圧縮を受ける円形鋼管短柱の塑性流れ域での安定性に関する研究 －象の足座屈における理論と実験事実の乖離－

A STUDY ON THE STABILITY OF CIRCULAR SECTION STEEL STUB-COLUMNS IN THE PLASTIC-FLOW REGION

－ Discrepancy between theory and experimental result for elephant-foot buckling －

井上 哲 郎*, 竹 端 陽 一**

Tetsuro INOUE and Yoichi TAKEHANA

Maximum stress obtained by compression test of circular steel stub-columns were compared with deformation theory and incremental stress-strain theory. Each buckling analysis has a term of tangent modulus E_t in its solution. Therefore these solutions are commonly considered that all specimens lose stability in the plastic-flow region. This paper shows that specimens with small diameter-to-thickness ratio can be compressed beyond plastic flow region by reconsidering past plastic theories.

Keywords : Circular section steel stub-column, plastic-flow region, elephant-foot buckling,
compression test, tangent modulus theory

円形鋼管短柱, 塑性流れ域, 象の足座屈, 圧縮実験, 接線係数理論

1. はじめに

圧縮を受ける円形鋼管短柱の塑性域における軸対称モードの座屈耐力について接線係数理論の立場から、特に塑性流れ域での安定性について考察する。塑性域での座屈問題を過去に扱った理論として変形理論と歪増分理論がある。しかしよく知られている変形理論解、歪増分理論解共に接線係数 E_t の項がかかっており、歪硬化域に達する前に塑性流れ域を経験するので、どんなに径厚比が小さくても固有効的には塑性流れ域に至ると $E_t = 0$ となってここで座屈してしまう。それにもかかわらず円形鋼管は径厚比が小さくなると、塑性流れ域に至るとただちに座屈せずに歪硬化域に達するような振る舞いを示すのは実験事実の示すところであり、理論との間に乖離が存在すると言わざるを得ない。そこで本研究では歪増分理論では塑性流れ域で、応力増分と歪増分との関係を非硬化材料に対する Reuss 方程式を適用する事から出発して表し、これが硬化材料の場合の一般式において $E_t \rightarrow 0$ の極限と一致することを確認した。この間の説明は (APPENDIX I) に示される。この一般式を用いて行った座屈解析の結果は既に他の研究者により明らかにされている。そこで得られている座屈耐力式は塑性流れ域においては E_t に 0 を代入すると発散する項が含まれているのでそのままでは使えない。しかし

$E_t \rightarrow 0$ の極限をとれば極限值が存在し、それは筆者が上述の Reuss の方程式からひも解いて求めた解と一致するのでこの一般式をそのまま引用し、これを元に議論を進めることとした。解析の結果上述の乖離を埋める新しい知見を得た。それは塑性流れ域では軸対称座屈耐力解は座屈半波長に反比例する形となり、塑性流れ域に至って耐力を全く失うのは無限に長い柱の場合である。又実験で観察される象の足モードのように短い半波長で座屈する軸対称座屈の場合は、例えば歪の戻りの無い条件下でも、径厚比によっては塑性流れ域で安定を失うことなく歪硬化域に達し得ることである。この知見は変形理論解についても同様である。

上記の理論は、降伏比と塑性流れ域の長さが異なる 3 種類のシリーズの熱間成形鋼管短柱の圧縮実験を行って検証した。

2. 歪増分理論、変形理論から導かれた理論座屈式

2.1 歪硬化域

釣り合い式として Donnell¹⁾ が円管のねじり座屈問題に対して提案した比較的簡素な式に基づき、この式を圧縮を受ける円管の、軸対称モード座屈の問題に適用し、変形理論に基づく解の一般形として下式が導かれている。この式はパラメータの値を適切に選ぶことに

* 筑波大学システム情報工学研究科 教授・工博

** 富山市役所 工修

Prof., Dept. of Engineering Mechanics and Energy, Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba, Dr. Eng.
Toyama City Office, M. Eng.

