シングルデッキ型浮屋根を有する円筒液体貯槽の非線形スロッシング解析

NONLINEAR SLOSHING ANALYSIS OF CYLINDRICAL LIQUID STORAGE TANK WITH SINGLE-DECK TYPE FLOATING ROOF

山本 憲司*, 皆川 洋一**

Kenji YAMAMOTO and Youichi MINAKAWA

This paper proposes a finite element method for nonlinear sloshing analysis of the liquid storage tanks with the single-deck type floating roof. The elastic finite elements with geometrical non-linearity are applied on modeling the floating roof, and the liquid elements are formulated based on the potential theory and the variational principle. The interaction problem of the elastic body and the fluid is formulated based on the variational principle, therefore the equilibrium equations are simply derived.

The 100,000kl tank struck by the 2003 Tokachi-oki earthquake is modeled for the numerical example, and the seismic response analysis is performed. As this result, it is found that the high-order mode vibration, of which deformation is the 1st radial mode and the 3rd circumferential mode, might occur as the second mode vibration grows on the floating roof, and large stress such that the pontoon is collapsed might appear in the floating roof.

Keywords : *nonlinear sloshing, floating roof, liquid storage tank, single-deck, finite element method, variational principle*
非線形スロッシング, 浮屋根, 液体貯槽, シングルデッキ, 有限要素法, 変分原理

1 はじめに

2003年9月に発生した十勝沖地震では、苫小牧市にある石油精製の製油所で、大型タンクにスロッシングを起こし、浮屋根の沈没やタンクの全面火災など多くの被害が発生した¹⁾。近い将来発生すると言われている東海・東南海地震では、長周期成分を多く含んだ地震動であることが予測されており、一般に長周期帯に共振域をもつ大型タンクにおけるスロッシング対策が急務の課題となっている。現存するタンクの多くは浮屋根が設置されている。浮屋根の形式にはシングルデッキ型とダブルデッキ型がある。十勝沖地震では主にシングルデッキ型浮屋根に大きな被害があり、特に10万kl級の大型タンクではスロッシング二次モードによる共振が原因であると報告されている²⁾。2005年4月に消防法告示の改正³⁾が行われ浮屋根の耐震性能確保のための技術基準が示されたが、この報告を受けて二次モードの応答を評価して浮屋根を設計することが義務付けられた。

シングルデッキ型浮屋根は、外周に浮力を得るためのポンツーン（浮き室）が配置されており、デッキ部分は一枚の鋼板で構成される。ポンツーンの剛性に比べるとデッキ部の面外剛性は極端に小さい。この為、浮屋根が二次モードで共振する時、剛性の高いポンツーンはコンプレッションリングの役割を果たし、波高によってデッキ部分に大変形が生じ、膜力が発生する。この膜力によって

浮屋根には幾何剛性が付与され、浮屋根全体の見掛けの剛性が高くなることで応答の低減効果があると言われている。しかし、この力学挙動を数値解析で扱うには、流体と弾性体との複雑な非線形相互作用問題を扱う必要がある。

浮屋根と流体の相互作用問題を扱った既往の研究は数が少ない。線形問題を扱った初期の研究では、浮屋根を質量のない剛体と仮定したNakagawa⁴⁾の研究がある。また、山本⁵⁾は新潟地震の石油貯槽の事故を分析するために同様の問題を扱った。坂井ら⁶⁾は浮屋根を弾性体として有限要素法による解析を行い、浮屋根の質量や剛性がスロッシング応答に与える影響について初めて詳細に調査した。松井^{7),8)}は浮屋根式円筒タンクの解析解を導出し、十勝沖地震で被災したタンクの解析を行っている。これらの線形理論による方法では前述のシングルデッキ型浮屋根の応答を予測することは困難である。浮屋根と流体の非線形相互作用を扱った研究では、三浦⁹⁾らは汎用の有限要素解析ソフトを利用した詳細な非線形解析を行っている。内海ら^{10),11)}は浮屋根の有限要素モデルのモード展開式を利用したガラーキン法による定式化を行い¹⁰⁾、浮屋根の幾何学的非線形性を近似的に考慮して前述の浮屋根の二次モード応答を解析している¹¹⁾。しかしこれらの研究では解析例は限られており、浮屋根の幾何学的非線形性が応答に与える影響について把握するには未だ不十分である。ま

* 鹿児島大学大学院理工学研究科 助教・博士(工学)

** 鹿児島大学大学院理工学研究科 教授・工博

Assistant Prof., Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima Univ., Dr. Eng.
Prof., Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima Univ., Dr. Eng.

