周期的な水平外力を受ける水の入った円筒タンクの非線形振動応答 － 定常応答に出現する分数調波振動の不安定領域の発生機構－

NONLINEAR OSCILLATION RESPONSES OF CYLINDRICAL TANK WITH WATER ON SHAKING TABLE

皆 川 洋 一*

Yuuichi MINAKAWA

Some nonlinear vibration responses were observed in cylindrical tank with water on shaking table driven by periodic sinusoidal wave. The linear vibration theories never explain occurring these vibration phenomenon. It is reported that they might be caused by initial imperfection of cylindrical shell. Assuming that these responses were caused by geometrical nonlinearity of the system with elastic container and water, we have been studying these nonlinear responses from both theory and vibration test. Here, we report subharmonic vibration responses that branch out on periodic stationary response of the vibration system. They make instability regions on response curves, where subharmonic vibration responses become significant vibration. We show several mechanisms that generate the instability regions of subharmonic vibration on response curves.

Keywords : *Vibration of Cylindrical Tank, Out-of-roundness Response of Cylindrical Tank, Subharmonic Oscillation Response of Tank, Instability Regions of Stationary Oscillation*

円筒タンクの振動、円筒タンクのオバリング、円筒タンクの分数調波振動応答、定常応答の不安定領域

1. はじめに

水の入った円筒タンクを水平振動台に載せる振動実験は、二つの側面から研究されている。一方は、容器が剛であるとして、主に水の振動 (sloshing 振動) を対象にするもの^{1),6)}、他方は容器と水の相互作用のバルジング (bulging) 振動に焦点を合わせたもの³⁾である。Clough 等²⁾は水の入った円筒タンクの水平振動実験を行い、線形振動からは予想できない円断面が変形 (out-of-roundness) する応答等を報告し、線形振動理論に基づいては説明できない振動が出現すること、この原因はタンクに存在する初期不整であろうと予測した。著者等は、水平外力を受ける円筒タンクに生起するこれらの応答は容器と水の幾何学的非線形性に起因する非線形振動であると推察し、理論^{5),8)} 実験⁹⁾⁻²¹⁾の両面から検討してきている。特に、ある外力振動数の下で、分数調波振動成分が分岐し、強烈な非線形振動に成長する不安定領域が発生すること、この領域の発生に関与する条件等を報告して来た。また、嶋本等¹⁷⁾は、周方向展開次数 $N=8$ の振動モードが円筒シェルの周方向フーリエ級数の展開次数 (以後周方向展開次数と記述する) $N=6$ が生起する不安定領域に影響を及ぼしていることを指摘した。本論文は、周方向の振動モードを 17 点において測定した実験成果を示し、次の 3 点を明らかにする。

1. 円筒タンクに入る水の量を連続的に変化させた振動モデルの非線形応答曲線を観測し、発生した分数調波振動の不安定領域、およびこの振動モデルの固有振動数と振動モードを特定する。
2. 各不安定領域の発生に関与する振動モードを分析する。
3. 分数調波振動が分岐する不安定領域の定性的な発生機構、すなわ

ちこの不安定領域を形成する振動モード、および固有振動数と外力振動数の関係を明らかにする。

2. 供試体と応答測定

実験に用いた水平振動台 (寸法 200mm × 200mm)、及び円筒タンク供試体^{12),21)}、および測定器等のアイソメ図を Fig.1 に示す。図中の供試体は周方向に 2 列のひずみゲージを貼付したモデルである。

Fig.1 Isometric Projection of a Cylindrical Tank on Shaking Table

* 鹿児島大学 理事・工博

Executive Director, Kagoshima University, Dr. Eng.

2. 1 供試体と周方向の歪測定

供試体は直径84mm、高さ200mm、最上部にアクリル製の厚さ8mmのフタをもつ円筒タンクである。フタの中央に直径8mmの孔があり、水の出入れに利用された。円筒シェルは厚さ約0.51mmの塩化ビニル・フィルムを重ね接合し、造られた。実験の供試体Mv9、およびMv25ののりしろはそれぞれ7mm、及び5mmとし、ゼリー状のシアノアクリレート系の接着剤を利用した。Mv9のみ重ね接合上のフィルム外面を矢型状に面取りした。この供試体は、1周に17枚の歪ゲージ(KLM-6-A9 KYOWA)をタンク底から85mm、Mv25ではタンク底から64mm、および128mmの位置2周にゲージを貼付した。

近年、測定装置のAD変換時間が早くなり、高い外力振動数の下での応答の測定が可能となった。また、周方向展開次数 $N=8$ の振動モードが分数調波振動の生起に関与するので、周方向の17箇所のひずみ応答を測定し、円筒タンクの展開次数 $N=0$ から8の振動モードを分析した。また、供試体の変位応答は3箇所¹²⁾で測定された。

