テーパー木梁の破壊荷重から導かれる木材の割裂条件

- 鉄骨木質構造の研究 その4 -

SPLITTING CRITERIA OF WOOD INDUCED FROM FAILURE LOAD OF TAPERED BEAM

- Study on steel-framed timber structures Part 4 -

桑 村 仁*

Hitoshi KUWAMURA

Bending tests were done for ten specimens of tapered wood beam made of Japanese cedar and SPF to find splitting failure loads, and simultaneously tensile and shear tests of coupons cut from the same timbers were done to find material properties. It was verified that the splitting failure takes place when the maximum radial stress along the taper edge, which is derived from stress-function theory, reaches the tensile strength of the wood with the same angle to the grain as the taper of the beam. The well-known methods after Hankinson, Norris, and Tsai-Hill were applied to calculating the tensile strengths at various angles to the grain from the basic strengths parallel and perpendicular to the grain of orthotropic material. It was found that Norris and Tsai-Hill formulae are both available to give a good prediction, while Hankinson formula shows a larger dispersion.

Keywords : *Splitting, Wood, Tapered beam, Fracture criteria*

割裂, 木材, テーパー梁, 破壊条件

1. はじめに

引張側にテーパーのついた木材梁はテーパー縁から割裂破壊することが古くから知られている¹⁾。しかし、割裂破壊するときの荷重を予測する方法はまだ確立されていない。その要因の一つはテーパー縁の正しい応力分布が見い出されていなかったことによる。テーパー梁の応力分布は平面保持を仮定した初等力学によって Maki・Kuenzi²⁾、沢田・丸山³⁾が導いているが、ひずみの適合条件とテーパー下端の境界条件を満たさないで正しい解でないことが指摘された⁴⁾。最近、数理弾性学の法則に厳密に従う応力関数法によって正しい応力分布が導かれ⁵⁾、テーパー勾配が急な場合およびテーパー下端の梁せいがさほど大きくない有限テーパーの場合についてもテーパー縁の応力分布が求められるようになった。これによりテーパー梁の割裂荷重を予測するための一つの扉が開かれた。もう一つの問題は、木材に代表される異方性材料の破壊条件に関する法則が諸説乱立状態で、どれが当てはまるものであるか不明であるということによる。わが国の学会規準⁶⁾や米国の木構造便覧⁷⁾では、Hankinson 式と Norris 式が状況に応じて使い分けられており、統一されていない。異方性材料の力学について先進的な発展を遂げている航空分野では、これらとは異なる破壊条件式が使われている⁸⁾。本稿は、以上の背景を踏まえ、テーパー木梁の割裂破壊実験10体を基にして、割裂破壊荷重を予測する方法ならびに木材の割裂破壊条件について検討したものである。

2. テーパー梁の応力分布

図1に示すテーパー梁のテーパー縁に生じる応力度はテーパー方向 (r 方向) の直応力度で決定され、それは次式で表される⁵⁾。

$$\sigma_r = \left[-\frac{4}{r^2} \bar{a}_1 \sin \beta - \frac{1}{r} (\bar{b}_2 \cos \beta - \bar{b}_1 \sin \beta) - \bar{\sigma}_{rb} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{\lambda_r - 1} \right] \cdot Q \quad (1)$$

ここで、

$$\bar{a}_1 = \frac{r_o}{2(\tan \beta - \beta)} \quad (2)$$

$$\bar{b}_1 = \frac{2\beta + \sin 2\beta}{\beta^2 - \sin^2 \beta} \quad (3)$$

$$\bar{b}_2 = \frac{2\sin^2 \beta}{\beta^2 - \sin^2 \beta} \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_{rb} = -\frac{4}{r_1^2} \bar{a}_1 \sin \beta - \frac{1}{r_1} (\bar{b}_2 \cos \beta - \bar{b}_1 \sin \beta) \quad (5)$$

テーパー角として可能な $0 < \beta \leq \pi/2$ において $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ はいずれも正値をとる。上式中の記号の定義は次のとおりである。

 β : テーパー角 (rad) Q : 梁の単位厚さあたりのせん断力 (N/mm) r : 上縁とテーパー縁が交差する点 O からテーパー上の任意の点までの距離 (mm) r_o : 点 O から支点 A までの距離 (mm) r_1 : 点 O からテーパー下端 B までの距離 (mm) λ_r : 表1の数値

* 東京大学大学院工学系研究科建築学専攻 教授・Ph. D.

Prof., Dept. of Architecture, School of Engineering, The University of Tokyo, Ph. D.