た、解析手法についても合理的な手法が確立されているとは言い難い。

本報はシングルデッキ型浮屋根を有する円筒液体貯槽における非線形スロッシング解析手法の提案並びにその力学性状の把握を目的とし、有限要素法による流体と浮屋根弾性体との非線形相互作用問題の定式化を行う。流体要素には、著者らが既報^{(12), (13)}で提案した速度ポテンシャルを自由表面変位に追従する移動座標系で表現する方法を用いる。また弾性体と流体の相互作用については、著者の一人が文献⁽¹⁴⁾で示した流体場圧力の体積積分と弾性体ポテンシャルエネルギーの和を汎関数として用い、変分原理に基づいて釣合式を導出する。数値解析では、十勝沖地震で被災した10万klタンクと同規模の数値解析モデルを設定し、正弦波入力による二次モード応答性状並びに十勝沖地震の記録データによる地震応答性状について調査を行った結果について報告する。

2 数値解析方法

2.1 浮屋根式タンクのモデル化の概要

シングルデッキ型浮屋根式タンクにおける固有周期は、浮屋根の曲げ剛性が非常に小さいために、自由液面の場合と殆ど変わらない^{(6), (7)}。この為、デッキ部を曲げ剛性の無い膜要素によってモデル化し、デッキの境界に配置されるポンツーンは梁要素によってモデル化する(図1左)。また、線形解析により浮屋根の質量の影響は小さいことが知られている為⁽⁶⁾、質量は考慮しない。

梁要素と側壁との間には隙間を設け、支持条件は図1右上に示すように梁要素節点の4箇所をローラ支持とする。実際のタンクでは浮屋根と側壁の間にシール材が設けられるため、梁要素節点とその外周にある側壁上節点のz方向変位が等しいものとしてモデル化する(図1右下)。

2.2 流体要素及び弾性体要素

流体場の要素には、8節点アイソパラメトリック体要素を採用する。浮屋根の変位に追従して、流体要素の形状が自ずと変化するよう、流体場の節点座標を膜要素や梁要素などの弾性体節点変位の関数として与える(図2)。ここでは、流体要素節点*i*の座標 (x_{ei}, y_{ei}, z_{ei}) が、その上部にある弾性体要素節点変位 (u_{ei}, v_{ei}, w_{ei}) の線形関数で表せるものとし、次式のような節点の移動ルールを与える。

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e^0 + \mathbf{H}_x \mathbf{u}_e, \mathbf{y}_e = \mathbf{y}_e^0 + \mathbf{H}_y \mathbf{v}_e, \mathbf{z}_e = \mathbf{z}_e^0 + \mathbf{H}_z \mathbf{w}_e \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{I}_{8 \times 8}, \mathbf{H}_y = \mathbf{I}_{8 \times 8}, \mathbf{H}_z = \begin{bmatrix} (h+z_{e1}^0)/h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (h+z_{e8}^0)/h \end{bmatrix}$$

ここに、例えば $\mathbf{x}_e = (x_{e1}, \dots, x_{e8})^T$ であり、 $h(>0)$ は自然状態における水高を、 $(x_{ei}^0, y_{ei}^0, z_{ei}^0)$ は自然状態における節点座標を表す。節点座標の原点は静止自由表面(浮屋根との境界面)上に設ける。

要素節点における速度ポテンシャルを $\boldsymbol{\phi}_e = (\phi_{e1}, \dots, \phi_{e8})^T$ と表し、変形後の流体要素に対し-1から1の範囲に正規化された要素座標 ξ, η, ζ を定義する(図2)。要素内任意点における速度ポテンシャル ϕ 及びその時間による導関数 $\dot{\phi}$ を次式のように補間する。

$$\phi = \sum_i^8 N_i \phi_{ei} = \mathbf{N} \boldsymbol{\phi}_e, \dot{\phi} = \sum_i^8 N_i \dot{\phi}_{ei} = \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\phi}}_e \quad (2)$$