2. 2 データの測定と測定時間差の補正

測定用のPCに搭載したAD変換ボード(ADM-681PCI,MICRO SCIENCE)3枚を用いて、応答をデジタル量に変換した。

2.2.1 有限フーリエ級数表示と時間補正

有限フーリエ級数を用いて、読取りデータを変換するとき、通常はサンプリング個数 M を偶数とする。偶数の M を採用し、外力振動数 $\omega(\text{rad/s})$ と、外力の周期 $T(=2\pi/\omega)$ の p 倍の時間を M 等分したサンプリング時間間隔を用いた。このデータは次のように表される。

$$X_m \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{M/2-1} (A_k \cos \frac{2\pi km}{M} + B_k \sin \frac{2\pi km}{M}) \quad (m=0,1,2,\dots,M-1) \quad (1)$$

$$A_k = \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X_m \cos \frac{2\pi km}{M}, B_k = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} X_m \sin \frac{2\pi km}{M} \quad (k=0,1,2,\dots,\frac{M}{2}-1) \quad (2)$$

ここに、高次項 $A_{M/2}$ を無視した。偶数 M が2の累乗であると、(2)式の変換にFFTを利用でき、効率良くAD変換が遂行できる。

AD変換ボードの1チャンネルの変換時間はほぼ一定の値約1msecであった。実験での最大サンプリングは40点であり、3枚のボードでAD変換すると最大で14msec程度の時間の遅れが生ずる。各測定点の値を有限フーリエ級数に変換した後、読取り時間の遅れを補正¹²⁾した。この結果、各測定箇所 i の測定データを統一された時刻 t の原点を有する次のような連続関数の応答として表すことができる。

$$X_i(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{M/2-1} (\alpha_k \cos \frac{k\omega t}{p} + \beta_k \sin \frac{k\omega t}{p}) \quad (3)$$

ここに、係数 α_k 、および β_k は(2)式の係数を用いて、定められる。本研究における振動実験では、測定パラメータ $p=6$ 、 $M=64$ を採用した。これらのデータから、外力振動数と同一の振動数を有する基本振動成分($k=6$)、外力の3倍の振動数を有する3倍高調波振動成分($k=18$)から、外力の1/3倍の振動数を有する1/3倍分数調波振動成分($k=2$)までの時刻に関する振動成分を分析することが可能となる。

2.3.2 円筒タンクの振動における周方向モード解析

奇数のサンプリング数 N_c を用いたので、周方向の歪ゲージ応答に対応する有限フーリエ級数は次式を用いることになる。

$$X_\mu = \frac{\bar{\alpha}_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{(N_c-1)/2} (\bar{\alpha}_\nu \cos \frac{2\pi \nu \mu}{N_c} + \bar{\beta}_\nu \sin \frac{2\pi \nu \mu}{N_c}) \quad (\mu=0,1,2,\dots,N_c-1) \quad (4)$$

$$\bar{\alpha}_\nu = \frac{2}{N_c} \sum_{\mu=0}^{N_c-1} X_\mu \cos \frac{2\pi \nu \mu}{N_c}, \bar{\beta}_\nu = \frac{2}{N_c} \sum_{\mu=1}^{N_c-1} X_\mu \sin \frac{2\pi \nu \mu}{N_c} \quad (\nu=0,1,\dots,\frac{N_c-1}{2}) \quad (4-a,b)$$

ここに、 N_c は奇数であり、本論文では17とする。(3)式を連続関数表示して、次式を得る。

$$X(\theta) = \frac{\bar{\alpha}_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{(N_c-1)/2} (\bar{\alpha}_\nu \cos \nu\theta + \bar{\beta}_\nu \sin \nu\theta) \quad (5)$$

ここに、 $\theta = 2\pi\mu/N_c$ 。

今、周方向の N_c 個のデータが時刻応答、および周方向の並びに関して、それぞれ(3)式、及び(5)式として表されているとする。このとき、(2)式を(4)、および(5)式に代入して、整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta, t) = X_\mu(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{Q_{00}^C}{2} + \sum_{\nu=1}^{(N_c-1)/2} (Q_{\nu k}^C \cos \nu\theta + Q_{\nu k}^S \sin \nu\theta) \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^{M/2-1} \left[\left\{ \frac{Q_{0k}^C}{2} + \sum_{\nu=1}^{(N_c-1)/2} (Q_{\nu k}^C \cos \nu\theta + Q_{\nu k}^S \sin \nu\theta) \right\} \cos \frac{k\omega t}{p} \right. \\ &\left. + \left\{ \frac{R_{0k}^C}{2} + \sum_{\nu=1}^{(N_c-1)/2} (R_{\nu k}^C \cos \nu\theta + R_{\nu k}^S \sin \nu\theta) \right\} \sin \frac{k\omega t}{p} \right] \quad M:\text{even}, N_c:\text{odd} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} Q_{\nu k}^C &= \frac{2}{N_c} \sum_{\mu=0}^{N_c-1} \alpha_{\mu k} \cos \frac{2\pi \nu \mu}{N_c}, Q_{\nu k}^S = \frac{2}{N_c} \sum_{\mu=1}^{N_c-1} \alpha_{\mu k} \sin \frac{2\pi \nu \mu}{N_c}, \\ R_{\nu k}^C &= \frac{2}{N_c} \sum_{\mu=0}^{N_c-1} \beta_{\mu k} \cos \frac{2\pi \nu \mu}{N_c}, R_{\nu k}^S = \frac{2}{N_c} \sum_{\mu=1}^{N_c-1} \beta_{\mu k} \sin \frac{2\pi \nu \mu}{N_c}; (\nu=1,2,\dots,\frac{N-1}{2}) \quad (7) \end{aligned}$$