より、弾性座屈理論および歪増分理論に基づく座屈理論解をも含む統一的表现である²⁾。

$$\sigma_{cr} = \frac{2E}{\sqrt{3\{3\psi + 2 - 4\nu\}\lambda - (1 - 2\nu)^2}} \times \frac{t}{R} \quad (2.1)$$

$$L = \frac{\pi \sqrt{t \times R (\lambda + 3\psi)}}{2 \times \sqrt[4]{3\{3\psi + 2 - 4\nu\}\lambda - (1 - 2\nu)^2}} \quad (2.2)$$

ここに

σ_{cr} : 座屈応力度

$\lambda = E/E_t$

$\psi = E/E_s$

t : 管厚

ν : ポアソン比

R : 平均半径

L : 座屈半波長

E : ヤング率

E_t : 接線係数

E_s : 割線係数

(2.1)(2.2)式は長手方向に座屈半波長が L の $\sin$ 波形であると仮定して、微分方程式を解く過程で得られる下式を最小にする条件から得たものである。この時円管の軸方向の長さ（材長）が無限大であれば、 σ は π/L の連続関数と考えてよい。

$$\sigma_{cr} = \frac{I a_{11}}{t} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \frac{BE}{R^2 a_{11}} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \quad (2.3)$$

ここに

$$I = \frac{t^3}{12}$$

$$a_{11} = B \times \frac{\lambda + 3\psi}{4}$$

$$B = \frac{4E}{(3\psi + 2 - 4\nu)\lambda - (1 - 2\nu)^2}$$

こうして得た σ_{cr} のとり得る最小値は、塑性流れ域 ($E_t = 0$) 以外では(2.1), (2.2)式が適用される。この式から各パラメータに下記に示す場合に应じた値を代入することにより、各理論の座屈理論解が得られる。

(1) 弾性座屈理論解

この場合は $\lambda = \psi = 1$ を代入して下式のように得られる²⁾。

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \cdot \frac{t}{R} \quad (2.4)$$

(2) 変形理論に基づく座屈理論解

この場合は $\psi = E/E_s$ とし、塑性化が十分進行した後に局部座屈する場合、 λ, ψ の値は $(1 - 2\nu)$ より 1 オーダー大きい値となっており(2.1)式に材料の非圧縮性 ($\nu = 1/2$) を付加すると次式に漸近する^{2) 3) 4)}。

$$\sigma_{cr} = \frac{2}{3} \sqrt{E_s E_t} \cdot \frac{t}{R} \quad (2.5)$$

(3) 歪増分理論に基づく座屈理論解

この場合は(2.1)式に $\psi = 1$ と置いて下式のように得られる²⁾。

$$\sigma_{cr} = \frac{2E}{\sqrt{3\{5 - 4\nu\}\lambda - (1 - 2\nu)^2}} \cdot \frac{t}{R} \quad (2.6)$$

(2.6)式で塑性域では λ が大きく、それに対して $(1 - 2\nu)^2$ が無視できると見なすと次式を得る⁵⁾。

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{1.69} \sqrt{E E_t} \cdot \frac{t}{R} \quad (2.7)$$

但し $\nu = 0.3$ とした。

(4) 自由境界に対する、歪増分理論に基づく座屈理論解

この解はもともと弾性座屈理論解が実験結果に対して高すぎる解しか与えないので、理論解が下がる可能性を追求して考え出した端部の境界条件を自由境界とする仮定を、歪増分理論に基づく座屈理論解にも適用したものである。その結果下式が提案されている⁶⁾。

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3\{5 - 4\nu\}\lambda - (1 - 2\nu)^2}} \cdot \frac{t}{R} \quad (2.8)$$

この式は次のように書き表される。

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{3.38} \sqrt{E E_t} \cdot \frac{t}{R} \quad (2.9)$$

この解は(2.6)式の 1/2 である。

2.2 塑性流れ域

ところで塑性流れ域では $E_t = 0$ ($\lambda = \infty$) であるので、これを(2.1)式に代入すると、 $\sigma_{cr} = 0$ となってしまう。これは塑性流れ域で座屈してしまうことを意味する。しかしこの時の座屈半波長は(2.2)式によれば ∞ となり、これは短柱を扱っているのでありえない。この場合は(2.3)式に立ち返って考察しなければならない。(2.3)式はそのまま計算すると発散する項を含んでいるが $E_t \rightarrow 0$ の極限が存在する。その極限が塑性流れ域の理論座屈式である。

