L の増分である。

3.7.3 自己応力の内在する構造

自己応力が内在する構造の場合、3.7.1節の不静定安定構造を含め、その初期幾何に対する位相適合の扱いとしては、全ての節点で位相適合にするか、部分的に位相適合にするのかの選択が可能である。後者の解析では、位相適合にする節点部分と残りの分断の部分とを独立した構造と見なして、別々に解析できるが、(12)式と(26)式を併せた次式の様な扱いでもよい。

$$g'(x', L', \beta) = \sigma'(x', L') - \sigma(\beta) = 0 \quad (28)$$

上式の変数中、 x' は、自己応力モードにかかわる部分的に位相適合する節点座標であり、 L' は、分断により独立した部材に対応している。 $\sigma(\beta)$ に変更は無い。後の計算は、3.7.1節で示した考え方を利用すればよい。

4. 例題

4.1 初期幾何の第一近似

本解析では、初期幾何の第一近似として、既知である釣合幾何上に与えられる荷重を逆向きにして得られる微小変位仮定で得た変位解を利用する。すなわち、付録中 (A15)式に当たる次式である。

$$u = ((BS)^{-1})(BS)^{-1}(-f) \quad (29)$$

この時点での g 値の計算に用いる β の初期値は零とする。

4.2 例題 1

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad I - B^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

図5 3部材平面トラス構造

図5は、平行に配した1, 3番部材と鉛直の2番部材から成る単純な不静定安定構造である。例題1として、与えられた荷重下で、この釣合幾何に生じる軸力と位相適合する初期幾何を求めることにする。

数値計算には、3.7.1節中の(iii)を用いる。このとき、 G_x は(3,2)フルランク行列、 G_{β} は1つの独立な自己応力モードを持つフルランク1の(3,3)直交射影行列である。この数値計算で不変な釣合行列 B と構成行列 E にかかわる行列 S の成分を同図に記しておく。

釣合幾何での部材長さを $l_1 = l_3 = 2$ 、 $l_2 = 1$ とし、釣合幾何の自由節点座標を(2,1)とする。また、断面積 A_i とヤング率 E_i の積を $E_i A_i = E_o A_o = 1$ とする。この場合、単位荷重は、実際の $E_o A_o$ 値を意味する。荷重を $f_x = f_y = 0.5$ とする。

このとき、(29)式から得た初期幾何の自由節点座標の第一近似は(1.5, 0.5)であり、繰り返し数3回までに得た $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ と $x = (x_1, y_1)$ の収束状況は、それぞれ、次の通りであった。

1回目 (0.0246878, 0., 0.0246878)と(1.46169, 0.401965)

2回目 (0.0166549, 0., 0.0166549)と(1.45842, 0.389249)

3回目 (0.0150194, 0., 0.0150194)と(1.45796, 0.388157)

微小変位仮定の範囲では、このトラスに関しては、構造上、自己応力は内在するものの、その成分は常に零、すなわち、 $\beta = 0$ になるが、有限変位解析の結果では、その成分を少し生じている。

3回の繰り返し後の部材長さ L と軸力 σ は、それぞれ、次の通りであった。

$$L = (1.58115, 0.666682, 2.61463)$$

$$\sigma = (0.264905, 0.499966, -0.235073)$$

図6 位相適合による初期幾何

結果として得られた初期幾何を図6中の太線で示す。図中×印は初期幾何の第一近似位置を示す。

部材1と2の支持節点を結ぶ直線(図中の点線)は、位相適合解を得るための制約線になる。すなわち、もう少し荷重を増やすと、解はこの線上に乗り、それ以上大きな荷重に対しては、位相適合解は、もはや存在できない。ただし、その荷重に対しても、分断による解を得ることはできる。例えば、次の例題である。