(6)式は、各振動成分(基本振動成分、高調波振動成分、分数調波振動成分)と周方向 θ に関する2方向の有限フーリエ級数表示である。本研究において、各振動成分 k に対する各周方向展開次数 ν の歪応答曲線は、次式の歪と振動数の関係を用いる。

$$\bar{\varepsilon}_{\nu k} = \sqrt{(Q_{\nu k}^C)^2 + (Q_{\nu k}^S)^2 + (R_{\nu k}^C)^2 + (R_{\nu k}^S)^2} \quad (\nu=0,1,\dots,8; k=0,2,3,6,12,18) \quad (8)$$

また、(6)式の歪の2乗平均値 $(\varepsilon_{rms})^2$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{rms})^2 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{2\pi p} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi p/\omega} \{\varepsilon(\theta, t)\}^2 d\theta dt = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} (\bar{\varepsilon}_{00})^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{(N_c-1)/2} (\bar{\varepsilon}_{\nu 0})^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M/2-1} (\bar{\varepsilon}_{0k})^2 + \sum_{\nu=1}^{(N_c-1)/2} \sum_{k=1}^{M/2-1} (\bar{\varepsilon}_{\nu k})^2 \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

3. 水の入った円筒タンクの応答

3. 1 基本振動成分の応答と固有振動数

3.1.1 基本振動数成分の応答

系の基本的な振動特性を把握するために、水高(50-190mm)をパラメータとし、外力加速度の実効値 $0.5g$ とし、外力振動数Hz(= $\omega/2\pi$)を40-720Hzまで変化させて得られる供試体の応答を観測した。この加速度は水平振動台の加速度であり、単位 g は 9.80665 m/s^2 を表す。供試体Mv9の水高(Water Height, 図中ではWHと表現する)140mmにおける基本振動成分(外力振動数と同一の振動数を有する振動成分)の応答を有限フーリエ級数($N=0,\dots,8$)に分解してFig.2に示す。図中に各周方向展開次数を右上に、それに対応するバルジング振動の固有振動数の記号(3.1.2に示す)を付した。

3.1.2 固有振動数

系の固有振動数は上述した外力加速度 $0.5g$ の応答のみでは特定し難いケースがある。ここでは、有限要素法の解析による固有振動数²¹⁾を参照しながら、固有振動数を特定した。この解析において、円筒シェル、およびフタは2節点の円錐台要素、水はポテンシャル流体と仮定され3節点三角形のリング要素にモデル化された。塩化ビニル・フィルムのヤング率2.8GPa、ポアソン比0.35を解析に用いた。

供試体Mv9、およびMv25の水高50mm-190mmまで増分10mmに対応する各周方向展開次数に対応する最小のバルジング振動の固有振動数 ω_{n1} ($N=0,\dots,8$)、及び2番目に小さいバルジング振動の固有振動数 ω_{n2} ($N=1,5,6$)をそれぞれTable1、およびTable2に示す。表中において、固有振動数 ω_{nj} を n,j と表記した。固有振動数は実験時の気温、水温、外力加速度の大きさ等の影響を受け、数Hz程度の変動²¹⁾を示す。巨視的に見ると、接合ののりしろが5mmの供試体Mv25はそれが7mmの供試体Mv9より低い固有振動数を有する。一方、Mv25

は、Mv9 より高次振動モードの固有振動数が若干高くなっている。これは、Mv25 は周方向に 2 列の歪ゲージを持ち、母線周りの曲げ剛性が 1 列のみの Mv9 より高くなっていることの影響と思われる。

3.2 非線形振動の応答

3.2.1 正規化された振動モードベクトルの定義

分岐した分数調波振動の振動モードの類似性を判定するために、次のような振動モードを定義する。外力振動数 f Hz における 1/2 倍

Fig.2 Strain-Frequency Curves for each N of the Fundamental Oscillation Component (Mv9,0.5g,WH140mm)

Table 1. Eigen Frequencies of Specimen Mv9

Water Height (mm)	Vibration Modes & Eigen Frequencies (Hz)											
	0.1	1.1	1.2	2.1	3.1	4.1	5.1	5.2	6.1	6.2	7.1	8.1
190	188	88	344	142	106	114	150	214	254	272	332	502
180	186	100	352	144	106	114	154	214	254	272	340	502
170	190	114	360	144	108	116	158	206	250	278	348	502
160	196	114	368	150	108	120	164	200	256	285	354	506
150	206	124	376	154	112	122	168	205	256	296	358	516
140	220	132	372	160	116	124	170	218	260	—	356	514
130	232	140	374	168	122	128	176	232	264	310	366	515
120	246	150	380	178	128	130	178	244	266	328	364	514
110	284	158	386	190	136	140	182	284	254	360	360	516
100	304	164	394	204	146	152	188	300	258	378	360	518
90	330	170	418	226	160	166	196	374	264	410	364	520
80	348	176	434	254	192	178	210	406	272	440	366	525
70	380	180	470	282	220	200	230	446	282	514	370	536
60	435	184	540	322	268	238	256	566	314	568	400	556
50	570	184	—	—	293	278	302	—	348	—	438	—