(a) 変形理論解

(2.3)式に $E_t = 0$ $a_{11} = \frac{E_s}{3}$ $BE = 0$ を代入して次式を得る。

$$\sigma_{cr} = \frac{t^2}{36} E_s \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (2.10)$$

(b) 歪増分理論解

(2.3)式に $E_t = 0$ $\psi = 1$ $a_{11} = \frac{E}{5 - 4\nu}$ $BE = 0$ を代入して次式を得る。

$$\sigma_{cr} = \frac{I a_{11}}{t} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 = \frac{t^2}{12} \times \frac{E}{5 - 4\nu} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (2.11)$$

(2.10), (2.11)式は両式とも座屈半波長を無限大としたときに、耐力 0 を与えるので、塑性流れ域で不安定となることを示している。又座屈半波長が有限であるときには耐力を持つことを、式の形は示している。このことは、短柱の長さが有限であること、又実験で観察される座屈波は像の足モードのように端部に集中した短い波長であることと符合している。塑性流れ域に(2.10), (2.11)式を適用する意味は応力度は降伏応力度ただ一つに適用するのであるから、径厚比によって、これらの式の与える値が降伏応力度以上であれば塑性流

れ域で安定、低いと不安定で屈服することを意味している。

3. 円形鋼管端柱の圧縮実験

3.1 試験体

円形鋼管短柱試験体は材質の相違の影響をみる為に降伏応力と降伏比そして降伏棚の長さが異なる3種類のシリーズからなる。それらはSS400,配管用熱間圧延継目無鋼管STPT410-S-Hおよび強度の高い機械構造用炭素鋼継目無鋼管STKM-S45Cである。

試験体はすべて製作後600℃15分保持後、炉冷により残留応力除去焼鈍がなされている。SS400の試験体は材長が150mm又は100mmの2種類があり、径厚比は19種類ある。STPT410-S-Hの試験体の径厚比は18種類ある。STKM-S45Cの試験体の径厚比は19種類ある。

試験体名としては、SS400は材長150mmのものはCL3~10、100mmのものはCS8~18、STPT410-S-Hはst-1~18、STKM-S45Cはsc-1~19がある。試験体は外径を揃え内径を削ることによって製作した。これらの寸法等は表1~表3に示す。これらの図、表中の記号の意味は図中に示す。

図1 試験体形状

図2 加力と測定方法

3.2 実験方法

実験は図2に示すような中心圧縮による平押しである。試験体は台座の上に載せてあるのみである。用いた試験機は200tonスクリュタイプ万能試験機であり、実験の詳細は文献(7)を参照されたい。

3.3 材料の機械的性質

材料の機械的性質を調べるために引張素材試験を行った。引張試験片は試験体と一緒に焼鈍炉にいれ試験体の熱環境と同じとした。引張試験による機械的性質を表4に示す。同表中の記号の定義は以下の通りである。

σ_y	: 降伏応力度
$\sigma_{\max}$	: 最大応力度
YR	: 降伏比
ε_y	: 降伏歪
$\varepsilon_{\max}$	: 伸び
E	: ヤング係数
ε_{st}	: 歪硬化開始点の歪
E_{st}	: 歪硬化域での初期接線勾配 (N/mm ²)
β_t	: 歪硬化開始点歪の無次元値 ($\varepsilon_{st}/\varepsilon_y$)
h_t, h_{st}	: E/E_{st}

表1 試験体寸法 (SS400)

試験体名	t (mm)	D (mm)	ℓ (mm)	R/t	τ
CL3	6.0	60	150	4.50	2.29
CL4	4.0	60	150	7.02	1.94
CL5	3.00	60	150	9.50	1.73
CL6	2.4	60	150	11.9	1.59
CL7	2.0	60	150	14.6	1.47
CL8	1.7	60	150	17.2	1.36
CL9	1.5	60	150	19.4	1.28
CL10	1.3	60	150	22.0	1.28
CS8	1.7	60	100	17.0	1.38
CS9	1.5	60	100	19.3	1.27
CS10	1.3	60	100	21.9	1.32
CS11	1.2	60	100	23.9	1.23
CS12	1.1	60	100	26.5	1.18
CS13	1.0	60	100	28.9	1.15
CS14	0.94	60	100	31.4	1.07
CS15	0.87	60	100	33.9	1.10
CS16	0.79	60	100	37.4	1.06
CS17	0.74	60	100	40.0	1.02
CS18	0.70	60	100	42.3	1.01