ここに、 $N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$, $N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$,
 $N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$, $N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$,
 $N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$, $N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$,

図1 浮屋根と流体場のモデル化

図2 流体要素

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta), N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

要素内の x, y, z 座標も同様に節点座標を用いて次式のように表す。

$$x = \mathbf{N} \mathbf{x}_e(\mathbf{u}_e), y = \mathbf{N} \mathbf{y}_e(\mathbf{v}_e), z = \mathbf{N} \mathbf{z}_e(\mathbf{w}_e) \quad (3)$$

ϕ の x, y, z に関する導関数は、アイソパラメトリック要素の一般的な定式化に従えば、最終的に次式のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)|} \mathbf{A}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) \boldsymbol{\phi}_e \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{J}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)$ はJacobi行列を表し、

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) = \begin{bmatrix} \sum_i^8 (\partial N_i / \partial \xi) x_{ei} & \sum_i^8 (\partial N_i / \partial \xi) y_{ei} & \sum_i^8 (\partial N_i / \partial \xi) z_{ei} \\ \sum_i^8 (\partial N_i / \partial \eta) x_{ei} & \sum_i^8 (\partial N_i / \partial \eta) y_{ei} & \sum_i^8 (\partial N_i / \partial \eta) z_{ei} \\ \sum_i^8 (\partial N_i / \partial \zeta) x_{ei} & \sum_i^8 (\partial N_i / \partial \zeta) y_{ei} & \sum_i^8 (\partial N_i / \partial \zeta) z_{ei} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x(\mathbf{y}_e(\mathbf{v}_e), \mathbf{z}_e(\mathbf{w}_e)) \\ \mathbf{A}_y(\mathbf{z}_e(\mathbf{w}_e), \mathbf{x}_e(\mathbf{u}_e)) \\ \mathbf{A}_z(\mathbf{x}_e(\mathbf{u}_e), \mathbf{y}_e(\mathbf{v}_e)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{J} / \partial x_{e1} & \dots & \partial \mathbf{J} / \partial x_{e8} \\ \partial \mathbf{J} / \partial y_{e1} & \dots & \partial \mathbf{J} / \partial y_{e8} \\ \partial \mathbf{J} / \partial z_{e1} & \dots & \partial \mathbf{J} / \partial z_{e8} \end{bmatrix}$$

弾性体の梁要素、膜要素はともに幾何学的非線形性を考慮した要素を用いる。膜要素は歪にグリーン歪を用いた定みずみ三角形要素⁽¹⁵⁾とし、梁要素は移動座標系を導入し、剛体変位を除去した変位場に対して歪を定義した要素^{(16), (17)}を用いた。概要を付録A, Bに示す。

2.3 汎関数の離散表現と非線形釣合式の導出

Luke⁽¹⁸⁾は、流体の圧力の体積積分を汎関数として第一変分を正確に算定すると、自然境界条件として流体の自由表面上の非線形境界条件が得られることを示し、剛な容器に入った完全流体のすべての運動はこの汎関数に基づいて解析できることを明らかにした。一

方、幾何学的非線形性を考慮した弾性体の運動はハミルトンの原理を汎関数として解析できる。著者らの一人は、既報¹⁴⁾において上述の二つのエネルギー関数の和を汎関数とすることで弾性体容器に入った完全流体の運動を解析可能であることを示した。本報ではこの汎関数を用いて流体と浮屋根の相互作用を定式化する。浮屋根の運動エネルギー（質量）を無視すると、流体と浮屋根の相互作用を支配する汎関数は次式によって表せる¹⁴⁾。

$$I(\phi, u, v, w) = \int_0^t \iiint_{V(u,v,w)} \rho_f \left\{ \frac{1}{2} (\phi_{,x}^2 + \phi_{,y}^2 + \phi_{,z}^2) + \dot{\phi} + a_x(t)x + a_y(t)y + gz \right\} dV dt - \int_0^t -U(u, v, w) dt \quad (5)$$