分数調波振動モードの各周方向展開次数 ($N=0, \dots, 8$) の歪振幅を成分とし、ノルムを 1 に正規化したベクトルを V_f^{gWH} と表す。例えば、外力加速度 $2g$ 、水高 100mm、および 90mm に対応するそれぞれの外力振動数 f_1 、及び f_2 における不安定領域において、この正規化された歪振幅ベクトルの内積 $V_{f1}^{2g100} \cdot V_{f2}^{2g90}$ を評価し、振動モードの類似性の判断情報とする。

3.2.2 高調波振動成分の応答

円筒タンクに生じする高調波振動応答の例として、供試体 Mv9、水高 140mm、外力振動数 $0.5g$ における 2 倍高調波振動成分の応答を有限フーリエ級数 ($N=0, \dots, 8$) に分解して Fig.3 に示す。図中の周方向展開次数における最小バルジング振動に対応する固有振動数の 1/2 倍の振動数に記号を付した。外力振動数が周方向展開次数 $N=0, 1, 5, 6$ に対応する最小バルジング振動の固有振動数の 1/2 倍近傍において、2 倍高調波振動応答が大きく成長し、高調波振動応答の共振が生じする。また、水平振動の主共振領域（外力振動数 ω_{11} 近傍）において、基本振動応答 (Fig.2) の振幅増加に伴い全ての周方向展開次数の振動モードに対する 2 倍高調波振動応答が成長する。

3.2.3 分数調波振動と不安定領域

供試体 Mv9、外力振動数 $1g$ 、水高 140mm、外力振動数は 300-600Hz における 1/2 倍分数調波振動成分、および 1/3 倍分数調波振動成分の応答を有限フーリエ級数 ($N=0, \dots, 8$) に分解し、それぞれ Fig.4、および Fig.5 に示す。Fig.4 の外力振動数 496-522Hz において、1/2 倍分数調波振動応答が分岐する。この応答の主振動モードである周方向展開次数 $N=6$ の歪振幅は 572μ を示し、 $N=0, 5$ に対応する振動モードの歪振幅はそれぞれ 210μ 、 172μ を示す。この不安定領域は、外力振動数が周方向展開次数 $N=6$ の最小バルジング振動の固有振動数 ω_{61} の 2 倍の振動数 B_{61} ($=260 \times 2=520\text{Hz}$) 近傍に生じするタイプであり、ここでは B_{61} 型の不安定領域と分類する。この不安定領域は外力加速度が小さいとき、1/2 倍分数調波振動応答のみが生じする不安定領域として発生するが、応答が大きな振幅に成長すると、1/3 倍分数調波振動応答も混在する可能性が高い。外力振動数 500-502Hz において、周方向展開次数 $N=4$ が主振動モードとなる 1/3 倍分数調波振動応答が 2 次分岐 (Fig.5) した。

同一モデルで水高が異なる供試体 Mv9、外力振動数 $1g$ 、水高 80mm、外力振動数は 300-600Hz における 1/2 倍分数調波振動応答を

Table 2. Eigen Frequencies of Specimen Mv25

Water Height (mm)	Vibration Modes & Eigen Frequencies (Hz)											
	0.1	1.1	1.2	2.1	3.1	4.1	5.1	5.2	6.1	6.2	7.1	8.1
190	188	84	336	150	104	118	172	224	258	282	340	480
180	188	98	346	142	102	118	170	224	256	282	358	480
170	190	102	360	142	104	120	170	236	254	284	366	488
160	200	114	360	146	106	120	174	238	258	294	372	490
150	206	122	358	150	110	126	174	242	258	303	370	494
140	216	130	360	154	114	124	176	253	262	310	374	498
130	226	140	360	160	118	128	178	265	264	310	370	500
120	244	148	359	170	126	136	176	286	258	340	374	498
110	286	156	362	182	134	142	188	310	258	356	374	502
100	304	162	375	194	146	160	196	340	270	374	378	500
90	328	170	418	204	158	164	206	380	276	418	374	506
80	358	176	448	255	174	180	222	440	288	486	376	510
70	384	180	512	280	200	204	236	486	304	522	388	518
60	444	182	529	322	230	216	250	490	344	—	396	522
50	—	186	613	352	—	278	308	—	358	—	446	610