表2 試験体寸法 (STPT410-S-H)

試験体名	T (mm)	D (mm)	ℓ (mm)	R/t	τ
st-1	5.9	60	148	4.50	1.93
st-2	4.9	60	148	5.52	1.82
st-3	3.9	60	148	7.03	1.64
st-4	2.9	60	148	9.53	1.50
st-5	2.4	60	148	11.9	1.39
st-6	2.0	60	148	14.6	1.33
st-7	1.7	60	148	16.5	1.26
st-8	1.5	60	148	19.4	1.16
st-9	1.3	60	148	21.8	1.14
St-10	1.2	60	148	24.7	1.06
St-11	1.1	60	148	27.3	1.00
St-12	1.0	60	148	29.3	0.97
st-13	0.8	60	148	34.6	1.00
st-14	0.84	60	148	37.3	1.00
st-15	0.66	60	148	44.2	0.97
st-16	0.61	60	148	48.6	0.99
st-17	0.54	60	148	54.1	1.00
st-18	0.50	60	148	58.4	0.97

表3 試験体寸法 (STKM-S45C)

試験 体名	t (mm)	D (mm)	ℓ (mm)	R/t	τ
sc-1	6.6	60	148	4.00	2.13
sc-2	5.9	60	148	4.50	2.05
sc-3	4.9	60	148	5.50	1.95
sc-4	3.9	60	148	7.04	1.82
sc-5	3.0	60	148	9.50	1.70
sc-6	2.4	60	148	12.0	1.58
sc-7	2.0	60	147	14.6	1.50
sc-8	1.7	60	148	17.0	1.41
sc-9	1.5	60	147	19.3	1.33
sc-10	1.3	60	148	22.2	1.30
sc-11	1.2	60	148	24.9	1.23
sc-12	1.1	60	147	27.1	1.18
sc-13	0.98	60	148	29.6	1.15
sc-14	0.83	60	147	35.0	1.07
sc-15	0.72	60	148	40.8	0.99
sc-16	0.65	60	148	45.0	1.00
sc-17	0.58	60	148	50.4	0.98
sc-18	0.54	60	147	54.0	1.00
sc-19	0.48	60	147	61.0	1.0

図3 引張試験結果 (STPT410-S-H)

表4 材料の機械的性質

Material	SS400	STPT410-S-H	STKM-S45C
σ_y (N/mm ²)	258	304	398
σ_{max} (N/mm ²)	456	485	715
YR (%)	57	63	56
ε_y (%)	0.125	0.148	0.194
ε_{max} (%)	15.9	17.13	13.8
E (N/mm ²)	205,000	205,000	205,000
ε_{st} (%)	0.771	1.86	0.773
E_{st} (N/mm ²)	4724	5481.3	10099
β_t	6.17	12.6	3.98
h_t	43.4	37.4	20.3

表5 圧縮性状

Material	SS400	STPT410-S-H	STKM-S45C
σ_y (N/mm ²)	262	295	396
ε_y (%)	0.13	0.144	0.193
ε_{st} (%)	0.436	1.09	0.675
E_{st}	4,964	5,742	10,250
β	3.35	7.60	3.50
h	41.3	35.7	20.0

図4-(a) $\sigma/\sigma_y - \varepsilon/\varepsilon_y$ 関係 (SS400 CS シリーズ) 図4-(b) $\sigma/\sigma_y - \varepsilon/\varepsilon_y$ 関係 (SS400 CL シリーズ) 図5 $\sigma/\sigma_y - \varepsilon/\varepsilon_y$ 関係 (STPT410-S-H) 図6 $\sigma/\sigma_y - \varepsilon/\varepsilon_y$ 関係 (STKM-S45C)

実験によって得られた圧縮性状を表 5 に示す。同表中の記号の定義は圧縮を示す添え字 c を付け加えた以外は引張性状における場合と同じ意味である。引張試験結果を、扱った材質の中から代表して材質 STPT410-S-H のみについて図 3 に示す。