表1 λ_r の数値

$\tan \beta$	β		λ_r
	(rad)	(deg)	
0.1	0.100	5.71	42.3
0.2	0.197	11.3	21.3
0.25	0.245	14.0	17.2
0.3	0.291	16.7	14.5
0.4	0.381	21.8	11.1
0.5	0.464	26.6	9.10
0.6	0.540	31.0	7.81
0.7	0.611	35.0	6.92
0.8	0.675	38.7	6.27
0.9	0.733	42.0	5.77
1.0	0.785	45.0	5.39

図1 本稿で扱うテーパ梁

表2 テーパー梁試験体リスト

試験体	$\tan \beta$	セットアップ	支点加工	テーパ根元補強	支点間 L mm	製材			
						記号	樹種 厚さ×幅	密度 kg/m ³ (含水率 %)	テーパ部の平均年輪幅 mm
①	0.2	3点曲げ 単テーパ	水平座面	ガラスクロス	600	F3'	スギ 30×80	350 (12)	2.4
②	0.2	3点曲げ 両テーパ	かぎ形カット	ガラスクロス	700	D1	スギ 20×80	345 (11)	1.7
③	0.2	3点曲げ 両テーパ	かぎ形カット	合板(t3)	900	N3	スギ 30×120	320 (9.5)	1.9
④	0.2	4点逆曲げ 単テーパ	製材のまま	補強なし φ10先孔加工	900	D4	スギ 20×80	320 (9.5)	1.4
⑤	0.25	3点曲げ 単テーパ	テーパのまま	補強なし	1,050	SPFB	SPF 38×140	410 (8.5)	2.0
⑥	0.4	3点曲げ 単テーパ	水平座面	ガラスクロス	340	F3'	スギ 30×80	350 (12)	2.4
⑦	0.5	3点曲げ 単テーパ	テーパのまま	補強なし	400	SPFA	SPF 38×89	430 (8.0)	1.3
⑧	0.5	4点逆曲げ 単テーパ	製材のまま	補強なし φ10先孔加工	900	D4	スギ 20×80	320 (9.5)	1.4
⑨	0.9	3点曲げ 両テーパ	かぎ形カット	ガラスクロス	620	C2	スギ 20×110	360 (12)	2.5
⑩	1.0	3点曲げ 単テーパ	かぎ形カット	補強なし	290	SPFA	SPF 38×89	430 (8.0)	1.3

前記(1)式は応力関数法により導かれたもので、次の条件、すなわち、(1)支点Aからテーパ下端Bの範囲にあるテーパ梁の応力の釣合条件、(2)同じくひずみの適合条件、(3)上縁とテーパ縁が自由界面であるという境界条件、(4)支点Aを通る鉛直断面に働くせん断合力がQで垂直合力と合モーメントがともにゼロであるという境界条件、(5)テーパ下端Bの応力がゼロであるという境界条件、をすべて満たしている。従来の初等力学解^{2),3)}は、上記の(2)と(5)を満たしていないので、テーパ勾配が0.2を超える場合、またはテーパ下端の梁せいが支点の梁せいの3倍未満の場合には誤差が無視できなくなる⁵⁾。

ただし、上記の応力関数解には次の制約条件がある。すなわち、(a)支点Aを通る断面は自由界面ではないこと、(b)物体力（この場合、梁の自重）を無視した2次元等方等質弾性問題の解であることである。この制約条件について本稿の目的から考えて注意すべきことは次の点である。制約条件(a)は、サン・ブナンの原理により、支点か

らある程度離れた位置では精度の高い応力評価となるが、支点近傍の応力は支点の条件に左右され正しく評価されない可能性があるもので、支点近傍で割裂破壊したテーパ梁の破壊応力の評価には用いないほうがよいということを意味する。そこで、本稿で用いるテーパ梁実験データにはそのような事例を除外し、後述の10体に限定した。制約条件(b)は、梁の自重の影響は無視できるとはいえ、等質等方材料の解であるため木材特有の不均質・直交異方材料の解とは異なる可能性があるということである。実際、コの字型の切欠きを有する梁のFEM解析によると、直交異方性を与えた場合に頸部に回り込む力線密度が等方性の場合より若干低下する傾向が見られた⁹⁾。しかし、この点は理論的に未解明であり、また試験材毎の異方弾性係数値を調査していないので、ここでは応力評価における異方性を無視することとした。また、木材が性質の異なる早材と晩材が層を成している不均一性についても、応力状態をマクロに捉えることをもってこれを無視することとした。