Fig.6 に示す。外力振動数 350-356Hz に周方向展開次数 $N=4$ の歪振幅が 146μ 、それ以外の周方向展開次数の歪振幅が 42μ 以下となる B_{41} ($=178 \times 2=356\text{Hz}$) 型の不安定領域が出現した。外力振動数 414-434Hz に周方向展開次数 $N=5$ の歪振幅が 365μ 、それ以外の展開次数の歪振幅が 79μ 以下となる B_{51} ($=224 \times 2=448\text{Hz}$) 型の不安定領域が出現した。一方、外力振動数 486-494Hz に周方向展開次数 $N=5$ 、および 6 の歪振幅がそれぞれ 116μ 、および 104μ 、それら以外の展開次数の歪振幅は 32μ 以下となる $1/2$ 倍分数調波振動応答が分岐した。この不安定領域は、外力振動数が周方向展開次数 $N=5$ 、および 6 に対応する 2 つ最小バルジング固有振動数の和 $A_{51,61}$ ($=210+272=482\text{Hz}$) 近傍のとき生起する。これを $A_{51,61}$ 型の不安定領域と分類する。

3.2.4 供試体 Mv9 (外力加速度 $1g$) の不安定領域

供試体 Mv9, 外力加速度 $1g$, 外力振動数 300-600Hz の下で観測された $1/2$ 倍分数調波振動, および $1/3$ 倍分数調波振動応答の不安定領域を Fig.7 に示す。不安定領域のハッチは生起する分数調波振動と主振動モードの周方向展開次数を表す。 $1/2$ 倍分数調波振動のうち主振動モードの周方向展開次数 N が 4,5,6,0, 及び 8 に対応して、それぞれハッチパターン $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 及び $\square$ を用い、 $1/3$ 倍分数調波振動のうち主振動モードの周方向展開次数 N が 4,5, 及び 6 に対応して、それぞれハッチパターン $\square$, $\square$, 及び $\square$ を用いた。両方の分数調波振動が生起した領域は、2 種類のハッチを重複して図

示した。前述した振動数 A_{41} , A_{51} , および A_{61} と水高の関係にそれぞれ記号 $\blacksquare$, $\blacklozenge$, 及び $\blacklozenge$ を付して Fig.7 に示した。外力振動数がこれらの振動数の近傍にあるとき、多くの水高において $1/2$ 倍分数調波振動応答が生起した。3.2.3 において、発生の機構が示されなかった不安定領域は 4 節, および 5 節において補足説明する。

4 分数調波振動の不安定領域の発生機構

非線形振動応答の定常的な応答曲線上に、ある条件の下で不安定状態が発生し、分数調波振動成分の応答が分岐する。一連の分岐応答が発生する領域は定常解の不安定領域を形成する。この代表的な発生機構を前節において例示した。それらの不安定領域の発生機構を類型化する。また、不安定領域において、さらに別な分数調波振動の不安定領域 (高次不安定領域) が発生したと推察される応答を示す。

この目的に必要ないくつかの振動数を定義する。振動数 B_{nj} , T_{nj} は系の固有振動数 ω_{nj} (n, j は自然数) の 2 倍, および 3 倍の値とする。

$$B_{nj}=2 \times \omega_{nj}, T_{nj}=3 \times \omega_{nj} \quad (10,11)$$

振動数 $A_{nj,mk}$ は系の二つの固有振動数 ω_{nj} , および ω_{mk} の和とする。

$$A_{nj,mk}=\omega_{nj}+\omega_{mk} \quad (12)$$

振動数 $S_{nj,mk}$ は系の二つの固有振動数 ω_{nj} , および ω_{mk} 差とする。

$$S_{nj,mk}=\omega_{nj}-\omega_{mk} > 0 \quad (13)$$

(1) 固有振動数の 2 倍近傍の不安定領域

Fig.3 Strain-Frequency Curves for each N of the 2nd Higher-Harmonic Fundamental Oscillation Component (Mv9,0.5g,WH140mm)

Fig.4 Strain-Frequency Curves for each N of the 1/2 Sub-Harmonic Fundamental Oscillation Component (Mv9,1.0g,WH140mm)

外力振動数が振動数 B_{nj} 近傍において、この固有振動数に対応する振動モードを主な振動モードとする 1/2 倍分数調波振動応答が生起する。この不安定領域の発生機構を B_{nj} 型と表す。1/2 倍分数調波振動応答が生起する時、3/2 倍分数調波振動応答も付随して生起する。1/2 倍分数調波振動応答が生起しても、その振幅が小さいとき、1/3 倍分数調波振動応答は生起しない。これを 3.2.3 に例示した。

(2) 二つの固有振動数の和近傍の不安定領域

外力振動数が二つの固有振動数 ω_{s1} 、および ω_{61} の和となる振動数 $A_{s1,61}$ 近傍において、これらに対応する二つの振動モードを主要な振動モードとする 1/2 倍分数調波振動応答が生起する。この不安定領域の発生機構を $A_{s1,61}$ 型と表す。この型の不安定領域において、1/3 倍分数調波振動応答が同時に生起する可能性が高い。

(3) 二つの固有振動数の差近傍の不安定領域

外力振動数が二つの固有振動数 ω_{81} 、および ω_{21} の差となる振動数 $S_{81,21}$ 近傍において、これらに対応する二つ振動モードが比較的大きな振動モードと成る 1/2 倍分数調波振動応答が生起する。