3.4 円形鋼管短柱の圧縮実験結果

降伏歪 $c\epsilon_y$ で除して無次元化した $\sigma/c\sigma_y - \epsilon/c\epsilon_y$ 関係を得た。そのグラフを図 4 (a)(b), 5, 6 に示す。図 4 は CS と CL の二つのシリーズに分かれている。

4. 理論座屈式と実験結果との比較

4.1 Richard の式による実験結果の近似

歪硬化域における $\sigma/c\sigma_y - \epsilon/c\epsilon_y$ 関係の最も外側を通る曲線は径厚比の最も小さな試験体のカーブで代表される包絡線となるこの包絡線はそれぞれの材質によって異なり、Richard の式⁹⁾の基本形(4.1)式を基に近似させる。ここで圧縮実験から得られたそれぞれの材質の近似式の中から代表して材質 STPT410-S-H のみについて(4.2)式に示し、図 7 で近似式を実験から得た曲線と比べた。

Richard の式の基本形

$$\frac{\sigma}{c\sigma_y} = 1.0 + \frac{\left(\frac{\epsilon}{c\epsilon_y} - \frac{\epsilon_{st}}{c\epsilon_y} \right) / \frac{E}{E_{st}}}{\left[1.0 + \frac{\left(\frac{\epsilon}{c\epsilon_y} - \frac{\epsilon_{st}}{c\epsilon_y} \right) / \frac{E}{E_{st}}}{\left(\frac{\sigma_{\max}}{c\sigma_y} - 1.0 \right)} \right]^{\frac{1}{n}}} \quad (4.1)$$

Richard の式 (st-1 に近似 STPT410-S-H)

$$\frac{\sigma}{c\sigma_y} = 1.0 + \frac{\left(\frac{\epsilon}{c\epsilon_y} - 7.6 \right) / 35.7}{\left[1.0 + \frac{\left(\frac{\epsilon}{c\epsilon_y} - 7.6 \right) / 35.7}{(2.2 - 1.0)} \right]^{\frac{1.4}{1.4}}} \quad (4.2)$$

$\left(\frac{\sigma}{c\sigma_y} \geq 1 \right)$
 $\left(\frac{\epsilon}{c\epsilon_y} \geq 7.6 \right)$

図 7 近似曲線 (STPT410-S-H)

図 8 歪増分理論による座屈曲線 (STKM-S45C)
(座屈半波長を 8 mm と仮定)

図 9 変形理論による座屈曲線(STKM-S45C)
(座屈半波長を 8 mm と仮定)

図 10 歪増分理論による座屈曲線 (STPT-410-S-H)

図 11 歪増分理論による座屈曲線 (STKM-S45C)

図 12 変形理論による座屈曲線 (STPT-410-S-H)

図 13 変形理論による座屈曲線 (STKM-S45C)

4.2 理論座屈式

4.2.1 境界条件

前記の様に試験体は台座の上に載せてあるのみである。従って端部境界条件としては、半径方向の変位と回転が自然に拘束されている可能性がある。これによる縁撓乱たわみは荷重が座屈荷重に達したときでもポアソン比による平均半径方向膨張を中心に、高々それと同量の振幅しか発生しない。この量は小さく実験結果を材端ピン支持の座屈荷重と等しいとみた。

4.2.2 塑性流れ域での安定性

(歪増分理論)

STKM-S45C の座屈半波長を 8mm と仮定した場合の、塑性流れ域の座屈式(2.9)を用いて画いた曲線が図 8 中の破線である。同図中には歪硬化域でも座屈半波長が同じ 8mm であると仮定して画いた座屈曲線が実線で画いてある。同図中下の水平線は降伏応力度、上の水平線は最大応力度である。塑性流れ域においては、応力度は降伏応力度であるので、破線の座屈曲線は A 点ただ一点のみ意味がある。A 点より大きい径厚比のものは、降伏応力度を超えられず、小さい径厚比のものは、降伏応力度を超え歪硬化域に達してから座屈する。この境界となる径厚比のところで応力は A 点から B 点にジャンプし、これ以下の径厚比では B 点以上の座屈曲線が当てはまる。C 点は最大応力度であるのでこれを超えることはない。破線と実線は最大応力度のところで交わる。その理由は、実線は最大応力度のところでは $E_t = 0$ であり、ここでは塑性流れ域と同じ特性となるからである。図 8 中 C 点より左の領域では座屈がおこらないことになる。