結果として、(A6)と(A8)式の二つの解の存在条件を考慮することで、(A7)式の変位と(A4)式の σ' は、(A9)式の σ' と(A10)式の ε' と同様に、 β' の関数として、次式で表現できる。

$$u = ((BS)')^{-1} (BS)^{-1} (BS) \beta' \quad (A11)$$

$$\sigma' = (BS)^{-1} (BS) \beta' \quad (A12)$$

今、(A9)式と(A12)式から、

$$(2(BS)^{-1} (BS) - I_m) \beta' = (BS)^{-1} f \quad (A13)$$

このとき、 $(2(BS)^{-1} (BS) - I_m)^2 = I_m$ より、 β' の係数は、この係数の一般逆行列に等しい。ゆえに、(A13)式の解は、

$$\beta' = (2(BS)^{-1} (BS) - I_m) (BS)^{-1} f + (I_m - (2(BS)^{-1} (BS) - I_m)^2) \beta'' = (BS)^{-1} f \quad (A14)$$

(A14)式の β' から、変位は(A11)式、 σ は、例えば、(A1)と(A12)式から、 ε は、(A2)と(A10)式等から得られる。すなわち、

$$u = ((BS)')^{-1} (BS)^{-1} (BS) (BS)^{-1} f = ((BS)^{-1})' (BS)^{-1} f \quad (A15)$$

$$\sigma = S \sigma' = S (BS)^{-1} (BS) (BS)^{-1} f = S (BS)^{-1} f \quad (A16)$$

$$\varepsilon = S \varepsilon' = S (S' S)^{-1} (BS)^{-1} (BS) (BS)^{-1} f = (S^{-1})' (BS)^{-1} f \quad (A17)$$

以上の式の展開では、適合式と釣合式、それぞれの解の存在条件を考慮することで、未知量 u 、 ε と σ を、全て変数 β' の関数により表現した。

次に、変位 u と自己応力にかかわる β' を共に変数とする、混合合法的な解析を示す。

まず、(A3)式と(A4)式から、

$$(BS)' u = \sigma' \quad (A18)$$

このとき、(A18)式と(A9)式から次式を得る。

$$(BS)' u - (I_m - (BS)^{-1} (BS)) \beta' = (BS)^{-1} f \quad (A19)$$

(A19)式を次式で表現する。

$$G \begin{Bmatrix} u \\ \beta' \end{Bmatrix} = (BS)^{-1} f \quad (A20)$$

このとき、(A20)式の解は、

$$\begin{Bmatrix} u \\ \beta' \end{Bmatrix} = G^{-1} (BS)^{-1} f + (I_{n+m} - G^{-1} G) \begin{Bmatrix} \gamma_u \\ \gamma_\beta \end{Bmatrix} \quad (A21)$$

$$\text{ただし、} G = [(BS)' : -(I_m - (BS)^{-1} (BS))] \quad (A22)$$

この $(m, n+m)$ 行列 G に対する一般逆行列は、

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} (BS) ((BS)' (BS))^{-1} \\ -(I_m - (BS)^{-1} (BS)) \end{bmatrix} \quad (A23)$$

このとき、 $GG^{-1} = I_m$ が成立する。すなわち、任意の B 行列に対して、行列 G は、常に、フルランクである。

このとき、(A21)式の余解は、

$$(I_{n+m} - G^{-1} G) \begin{Bmatrix} \gamma_u \\ \gamma_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - (BS) (BS)^{-1} & 0 \\ 0 & (BS)^{-1} (BS) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_u \\ \gamma_\beta \end{Bmatrix} \quad (A24)$$

(A24)式から、まず、(A8)式で述べた釣合式の解の存在条件を考慮すれば、任意の γ_u に対して、 u の余解 $(I_n - (BS) (BS)^{-1}) \gamma_u$ は零である。また、 β' は、(A9)式から、行列 $(I_m - (BS)^{-1} (BS))$ にかかわる量であり、この行列に直交する余解の行列 $(BS)^{-1} (BS)$ から得られる量は零である。よって、(A21)式の余解を省く。その結果の解は次式である。

$$\begin{Bmatrix} u \\ \beta' \end{Bmatrix} = G^{-1} (BS)^{-1} f = \begin{Bmatrix} ((BS)^{-1})' (BS)^{-1} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A25)$$