供試体 Mv9, 外力振動数 1g, 水高 140mm, 外力振動数 352-356Hz (Fig.4) において、周方向展開次数 $N=8,5,7,2$ 等の歪振幅がそれぞれ $116\mu, 99\mu, 90\mu, 73\mu$ の大きな振幅を示す 1/2 倍分数調波振動応答が分岐する。この不安定領域の振動数は $B_{s1}(=340\text{Hz})$, 固有振動数 $\omega_{71}(=356\text{Hz})$ の近傍にある。この不安定領域はこれらの要因の他、固有振動数 ω_{81} と

ω_{21} との差振動数 $S_{81,21}(=514-160=354\text{Hz})$ が関与する不安定領域であると判断した。固有振動数 ω_{81} は 514Hz であり、 $N=8$ の振動モードはこの不安定領域の振動数では通常大きな振幅を示さない筈なのに、この振動モードが最大の歪振幅を示したからである。この不安定領域の発生機構を $S_{81,21}$ 型と表す。この判断の補足データを示す。この不安定領域の外力振動数 356Hz における振動モードと不安定領域 B_{s1} 型にある水高 120mm, 90mm, 130mm, 及び 150mm の各不安定領域における

Fig.7 Instability Reson for Subharmonic Oscillation of Specimen Mv9(1g)

Fig.5 Strain-Frequency Curves for each N of the 1/3 Sub-Harmonic Fundamental Oscillation Component (Mv9, 1.0g, WH140mm)

Fig.6 Strain-Frequency Curves for each N of the 1/2 Sub-Harmonic Fundamental Oscillation Component (Mv9, 1.0g, WH80mm)

1/2 倍分数調波振動応答が最大の振幅となる外力振動数における振動モードベクトル (3.2.1) を Fig.8 に示す。水高 90mm, 120mm, 130mm と水高 140mm, 150mm の振動モードに大きな差異が認められる。前者の 3 ケースの応答は周方向展開次数 $N=5$ が主振動モードである。後者の 2 ケースでは周方向展開次数 $N=8$ が主振動モードであり, $N=7, 2$ 等の振動モードが前者より大きな応答を示す。これら 5 ケースの振動モードベクトルと B_{s1} 型の水高 130mm のベクトルとの内積 (3.2.1) を Table3 に示した。内積は振動モードの相違を数値化した指標と成り得る。

(4) 固有振動数近傍の不安定領域

主共振領域, すなわち外力振動数が周方向展開次数 $N=1$ の固有振動数 ω_{11} 近傍において, 外力加速度が大きくなると, 各周方向展開次数の歪み応答に 1/2 倍分数調波振動応答が生起する。2 次共振領域を形成する固有振動数 ω_{12} に対応する振動モードも大きな外力 (加速度) を受ければ, 同様な作用を有すると予測される。逆に, 大きな外力を受けなければ, 固有振動数近傍の外力振動数の下でも, 対応する振動モードの分数調波振動応答は生起し難いと判断される。

しかし, 上記 $S_{81,21}$ 型の不安定領域は, 固有振動数 ω_{11} の近傍にあり, $N=7$ に対応する振動モードも大きな応答 (Fig.8) を示した。複数の要因が重なる時, 外力振動数の近傍に固有振動数を有する振動モードも分数調波振動の不安定領域に関与するものと考えられる。すなわち, 外力加速度が増加して, 異なる振動モードによる不安定領域が

発生した後, この外力振動数の近傍に固有振動数を有する振動モードが不安定となり, この不安定領域の応答に混在する。このような複数の要因が構成する不安定領域が発生する際, ある固有振動数近傍に不安定領域が形成される例がこの $S_{81,21}$ 型の不安定領域である。

(5) 1/3 倍分数調波振動

1/3 倍分数調波振動のみが生起した応答は供試体 Mv25, 外力加速度 $2g$, 水高 90mm, 外力振動数 495Hz 近傍²¹⁾ (T_{11} に対応する) により観測された。周方向展開次数 $N=1$ の振動モードが最大の歪み 19μ 応答を示した。従来実験に用いた十数の供試体を含めても, 1/3 倍分数調波振動応答のみが生起した応答はこれのみであり, 同一のモデルの加速度を $2.5g$ としたケースでは 1/3 倍分数調波振動の不安定領域は出現しなかった。これらから, 1/3 倍分数調波振動のみが生起する不安定領域は生起し難いものと思われる。すなわち, 1/3 倍分数調波振動は 1/2 倍分数調波振動の不安定領域の中で生起するようである。このため, 1/3 倍分数調波振動の不安定領域の発生は非線形性が高く, 不安定領域と系の固有振動数に明確な関連を認め難い。