座屈半波長を一定値に仮定して、材質 STPT-410-S-H と STKM-S45C に対して座屈曲線画いたものが図 10、および図 11 である。座屈半波長は図中に示される 8,12,20mm と材長 ℓ の四種

類とした。同図中破線は $E_t = 0$ (2.9)式、実線は歪硬化域(2.1)式中のパラメータに $\psi = 1$ を適用した歪増分理論解である。プロットは実験結果である。

(変形理論)

STKM-S45C の座屈半波長を 8mm と仮定した場合の、塑性流れ域の座屈式(2.8)を用いて画いた曲線が図 9 中の破線である。同図中には歪硬化域でも座屈半波長が同じ 8mm であると仮定して画いた座屈曲線が実線で画いてある。図 8 と同様に A 点を境に、降伏応力度を超えることができない領域と超えることができる領域に分かれる。図 8 とは C 点の位置が異なり、C 点は横軸 0 の位置でその大きさは最大応力度である。

座屈半波長を一定値に仮定して、材質 STPT-410-S-H と STKM-S45C に対して座屈曲線画いたものが図 12、および図 13 である。座屈半波長は図中に示される 8,12mm と、材長 ℓ の 3 種類とした。同図中破線は $E_t = 0$ (2.8)式、実線は歪硬化域(2.5)式である。

4.2.3 歪硬化域における最小座屈値

理論座屈曲線として歪硬化域における変形理論および歪増分理論による座屈式を実験結果との比較に用いる。いずれも塑性化が充分進行した後に局部座屈する場合の最小解である。変形理論については材端が単純支持、歪増分理論については材端が単純支持と自由境界の二つの場合の解を取り上げた。理論座屈式は(2.5),(2.7),(2.9)式から座屈応力度を降伏応力度で除して無次元化した応力上昇率 τ の形で表す。式中の接線係数と割線係数の値は Richard の式から求めた。

(1) 変形理論

$$\tau = \frac{\sigma_{cr}}{c\sigma_y} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_t}{E} \frac{E_s}{E}} \frac{1}{(R/t)_c \epsilon_y} \quad (4.3)$$

(2) 歪増分理論

$$\tau = \frac{\sigma_{cr}}{c\sigma_y} = \frac{1}{1.69} \sqrt{\frac{E_t}{E}} \frac{1}{(R/t)_c \epsilon_y} \quad (4.4)$$

(3) 自由境界に対する歪増分理論

$$\tau = \frac{\sigma_{cr}}{c\sigma_y} = \frac{1}{3.38} \sqrt{\frac{E_t}{E}} \frac{1}{(R/t)_c \epsilon_y} \quad (4.5)$$

4.2.4 実験結果と最小理論座屈式との比較

歪硬化域における最小理論座屈式(4.3),(4.4)(4.5)に基づいて $\tau - (R/t)_c \epsilon_y$ 曲線画いたのが、図 14, 15, 16 である。 τ の実験結果は表 1~表 3 に示される。これらの図より歪増分理論は実験値に対してかなり大きい値を与えている。自由境界に対する歪増分理論では実験値にはかなり近づくが、それでもまだ大きい解を与えている。それに対して変形理論は実験値に非常に近い解を与えている。

上記座屈曲線のうち材質 STKM-S45C に対する図 16 を変形理論に対して画かれた図 9 と比較すると両図中の座屈曲線に若干の違いがある。座屈曲線は本来図 9 のように示され、塑性流れ域の座屈曲線が降伏応力度レベルをよぎる点の径厚比(およそ 22)の短柱は、応力度が降伏応力度から歪硬化域の座屈曲線(B 点)に向け

でジャンプする。ところが図 14～16 はジャンプがなく滑らかで、図 9 と比べて径厚比の大きい領域で降伏応力度を超えている。この理由は図 13 を例に説明する。同図で座屈半波長が 8mm なら A 点の一つの境界になりそこでジャンプし、歪硬化域の座屈曲線に移行する。座屈半波長が 8mm 固定なら A 点より径厚比が大きい領域では理論と実験結果が合わないと言えるが、径厚比が大きくなるに連れて、次第に座屈半波長が短くなることを考えると、ジャンプする位置が A 点より右にずれ、ジャンプする大きさも次第に小さくなり、結果として滑らかな曲線となると思われる。