① $\tan\beta=0.2$, スギ30×80

② $\tan\beta=0.2$, スギ20×80

③ $\tan\beta=0.2$, スギ30×120

④ $\tan\beta=0.2$, スギ20×80

⑤ $\tan\beta=0.25$, SPF38×140

⑥ $\tan\beta=0.4$, スギ30×80

⑦ $\tan\beta=0.5$, SPF38×89

⑧ $\tan\beta=0.5$, スギ20×80

⑨ $\tan\beta=0.9$, スギ20×110

⑩ $\tan\beta=1.0$, SPF38×89

図2 テーパー木梁の割裂破壊状況⁴⁾

図1に示す直交座標系 $x-y$ におけるテーパー縁の応力度は次式で表される。次章で検討するテーパー木梁において、 x 軸が木材の繊維方向 (L 方向)、 y 軸が半径方向 (R 方向) となる。

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \beta \quad (6a)$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \beta \quad (6b)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin \beta \cos \beta \quad (6c)$$

3. テーパー木梁の割裂破壊実験

3.1 試験体リストおよび割裂破壊状況

本稿で引用するテーパー木梁は表2に示す①から⑩の10体で⁴⁾、テーパー勾配の緩いものから順に並べてある。テーパー勾配は0.2から1.0の範囲にあり、図2の写真に示すように、すべてテーパー縁から割裂破壊を起こしている。

3.2 試験体のセットアップ

試験体のセットアップ形式は図3に示す3点曲げと4点逆曲げで、試験体毎にいずれを採用したかを表2に記してある。

3点曲げは、試験体の両端を単純支持とし、中央に集中荷重を載荷するものである。テーパーは梁の片側あるいは両側に設けてあり、単テーパーと両テーパーのいずれを採用したかについても表2に記してある。3点曲げ試験体の支点部分は、図2の写真からもわかるように、水平な座面を設けて支持具を装着したもの、かぎ形に梁端をカットしてテーパー縁に装着した支持具が滑り出さないようにしたもの、テーパーのままとし支持具をテーパー面にねじ留めしたものがある。梁に装着した支持具はナイフエッジで受けることによって支点位置を明確にし、さらにナイフエッジの底板はロールベアリングまたはテフロンシートで受けることによって梁に軸力が生じないようにした。3点曲げの場合は、支点近傍の応力集中によってテーパー根元から割裂破壊が起きることがあるので、文献¹⁰⁾を参考にし、割裂に対する補強を施したものがある。すなわち、表2のテーパー根元補強の欄に示したガラスクロスあるいは合板は α -シアノアクリレート（いわゆる瞬間接着剤）で接着することによって補強したことを表している。なお、補強することによって補強材の縁から破壊することがあるが、そのような場合は応力集中の影響を受けていると考えられるので、補強材の縁から破壊した試験体はここでは採用していない。

4点逆曲げは、試験体長さの4等分点のうち2ヶ所で単純支持し、残りの2点でピン支持された載荷梁にテーパー根元を狙って集中荷重を与える方法である。4点逆曲げの場合は、テーパーの根元に直接、集中荷重が作用しないので、根元補強は不要である。ただし、製材からテーパーラインを鋸切断する際テーパー根元にノッチが生じないように直径10mmの孔を予め明けておいた。

3.3 製材

試験体に用いた製材は樹種がスギとSPFの2種類で、5本のスギ製材、2本のSPF製材を用いた。1本の製材の長さは2.4~3.0mである。これら製材はすべて、試験体の梁せい方向が丸太の半径方向となっている。ただし、製材断面の木口に髄は含まれていない。それぞれの製材から、テーパー周辺に年輪褶曲部、節、脂壺のない木理通直部が来るように、テーパー梁試験体（1本の製材から1体

または2体）を切り出すとともに、後で述べる材料試験片も採取した。表2には製材の密度、含水率、平均年輪幅の測定値を記載しておいた。なお、含水率は、梁試験体および材料試験片のすべてにおいて10%前後である。

3.4 テーパー木梁の曲げ試験結果

テーパー梁の実験結果を表3に示す。本稿では変形に関するデータは関係ないので割愛し、荷重-変形曲線等は別途報告することとした^{注1)}。表3には、試験体の実測寸法、実験で得られた最大荷重 P_m および割裂破壊の起点におけるせい h_f を支点せい h_o で基準化したものが示されている。ここでの荷重は試験機から加えられる荷重 P であり、テーパー部分のせん断力は、3点曲げでは $P/2$ 、4点逆曲げでは $P/3$ となる。最大荷重はすべて割裂による破壊荷重である。