1/3 倍分数調波振動の不安定領域の例を示す。供試体 Mv9, 外力振動数 $2g$, 水高 190mm, 外力振動数 332-340Hz において, T_{41} (=342Hz) 近傍で 1/3 倍分数調波振動成分, 主振動モード $N=4$ の歪み振幅 350μ が生起した。この歪み振幅は, 2 番目, および 3 番目に大きな歪み振幅を持つ振動モード $N=0$, および 5 のそれぞれ 86μ , および 73μ と比較して十分大きい。また, この不安定領域は 1/2 倍分数調波振動の不安定領域 $A_{01,51}$ (=338Hz) とほぼ一致する。ゆえに, $A_{01,51}$ 型の不安定領域が T_{41} 型の不安定領域の発生に寄与していると判断される。ここで観測された 1/3 倍分数調波振動の振幅は, 1/2 倍分数調波振動応答の主振動モード $N=4$ の歪み振幅は 84μ と比較しても, 大きな応答であった。

(6) 分数調波振動の不安定領域発生機構のまとめ

発生機構 (1) は他の発生機構と独立に 1/2 倍分数調波振動の不安定領域を形成す。この不安定領域において, 外力加速度が増加すると, 1/3 倍分数調波振動が分岐することもある。

発生機構 (2) も独立に 1/2 倍分数調波振動の不安定領域を形成するので, 発生し易い不安定領域となる。この不安定領域において, 1/3 倍分数調波振動も随伴して生起することが多い。

発生機構 (3), (4), (5) は単独で生起することは珍しく, その他の発生機構 (1), (2) の要因が重複して, 1/2 倍分数調波振動の不安定領域を形成することが多いようだ。しかしながら, ある外力加速度の下で

Table 3. Inner Products of Modes Amplitude of 1/2-Subharmonic Oscillation Components

H mm	120	90	130	140	150
Hz	364	410	360	356	350
$V_{360}^{130} \cdot V_{Hz}^{WH}$	0.985	0.967	1	0.774	0.730

Fig.9 Instability Region for Subharmonic Oscillation of Specimen Mv9(1g)

Fig.10 Instability Region for Subharmonic Oscillation of Specimen Mv9(2g)

— 1467 —

有振動数はこの水高では極めて隣接した値を有するので、 $A_{41,11}$ と B_{41} との両方が関与していると判断する。

この Fig.11 と供試体 Mv9 (Fig.9, Fig.10) との不安定領域の類似性を概説する。外力振動数が比較的低い不安定領域 B_{41} , B_{51} , および $A_{01,51}$ 等の不安定領域は、上述した発生機構を利用して説明でき、両者とも類似した不安定領域を形成する。水高 190mm の応答において、固有振動数 ω_{41} の 3 倍の外力振動数近傍 346-356Hz の下で、1/3 倍分数調波振動の不安定領域が生じたのも、両方の供試体に共通している。一方、供試体 Mv25、外力加速度 2g において、固有振動数 ω_{61} が関与する B_{61} 型の不安定領域は発生せず、供試体 Mv9 と大きな相違を示した。

供試体 Mv9 等において、固有振動数 ω_{61} の 2 倍（振動数 B_{61} ）と固有振動数 ω_{81} は類似した値をとる。 B_{61} 型の不安定領域が生起すると、周方向展開次数 $N=8$ 、および $N=0$ の振動モードの振幅も大きい応答を形成する。故に、振動数 B_{61} と ω_{81} とが複合して、1/2 倍分数調波振動の不安定領域をつくる。しかしながら、供試体 Mv25 等において、 B_{61} 型の不安定領域は発生し難く、複合した不安定領域も形成されなかった。この供試体において、振動数 B_{61} と ω_{81} と値の相違が大きいかも要因のひとつであろう。

6. 結語

本論文で報告している実験的研究から、周期的な水平外力を受ける水の入った円筒タンクに次のような非線形振動応答、および分数調波振動の不安定領域の出現が観測される。

- 1) 水の入った円筒タンクが周期的な水平外力を受けた時、高調波振動や分数調波振動を伴う非線形振動応答が生起する。このうち、分数調波振動応答は定常的な応答曲線から分岐する振動として出現し、応答曲線上に不安定領域を形成し、かつ振幅の大きな応答を示す。
- 2) この系の定常応答に 1/2 倍分数調波振動応答が初めて生起する不安定領域と主振動モードの関係、すなわち定常応答曲線から分数調波振動が発生する機構は、系のバルジング固有振動数と対応する固有振動モードから予測することが可能である。外力がある程度の大きさを持ち、外力振動数が系のバルジング固有振動数と (10), (11), (12) 式の関連を有する近傍に在る時、それぞれに対応する分数調波振動が生起し得る。外力振動数が、複数の固有振動数が関係する (12), あるいは (13) 式を満たす近傍に生起する不安定領域は比較的発生し難いようである。これらの発生機構は、実験時に観測されたほぼ全ての 1/2 倍分数調波振動応答の不安定領域の発生を説明できる。
- 3) 1/2 倍分数調波振動の不安定領域において、この応答が大きくなると、別の振動モードを有する分数調波振動が生起する高次の不安定領域が出現する可能性がある。多くの 1/3 倍分数調波振動はこのような発生機構を有するものと考えられる。また、この分数調波振動の高次不安定領域の発生に、外力振動数が (13) 式を満たす振動モード、およびこの振動数近傍に固有振動数を有する振動モードが関与すると予測される。しかし、高次不安定領域の発生は非線形性が高く、発生機構を正確に予測することは現時点では困難である。
- 4) 分数調波振動の不安定領域の発生を正確に予測するためには、系の減衰の影響を含め、分数調波振動の不安定領域の定量的な検討を遂行する必要がある、今後の課題である。