4.3 座屈半波長の理論値と実験結果

歪硬化域における理論座屈式は、(2.2)式による座屈半波長がその最小値を与える。その半波長を STKM-S45C について、実験後に試験体から測定した長さと比較したのが図 17 である。

図 14 $\tau - (R/t)_c \epsilon_y$ 曲線(SS400)

図 15 $\tau - (R/t)_c \epsilon_y$ 曲線(STPT410-S-H)

図 16 $\tau - (R/t)_c \epsilon_y$ 曲線 (STKM-S45C)

図 17 座屈半波長 L と径厚比 R/t との関係 (STKM-S-45C)

写真 1 SC-1 の実験後 $R/t=4$

写真 2 SC-9 の実験後 $R/t=19.3$

$R/t=4$ でおおよそ 20mm、 $R/t=19$ でおおよそ 10mm、 $R/t=54$ でおおよそ 8mm であった。同図によれば、実験による座屈半波長は理論値、特に変形理論のカーブにのっているという結果を得た

5. 結論

- 1) 圧縮を受ける円形鋼管の塑性流れ域における安定性を理論的に検討した。その結果、よく知られている座屈式には、歪増分理論によっても、変形理論によっても、座屈式に E_t の項がかかっていて発散する項を含んでいるが、 $E_t \rightarrow 0$ の極限が存在する。塑性流れ域ではこの極限をとった式を適用すればよいことが分かった。
- 2) 1)で得た $E_t \rightarrow 0$ の極限をとった式は、長さに反比例する形なので座屈半波長を無限大としたときに、耐力 0 を与え、塑性流れ域で不安定となることを示している。しかし長さは短柱の長さとして有限で、又実験で観察される座屈波形のモードは象の足モードで、端部近傍の短い波長である。この半波長を座屈式に適用すれば、径厚比によっては塑性流れ域での座屈を経ずして歪硬化域に達し得る事が説明できる。
- 3) 塑性流れ域の長さ、そして降伏比の異なる鋼材質を選んで、径厚比を変化させた 3 種類のシリーズの短柱圧縮実験を行い、座

屈理論解と比較した。

- 4) 座屈半波長は材質 STKM-S-45C の試験体で測った。径厚比の大きいところでは座屈半波長の理論値は、歪増分理論と変形理論とが近接するので、実験値は両方の理論値に近い。径厚比が小さいところでは、実験値は変形理論に近く、歪増分理論の予測値は実験値よりかなり大きい。
- 5) 歪硬化域での座屈耐力式は、歪増分理論は実験結果よりはるかに高く、自由境界に対する歪増分理論はかなり実験値に近づくが、それでもまだ大きい解を与えている。変形理論は塑性流れを有する場合でも 3 種類すべての実験結果とよく合うという結果を得た。

謝辞

この研究の実験で用いた試験体の製作費は日本学術振興会から交付された科学研究費補助金（基盤研究 C）および住友金属工業（株）からの奨学寄附金によるものです。深く感謝いたします。

6. 参考文献

- 1) Donnel, L.H., :Stability of thin-walled tubes under torsion, N. A. C. A Report, No. 479, 1933
- 2) Batterman, S. C., :Plastic Buckling of Axially Compressed Cylindrical Shells, AIAA J. ,Feb., 1965
- 3) Gerald, G., :Compressive and torsional buckling of thin-wall cylinders in yielded region, N. A. C. A, T. N. 3726 Aug. 1956
- 4)) Batterman, S. C. and Lee, L. H., :Effect of modes of plastic buckling of compressed cylindrical shells, AIAA J. Dec. 1966
- 5) 加藤勉、秋山宏、鈴木弘之：軸圧縮力を受ける鋼管の塑性局部座屈耐力、日本建築学会論文報告集、第 204 号、1973 年
- 6) Batterman, S. C. :Free-Edge Plastic Buckling of Axially Compressed Cylindrical Shells, J. of Appl. Mech. , March, 1968
- 7) 井上哲郎、中村陽一：圧縮を受ける円形鋼管短柱の塑性座屈—平板との対比—、鋼構造論文集第 10 巻第 3 9 号 2003 年
- 8) Richard, R. D. and Goldberg, J. E. :Analysis of Nonlinear Structures, Force Method, J. of Structural Division, ASCE, Vol. 91, No. ST6, Proc. Paper, 1965