2章で述べたテーパー縁の応力計算式(1)を用いて、最大荷重時におけるテーパー縁の応力分布を計算し、それを図4に示す。初等力

図3 テーパー梁の実験セットアップ

表3 テーパー梁割裂破壊実験結果および計算応力度

試験体	製材	試験体形状・実測寸法				実験結果			計算値	
		テーパー勾配 $k = \tan\beta$	支点のせい h_o (mm)	テーパー下端のせい(全せい) h_i (mm)	幅(厚さ) b (mm)	最大荷重 P_m (kN)	割裂破壊起点のせい h_o で除した比 h_f / h_o	テーパーの最大応力点のせい h_o で除した比 h_m / h_o	テーパー縁の最大応力度 $\sigma_{r,m}$ (MPa)	割裂破壊起点の応力度 $\sigma_{r,f}$ (MPa)
①	F3'	0.2	40	80	31	7.25	1.70	1.66	21.3	21.1
②	D1	0.2	25	80	22	2.27	1.88	1.96	15.9	15.9
③	N3	0.2	40	119	28	6.15	1.53	1.95	21.1	19.5
④	D4	0.2	25	81	22	4.43	1.52	1.96	20.7	19.1
⑤	SPFB	0.25	50	138	37	15.56	1.30	1.91	26.2	20.0
⑥	F3'	0.4	30	80	32	7.73	1.70	1.74	16.4	16.6
⑦	SPFA	0.5	35	88	38	16.68	1.69	1.62	21.1	21.0
⑧	D4	0.5	25	80	22	6.84	1.80	1.74	14.4	14.3
⑨	C2	0.9	40	110	22	5.06	1.62	1.38	7.0	6.7
⑩	SPFA	1.0	35	88	38	12.29	1.29	1.28	10.7	10.7

学解では横軸 h/h_0 が2.0のところで応力度が最大となるが、応力関数法による正解では、 h/h_0 が2.0より小さい位置、すなわち支点により近い位置で最大応力度が生じる。その傾向は、テーパーが急勾配なほど、またテーパー下端の梁せい h_1 の h_0 に対する比が小さいほど、顕著となることが知られている⁵⁾。この応力分布を基にして、最大応力度発生点の梁せい h_m とそこでの最大応力度 σ_m 、および実験で観察された割裂破壊起点における計算応力度 σ_{cr} を表3の計算値の欄に記載した。これらの応力度はいずれもテーパー方向の引張直応力度である。これによると、同一樹種間でテーパーが急勾配になると小さい応力度で割裂破壊を起こしていることがわかる。

4. テーパー梁製材の材料試験

4.1 材料試験片

テーパー梁試験体に用いた製材の残部から材料試験片を採取して、縦引張試験、横引張試験、斜め引張試験、およびせん断試験を行った。製材からの試験片採取プランは図5に示すとおりである。斜め引張試験片の軸に対する繊維の傾斜角はテーパー梁試験体のテーパー勾配に合わせた。3種の引張試験片の中央、およびせん断試験片のせん断面はできるかぎり、テーパー梁試験体の割裂位置に合わせるようにした。引張試験片で所定の試験片長さが確保できない場合は、つかみ部を接着剤で継ぎ足した。

縦引張試験、横引張試験、およびせん断試験は、JIS Z 2101「木材の試験方法」に規定されているが、斜め引張試験は規定されていない ($\tan\beta=1.0$ すなわち45°方向だけは横引張試験の一部として規定されている)。そこで、図6に示す形状の斜め引張試験片を用いることとし、平行部内に少なくとも3年輪が通直するように適宜、平行部の長さを設定した。そのため、繊維の傾斜角が小さい場合、すなわち $\tan\beta$ が小さい場合には、試験片が長くなる。

4.2 材料試験結果

材料試験結果を表4にまとめた。本稿では、強度特性のみが必要であるので、応力-ひずみ曲線や弾性係数については割愛し別途報告することとした^{注1)}。斜め引張試験片は、当該製材から製作したテーパー梁試験体のテーパー勾配に合わせてある。そのため、テーパー梁試験体を2体切り出した製材からは、表に示すように斜め引張試験片も(1)と(2)の2ケースがある。ただし、製材D4については残材が不足したため勾配0.2の材料試験片が採取できなかった。また、試験片は3本ずつとしたが、残材の関係で必要数採取できなかったものがある。