謝辞

本研究は科学研究費補助金（基盤研究（C）（2））、課題番号 16560506）他の援助を受けました。この研究の実験を遂行し、粘り強く実験データの整理に尽力した大学院学生 嶋本耕三君、岩下一徹君、および中村達哉技術職員に感謝します。これは 1985 年以来の研究の積み重ねの成果です。この実験に携わった数多くの学生の献身的な努力に衷心から感謝します。

参考文献

- 1) Luke, J.C.: A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., vol.27, part.2, pp.395-397, 1967
- 2) Clough, R.W., Niwa, A. et al.: Experimental Seismic Study of Cylindrical Tanks, Proc. ASCE, vol.105, no. ST12, pp.2565-2597, 1979
- 3) Haroun, M.A. et al.: Dynamic Characteristics of Liquid Storage Tanks: Complications in Free Vibration Analysis of Tanks, Proc. ASCE, Vol.108, No. EM5, pp.783-818, 1982
- 4) 皆川洋一: 液体の入った円筒シェルの非線形振動解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.2565-2566, 1984. 10
- 5) 皆川洋一: 有限変形場でのポテンシャル流体と弾性体容器の相互作用を支配する汎関数, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 362 号, pp.105-115, 1986. 4
- 6) 大森博司、松井徹哉、日比野浩: 液体貯槽の有限振幅液面動揺に関する研究、日本建築学会構造系論文報告集, 第 375 号. 5, pp.65-72, 1987
- 7) 皆川洋一: 円筒シェルの水平振動実験における高次振動モードおよび非線形振動の生起, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1, pp.1233-1234, 1990. 10
- 8) Y.Minakawa, Nonlinear Oscillation Analyses of Interactive Behaviors between the Potential Fluid and Tanks of Shell of Revolution in Finite Deformations, 日本建築学会構造系論文報告集, No.435, 1992
- 9) 末広康之、皆川洋一: 水の入った円筒シェルの水平振動実験、日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1, pp.553-554, 1995. 10
- 10) 野間紀男、上箇忠敬、皆川洋一: 水の入った円筒シェル容器の水平振動実験における非線形振動応答, 日本建築学会九州支部研究報告, 第 38 号・1, pp.273-276, 1999. 3
- 11) 野間紀雄、皆川洋一: 水平方向周期外力を受ける水の入った円筒タンクの振動実験、自動測定システムを用いた振動実験における円筒タンクに生起する非線形振動応答, 日本建築学会九州支部研究報告, 第 39 号・1, pp.309-312, 2000
- 12) 皆川洋一: 水の入った円筒タンクに生起する非線形振動応答, NONLINEAR OSCILLATION RESPONSE OF A CYLINDRICAL TANK WITH WATER, 日本建築学会構造系論文集, No.531, pp.125-132, 2000. 5
- 13) 皆川洋一、中村達哉: 水の入った円筒シェルの水平振動実験、新測定システムの概要、日本建築学会学術講演梗概集, B-1, pp.755-756, 2003
- 14) 中村達哉、皆川洋一: 水の入った円筒シェルの水平振動実験、共振曲線、日本建築学会学術講演梗概集, B-1, pp.757-758, 2003
- 15) 嶋本耕三、中村達哉、皆川洋一: 水の入った円筒シェルの水平振動実験、日本建築学会九州支部研究報告, 第 43-1, 169-172, 2004
- 16) 中村達哉、嶋本耕三、皆川洋一: 水の入った円筒タンクの水平振動実験 - 水高の変化がタンク周方向ひずみ応答に及ぼす影響 -, 日本建築学会学術講演梗概集, B-1, 782-783, 2004
- 17) 嶋本耕三、皆川洋一: 水の入った円筒タンクの水平振動実験、日本建築学会九州支部研究報告, 第 44 号 1, pp.561-564, 2005. 3
- 18) 中村達哉、皆川洋一: 水の入った円筒タンクの水平振動実験における動的不安定領域、日本建築学会学術講演梗概集, 構造 I, pp.829-830, 2005
- 19) 下高原理、皆川洋一: 水の入った円筒タンクの水平振動実験、日本建築学会九州支部研究報告, 第 45 号 1, pp.209-212, 2006. 3
- 20) 岩下一徹、皆川洋一、山本憲司、中村達哉: 水の入った円筒タンクの非線形振動応答に関する実験的研究、日本建築学会九州支部研究報告, 第 46 号 1, pp.549-552, 2007. 3
- 21) 皆川洋一: 水平地動を受ける水の入った円筒タンクにおける非線形振動応答の研究、平成 16-18 年度科学研究費補助金（基盤研究（C）（2））研究成果報告書（課題番号 16560506）

(2009年1月9日原稿受理, 2009年4月16日採用決定)