(APPENDIX I)

塑性流れ域での応力増分と歪増分との関係

(塑性流れ域)

歪増分理論の非硬化材料に対する Reuss の方程式から平面応力状態 ($\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$) において

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_x - \nu \dot{\sigma}_y) + \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y)d\lambda \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_y - \nu \dot{\sigma}_x) + \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x)d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-1})$$

$d\lambda$: スカラー比例係数

偏差応力の 2 次不変量は

$$J_2' = \frac{1}{3}(\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2) \quad (\text{A-2})$$

となる。 $\dot{J}_2' = 0$ より

$$\dot{J}_2' = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y)\dot{\sigma}_x + \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x)\dot{\sigma}_y = 0 \quad (\text{A-3})$$

一軸圧縮の場合 ($\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$)

$$\dot{J}_2' = \frac{2}{3}\sigma_x\dot{\sigma}_x - \frac{1}{3}\sigma_x\dot{\sigma}_y = 0$$

よって

$$\dot{\sigma}_y = 2\dot{\sigma}_x \quad (\text{A-4})$$

(A-4)を(A-1)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{1}{E}(1-2\nu)\dot{\sigma}_x + \frac{2}{3}\sigma_x d\lambda \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{1}{E}(2-\nu)\dot{\sigma}_x - \frac{1}{3}\sigma_x d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-5})$$

(A-5)より

$$d\lambda = \frac{3}{2\sigma_x} \left\{ \dot{\epsilon}_x - \frac{1}{E}(1-2\nu)\dot{\sigma}_x \right\} = \frac{3}{\sigma_x} \left\{ -\dot{\epsilon}_y + \frac{1}{E}(2-\nu)\dot{\sigma}_x \right\} \quad (\text{A-6})$$

(A-5)より

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_x &= \frac{E}{5-4\nu}(\dot{\epsilon}_x + 2\dot{\epsilon}_y) \\ \dot{\sigma}_y &= \frac{2E}{5-4\nu}(\dot{\epsilon}_x + 2\dot{\epsilon}_y) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-7})$$

を得る。

(歪硬化域)

歪硬化域では下式が成り立つことが知られている。この式は変形理論による表示で、パラメータを適切に選べば、弾性域をも、歪硬化域をも表わす一般形である。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_x &= a_{11}\dot{\epsilon}_x + a_{12}\dot{\epsilon}_y \\ \dot{\sigma}_y &= a_{12}\dot{\epsilon}_x + a_{22}\dot{\epsilon}_y \\ \dot{\tau}_{xy} &= a_{33}\dot{\gamma}_{xy} \\ a_{11} &= B \frac{\lambda + 3\psi}{4}, \quad a_{12} = B \frac{\lambda + 2\nu - 1}{2} \\ a_{22} &= B\lambda, \quad a_{33} = \frac{E}{3\psi + 2\nu - 1} \\ BE &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{4E^2}{(3\psi + 2 - 4\nu)\lambda - (1 - 2\nu)^2} \\ \lambda &= E/E_t \\ \psi &= E/E_s \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-8})$$

$\psi = 1$, ($E_s = E$) とすれば歪増分理論になり

$\lambda = \psi = 1$, ($E_t = E_s = E$) とすれば Hook の法則になる。

歪増分理論の(A-8)式で $\psi = 1$ とし、 $E_t \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$a_{11} = \frac{E}{5-4\nu}, \quad a_{12} = \frac{2E}{5-4\nu}, \quad a_{22} = \frac{4E}{5-4\nu},$$

これは塑性流れ域の(A-7)式と一致する。したがって、理論座屈式は歪硬化域の解で $E_t \rightarrow 0$ の極限をとれば、塑性流れ域の解を表わしていると考ええる。変形理論の場合も同様の扱いと考える。

(2007年10月5日原稿受理, 2008年3月10日原稿受理)