表4より明らかなように、木材の強度特性は方向の影響を強く受けている。縦引張強さ、すなわち繊維方向の引張強さ F_x に対して、

横引張強さ F_y (この場合、半径方向の強さ) は、スギでは1/10以下、SPFでは1/20以下である。斜め引張強さ F_k は縦引張強さと横引張強さの中間にあり、繊維の傾斜角 β が大きいほど低い値を示す。せん断強さ F_{xy} は横引張強さより大きいが同じオーダーである。ここでのせん断強さは、せん断面が板目面すなわち、半径方向 (y 方向) に垂直な面に繊維方向 (x 方向) のせん断力が作用するときの強さである。

5. テーパー梁の割裂破壊応力度と斜め引張強さの関係

テーパー梁の曲げ試験と製材の斜め引張試験の結果から驚くべき傾向が見い出される。それは、テーパー梁が破壊したときの割裂起点におけるテーパー方向応力度と材料試験における斜め引張強さとの類似性である。その相関の状況を図7に示す。斜め引張強さにはばらつきがあるので平均値でなく、個々のデータを採用した。そのため、横軸にとったテーパー梁の割裂破壊応力度の1データに対して、縦軸の斜め引張強さは2ケあるいは3ケのデータがプロットされている。斜め引張強さのばらつき要因について、もっとも影響が大きいと考えられるのは、引張試験片が直列系であるので最弱年輪

図4 最大荷重時のテーパー梁応力度の分布

図6 斜め引張試験片

図5 木材の異方性主軸に対するテーパー梁試験体・材料試験片の採取方向

表4 材料試験結果

製材	縦引張 F _x (MPa)	横引張 F _y (MPa)	せん断 F _{xy} (MPa)	斜め引張 (1) F _k (MPa)	斜め引張 (2) F _k (MPa)	備考 (k = tanβ)
F3'	49.1 69.3 51.9	3.86 4.12 4.46	6.20 6.38 5.79	25.6 32.1 27.7	19.2 20.7	斜め引張(1) k = 0.2 斜め引張(2) k = 0.4
平均	56.8	4.15	6.12	28.5	19.9	
D1	46.8 47.2	4.16 3.50	4.42 4.47	20.1 18.3		斜め引張(1) k = 0.2 該当なし
平均	47.0	3.77	4.52	19.4		
N3	63.1 50.5	3.33 3.64	5.37 4.55	18.9 18.4		斜め引張(1) k = 0.2 該当なし
平均	56.8	3.43	5.15	18.4		
D4	56.3 67.4 58.9	4.59 4.73 4.83	4.81 4.90 5.93	残材不足 のため試 験片無し	15.8 15.1	斜め引張(1) k = 0.2 斜め引張(2) k = 0.5
平均	60.9	4.72	5.21		15.5	
C2	56.1 60.3 49.4	4.45 5.85 5.42	6.50 6.20 5.71	5.41 8.07 7.17		斜め引張(1) k = 0.9 該当なし
平均	55.3	5.24	6.14	6.88		
SPFB	100.0 104.9 99.2	3.67 3.83	8.26 8.63 8.28	34.4 28.3 31.0		斜め引張(1) k = 0.25 該当なし
平均	101.4	3.75	8.39	31.2		
SPFA	100.3 100.8 104.9	3.91 3.55 4.27	8.82 8.26 7.93	15.7 16.5 16.8	7.45 8.10 6.45	斜め引張(1) k = 0.5 斜め引張(2) k = 1.0
平均	102.0	3.85	8.34	16.3	7.33

図7 テーパー梁の割裂破壊応力度と斜め引張強さの相関

層のデータが抽出され値が低めになること、一方、繊維傾斜角が小さい場合には試験片軸に対して斜めに走る長い破断線が途中で繊維を分断する方向に向きを変え値が高めになることである（図7の縦軸25～35MPaのデータはそのような破断線をもつものである）。これらのばらつきを考慮すれば、図7より、テーパ梁のテーパ方向の割裂破壊応力度は同じ繊維傾斜角をもつ斜め引張強さと同じであると考えてよいであろう。すると、応力関数法により得られるテーパ縁応力度の最大値を斜め引張強さと等置することによって、テーパ梁の割裂破壊荷重が予測できることになる。これについては、斜め引張強さの予測方法とも組み合わせて後で検討する。

6. 斜め引張強さの予測

次に、斜め引張強さが木材の自然軸（直交異方性主軸）に関する基本強さとどのような関係にあるかということが問題となる。これは、直交異方性材料の強度則の問題で、未だ解決されていない。古典的な最大応力説と最大ひずみ説は実態と合わないことが多いのであまり信用されていない。現在では、相互作用説が有力であるが、それにしても諸説が唱えられている。ここでは、わが国の学会規準⁶⁾と米国の木構造便覧⁷⁾で採用されている Hankinson 式と Norris 式、複合材料工学の分野⁸⁾で有力とされている Tsai-Hill 式を用いて今回のデータを検証してみる。これらはいずれも応力成分間の干渉効果を考慮した相互作用説である。