すなわち、

$$\beta' = 0 \quad (A26)$$

(A26)式の結果と(A9)式と(A1)式から応力が得られる。この応力と(A25)式の変位は、(A16)式と(A15)に、それぞれ一致している。

最後に、 β' に対する(A14)式と(A26)式の値の違いに触れておく。この相違の原因は、(A10)式にある。今、変数を増やすことになるが、(A10)式を次式で置き換える。

$$S' S \varepsilon' = (BS)^{-1} (BS) \beta'_\varepsilon \quad (A27)$$

このとき、(A12)式に換えて、

$$\sigma' = (BS)^{-1} (BS) \beta'_\varepsilon \quad (A28)$$

このとき、(A13)式に変わる次式を得る。

$$(BS)^{-1} (BS) \beta'_\varepsilon - (I_m - (BS)^{-1} (BS)) \beta' = (BS)^{-1} f \quad (A29)$$

(A29)式を次式で表現する。

$$H \begin{Bmatrix} \beta'_\varepsilon \\ \beta' \end{Bmatrix} = (BS)^{-1} f \quad (A30)$$

$$\text{ただし、} H = [(BS)^{-1} (BS) : -(I_m - (BS)^{-1} (BS))] \quad (A31)$$

行列 H は、 $(m, 2m)$ のフルランク長方形行列である。

このとき、

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} (BS)^{-1} (BS) \\ -(I_m - (BS)^{-1} (BS)) \end{bmatrix} \quad (A32)$$

このとき、(A30)式の余解は、

$$(I_{m+m} - H^{-1} H) \begin{Bmatrix} \gamma_\varepsilon \\ \gamma_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - (BS)^{-1} (BS) & 0 \\ 0 & (BS)^{-1} (BS) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_\varepsilon \\ \gamma_\beta \end{Bmatrix} \quad (A33)$$

(A21)式の解の一つ、 β' を考える上で、(A24)式の余解の式の形から余解を省いた理由と同じ根拠で、(A30)式の解 β'_ε と β' においても、(A33)式の余解の式の形から、その余解を除くことになり、(A30)式の解は、次式になる。

$$\begin{Bmatrix} \beta'_\varepsilon \\ \beta' \end{Bmatrix} = H^{-1} (BS)^{-1} f = \begin{Bmatrix} (BS)^{-1} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A34)$$

すなわち、 β'_ε が(A14)式の β' である。

参考文献

- 1) 田波徹行：解の存在条件に基づく構造解析、日本建築学会構造系論文集、第547号、pp.91-96、2001.9
- 2) 田波徹行：解の存在条件に基づく構造解析（応力法と張力構造解析）、日本建築学会構造系論文集、第610号、pp.85-90、2006.12
- 3) 半谷裕彦：一般逆行列と構造解析への応用、第22回生研講習会テキスト（固体力学における非線形現象の数理科学）、pp.179-212、1983
- 4) 田中尚、半谷裕彦：不安定トラスの剛体変位と安定化条件、日本建築学会構造系論文報告集、第356号、pp.35-43、1985.10
- 5) 半谷裕彦、川口健一：形態解析（一般逆行列とその応用）、培風館、pp.21-35、1991
- 6) 半谷裕彦、関富玲：ホモロガス変形を制約条件とする立体トラス構造の形態解析、日本建築学会構造系論文報告集、第405号、pp.97-102、1989.11
- 7) 田波徹行、半谷裕彦：制約条件をもつ構造物の形態解析（一般逆行列を利用する場合の直接および間接解法）、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、14巻、pp.597-602、1990
- 8) 田波徹行：一般逆行列による形態解析、第49回理論応用力学講演会、日本学術会議メカニクス・構造研究連絡委員会、pp.357-358、2000.1

(2007年7月10日原稿受理、2007年12月11日採用決定)