まず、Hankinson 式¹¹⁾によると、平面応力状態で考えたときの斜め引張強さは、縦引張強さ F_x と横引張強さ F_y から次のように計算される。

$$F_{k(H)} = \frac{F_x \cdot F_y}{F_x \sin^2 \beta + F_y \cos^2 \beta} \quad (7)$$

この Hankinson 式は元々圧縮強さに対する相関式として提案されたもので、当初、指数 $n=2$ とされていたが、後の研究により $n=2 \sim 2.5$ の範囲にあることが確かめられ、引張では $n=1.5 \sim 2$ とされている¹²⁾。なお、Hankinson 式ではせん断強さ F_{xy} が関与しない。前出表4の製材毎に得られている F_x と F_y の平均値を用いて(7)式による斜め引張強さの予測値 $F_{k(H)}$ を同じく表4の実験平均値 $F_{k(\text{exp})}$ と比較したのが図8(1)である。図の縦軸は $F_{k(H)}/F_{k(\text{exp})}$ としたので、1.0を超える場合は過大予測、1.0未満は過小予測となる。 $n=1.5$ としたときの比は0.7から1.3の範囲にばらつき、 $n=2$ としたときはすべて過大予測となる。Hankinson 式による斜め引張強さの予測精度はあまり良好とは言えない。

次に、米国木構造便覧に採用されている Norris 式¹³⁾は次の球面相関式である。この式は、木材が飛行機に使われていた頃の技術を集大成した ANC-18の初版¹⁴⁾にも掲載されている。

$$\left(\frac{\sigma_x}{F_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{F_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{F_{xy}}\right)^2 = 1 \quad (8)$$

この式に(6)式を代入し、 $\sigma_r = F_k$ において、整理すると次式が得られる。

$$\frac{1}{F_{k(N1)}^2} = \frac{\cos^4 \beta}{F_x^2} + \frac{\sin^4 \beta}{F_y^2} + \frac{\sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta}{F_{xy}^2} \quad (9)$$

後年、Norris は当初の球面相関式を改め、Henky-vonMises のせん断ひずみエネルギー説に基づく次式の楕円面相関式を提案し、このほうが精度が高いとしている¹⁵⁾。ただし、米国木構造便覧では採用されていない。

$$\left(\frac{\sigma_x}{F_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{F_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{F_{xy}}\right)^2 - \frac{\sigma_x \cdot \sigma_y}{F_x \cdot F_y} = 1 \quad (10)$$

これについても同様に、斜め引張強さの式に変換すると、次式が導かれる。

$$\frac{1}{F_{k(N2)}^2} = \frac{\cos^4 \beta}{F_x^2} + \frac{\sin^4 \beta}{F_y^2} + \left(\frac{1}{F_{xy}^2} - \frac{1}{F_x F_y}\right) \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta \quad (11)$$

これら Norris 式についても同様に、予測値 $F_{k(N1)}$ と $F_{k(N2)}$ を実験値と比較したのが図8(2)である。せん断応力度の影響を考慮しているため、Hankinson 式より予測精度は良い。球面相関と楕円面相関の予測精度に大差はない。

最後に、Tsai-Hill 式^{16),17)}について検証してみる。それは次式で表される。

$$\left(\frac{\sigma_x}{F_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{F_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{F_{xy}}\right)^2 - \frac{\sigma_x \sigma_y}{F_x^2} = 1 \quad (12)$$

これについても同様に、斜め引張強さの式に変換すると、次式が導かれる。予測精度を同様に図8(3)に示す。

$$\frac{1}{F_{k(T-H)}^2} = \frac{\cos^4 \beta}{F_x^2} + \frac{\sin^4 \beta}{F_y^2} + \left(\frac{1}{F_{xy}^2} - \frac{1}{F_x^2}\right) \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta \quad (13)$$

今回、Norris の球面相關式(9)、同じく楕円面相關式(11)、Tsai-Hill 式(13)の3者にほとんど差が出ないのは、木材の場合、縦引張強さ F_x が横引張強さ F_y とせん断強さ F_{xy} より圧倒的に大きな値を持つため、相關式(11)、(13)の第3項に現れる $1/F_x F_y$ あるいは $1/F_x^2$ が $1/F_y^2$ に比べて小さいことがその原因である。したがって、そのような木材に限定すれば、米国木構造便覧に採用されている Norris の球面相關式がもっとも簡便で精度も十分であると言えるであろう。なお、Norris 式および Tsai-Hill 式は、弾塑性材料の降伏条件を弾脆性材料の破壊条件にスライド適用したものであって、予測精度は良好とは言え、木材の脆性的な破壊（ここでは割裂破壊）のメカニズムについては何も語ることができないということは留意しておく必要がある。

7. テーパー梁の割裂荷重の予測

本稿の締めくくりとして、木材の自然軸に関する基本強さ、すな

わち、縦引張強さ F_x 、横引張強さ F_y 、およびせん断強さ F_{xy} から、テーパー木梁の割裂荷重がどの程度の精度で予測可能かを検討してみる。割裂荷重は、応力関数法で導かれるテーパー縁のテーパー方向最大応力度を斜め引張強さと等値させることによって予測する。このとき、斜め引張強さは、前章で紹介した Hankinson 式 ($n=1.5$ と $n=2$)、Norris 式（球面相關と楕円面相關）、および Tsai-Hill 式で予測する。その結果を表5にまとめた。割裂破壊荷重の実験値に対して、Hankinson 式($n=1.5$)は0.55~1.44倍(平均1.03倍)、Hankinson 式($n=2$)は0.69~2.05倍(平均1.46倍)、Norris 式（球面相關）は0.65~1.30倍(平均1.02倍)、Norris 式（楕円面相關）は0.66~1.36倍(平均1.07倍)、Tsai-Hill 式は0.65~1.31倍(平均1.03倍)となっている。この割裂荷重の予測誤差は前節の斜め引張強さの予測誤差と同傾向であるが、誤差範囲がやや大きくなっている。Hankinson 式はせん断の影響を指数 n で調整しなければならないという欠点を持っているが、この場合、 $n=1.5$ とすれば他の相互作用式と同等の予測精度となる。Norris 式（球面相關と楕円面相關）と Tsai-Hill 式はほとんど同じ予測値を与え、テーパーが緩やかな場合に過大評価、急勾配になると過小評価の傾向を示す。

8. 結び

テーパー梁の割裂破壊荷重は、応力関数法で求められるテーパー縁のテーパー方向応力度の最大値を木材の斜め引張強さと等置することによって概ね予測できる。斜め引張強さは繊維を傾斜させた引

図8 斜め引張強さの実験値と各種予測値の関係

表5 割裂破壊荷重の実験値と各種予測値の比較（荷重の単位はkN）

テーパー梁	製材	k	実験値 Pm	Hankinson式				Norris式				Tsai-Hill式	
				Pm(H1) n=1.5	Pm(H2) n=2.0	Pm(H1) /Pm	Pm(H2) /Pm	Pm(N1) 球面相關	Pm(N2) 楕円面相關	Pm(N1) /Pm	Pm(N2) /Pm	Pm(T-H)	Pm(T-H) /Pm
①	F3'	0.2	7.25	8.95	12.99	1.23	1.79	9.23	9.81	1.27	1.35	9.27	1.28
②	D1	0.2	2.27	3.27	4.66	1.44	2.05	2.96	3.10	1.30	1.36	2.97	1.31
③	N3	0.2	6.15	6.87	10.36	1.12	1.68	6.86	7.25	1.12	1.18	6.88	1.12
④	D4	0.2	4.43	6.23	8.94	1.41	2.02	5.22	5.44	1.18	1.23	5.24	1.18
⑤	SPFB	0.25	15.56	14.39	23.79	0.92	1.53	17.76	19.04	1.14	1.22	17.80	1.14
⑥	F3'	0.4	7.73	6.71	9.74	0.87	1.26	7.02	7.45	0.91	0.96	7.05	0.91
⑦	SPFA	0.5	16.68	9.19	13.22	0.55	0.79	11.11	11.59	0.67	0.69	11.13	0.67
⑧	D4	0.5	6.84	6.15	8.56	0.90	1.25	5.36	5.56	0.78	0.81	5.37	0.79
⑨	C2	0.9	5.06	6.23	7.58	1.23	1.50	6.12	6.32	1.21	1.25	6.14	1.21
⑩	SPFA	1.0	12.29	7.17	8.52	0.58	0.69	8.03	8.15	0.65	0.66	8.03	0.65
平均													
						1.03	1.46			1.02	1.07		1.03

張試験片から実験的に求めることができるが、縦引張強さ・横引張強さ・せん断強さを基に Norris 式あるいは Tsai-Hill 式から推定することも可能である。ただし、今回の実験での誤差範囲は±30%程度で、繊維傾斜角が小さいとき過大評価、繊維傾斜角が大きいとき過小評価となる傾向がある。なお、Hankinson 式はせん断応力の項を陽に含んでおらず、その影響を取り込むための指数が予め決められないので予測手法として難がある。

本研究により、テーパー梁の割裂破壊は、破壊力学ではなく材料力学が解決できる一つの破壊事象であることが明らかとなった。テーパー縁には予き裂の存在を仮定することができないので材料力学的アプローチが適切であることは自明であるが、テーパーに特異点が存在しないということもそれが功を奏する要因である。今後、予き裂が存在しなくても特異点が存在する場合の割裂破壊に対して材料力学的アプローチが通用するかどうか大きな課題となるであろう。例えば、テーパー根元やコの字形の切欠きコーナーからの割裂、ボルトやドリフトピンなどの接合具周辺からの割裂がそのような事例である。そのときには、木材の異方性に加えて層状不均一性が関わってくると予想される。この問題の解決には少々時間が掛かりそうである。

謝辞

本稿のテーパー梁の曲げ実験において伊藤拓海君(東京大学助教)の協力を得た。

参考文献

- 1) 竹山謙三郎：木構造（増訂版）、丸善出版、東京、1952.
- 2) Maki, A. C. and Kuenzi, E. W.: Deflection and Stresses of Tapered Wood Beams, Research Paper, US Forest Service, Vol. 34, pp.1-53, 1965.
- 3) 沢田 稔、丸山 武：木質テーパービームに関する研究、北海道大学農学部演習林研究報告、第27巻第2号、pp.395-427, 1970.
- 4) 桑村 仁：テーパー木梁のパラドックス、日本建築学会大会学術講演梗概集、構造Ⅲ、No. 22143, pp.285-286, 2008.9.
- 5) 桑村 仁：テーパー梁の応力分布－鉄骨木質構造の研究 その3－、日

本建築学会構造系論文集、第74巻、第635号、pp.89-95, 2009.1.

- 6) 日本建築学会：木質構造設計規準・同解説－許容応力度・許容耐力設計法－（第4版）、東京、2006.
- 7) American Institute of Timber Construction: Timber Construction Manual (Fifth Edition), John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
- 8) 邊 吾一、石川隆司：先進複合材料工学、培風館、2005.
- 9) 桑村 仁：切欠き木材梁の割裂応力度－鉄骨木質構造の研究 その1－、日本建築学会構造系論文集、第619号、pp.111-118, 2007.9.
- 10) 桑村 仁：くさび押込み試験による木材の割裂補強の研究－鉄骨木質構造の研究 その2－、日本建築学会構造系論文集、第73巻、第632号、pp.1779-1786, 2008.10.
- 11) Hankinson, R. L.: Investigation of Crushing Strength of Spruce at Varying Angles of Grain, Air Service Information Circular, No. 259, pp.3-15, 1921.
- 12) Forest Products Laboratory: Wood Handbook-Wood as an Engineering Material, General Technical Report, FPL-GRT-113, U.S. Department of Agriculture, Madison, WI, 1999.
- 13) Norris, C. B. and McKinnon, P. F.: Compression, Tension and Shear Tests on Yellow-Poplar Plywood Panels of Sizes That Do Not Buckle with Tests Made at Various Angles to the Face Grain, Forest Products Laboratory, Report No. 1328, pp.1-26, 1956.2.
- 14) Army-Navy-Civil Committee on Aircraft Design Criteria: Design of Wood Aircraft Structures, ANC Bulletin No. 18 (ANC-18), 1944.6.
- 15) Norris, C. B.: Strength of Orthotropic Materials Subjected to Combined Stresses, Forest Products Laboratory, Report No. 1816, pp.1-40, 1962.5.
- 16) Hill, R.: A theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals, Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A, Vol. 193, pp.281-297, 1948.5.
- 17) Tsai, S. W.: Strength Characteristics of Composite Materials, NASA Contractor Report 224, 1964.4.

注

注1) 桑村 仁：鉄骨木質構造の発展に向けた木材の割裂に関する研究（その7. テーパー木梁の割裂破壊実験）、（その8. テーパー木梁に用いた木材の材料特性）、（その9. テーパー木梁の割裂破壊条件）、2008年度日本建築学会関東支部研究報告集、Nos. 2027, 2028, 2029, 2009.2.

(2009年1月5日原稿受理、2009年3月24日採用決定)