ここに、 V は流体場、 ρ_f は液体質量密度、 ϕ は速度ポテンシャル、 $a_x(t)$, $a_y(t)$ はそれぞれ x, y 方向の水平加振加速度、 g は重力加速度を表す。 $U(u, v, w)$ は浮屋根の歪エネルギーを表す。上式の ϕ はオイラー座標により表現されるが、(2)式で定義した φ は評価点（流体節点）が浮屋根の変位とともに座標を変える為、オイラー座標で表現されていない。この為、ALE法を適用して φ の時間経過による空間移動を考慮することで、(5)式は次式のように書き換えられる（変換の詳細については既報^{12),13)}を参照されたい）。

$$I(\varphi, u, v, w) = \int_0^t \iiint_{V(u,v,w)} \rho_f \left\{ \frac{1}{2} (\varphi_{,x}^2 + \varphi_{,y}^2 + \varphi_{,z}^2) + \dot{\varphi} - \varphi_{,x} \dot{x} - \varphi_{,y} \dot{y} - \varphi_{,z} \dot{z} + a_x x + a_y y + gz \right\} dV dt - \int_0^t -U(u, v, w) dt \quad (6)$$

上式を前節の要素を用いて離散化すれば、次式のように表現できる。

$$I(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_y, \boldsymbol{\theta}_z) = \int_0^t \sum_e F_e(\boldsymbol{\varphi}_e, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_e, \mathbf{u}_e, \dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{v}_e, \dot{\mathbf{v}}_e, \mathbf{w}_e, \dot{\mathbf{w}}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}) dt \quad (7)$$

ここに、 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N_f})^T$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{N_m})^T$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{N_m})^T$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{N_m})^T$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_x = (\theta_{x1}, \dots, \theta_{xN_b})^T$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_y = (\theta_{y1}, \dots, \theta_{yN_b})^T$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_z = (\theta_{z1}, \dots, \theta_{zN_b})^T$ であり $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ は梁要素節点の回転角を、 N_f は流体要素の総節点数 $N_m(>N_b)$ は膜要素総節点数、 N_b は梁要素総節点数を表す。また、

$$F_e(\boldsymbol{\varphi}_e, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_e, \mathbf{u}_e, \dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{v}_e, \dot{\mathbf{v}}_e, \mathbf{w}_e, \dot{\mathbf{w}}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_e^T \mathbf{k}_\varphi(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) \boldsymbol{\varphi}_e + \mathbf{s}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \dot{\boldsymbol{\varphi}}_e - \boldsymbol{\varphi}_e^T \mathbf{c}_{x1}(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) \dot{\mathbf{u}}_e - \boldsymbol{\varphi}_e^T \mathbf{c}_{y1}(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e) \dot{\mathbf{v}}_e - \boldsymbol{\varphi}_e^T \mathbf{c}_{z1}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e) \dot{\mathbf{w}}_e + a_x \mathbf{s}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \mathbf{x}_e(\mathbf{u}_e) + a_y \mathbf{s}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \mathbf{y}_e(\mathbf{v}_e) + g \mathbf{s}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \mathbf{z}_e(\mathbf{w}_e) + U_e^m(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) + U_e^b(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}) \quad (8)$$

$$\mathbf{k}_\varphi(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) = \rho_f \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{A}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \mathbf{A}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) \frac{1}{|\mathbf{J}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)|} d\xi d\eta d\zeta$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) = \rho_f \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\mathbf{J}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)| d\xi d\eta d\zeta$$

$$\mathbf{c}_{x1}(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) = \rho_f \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{A}_x(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \mathbf{N} d\xi d\eta d\zeta \right) \mathbf{H}_x$$

$$\mathbf{c}_{y1}(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e) = \rho_f \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{A}_y(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e)^T \mathbf{N} d\xi d\eta d\zeta \right) \mathbf{H}_y$$

$$\mathbf{c}_{z1}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e) = \rho_f \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{A}_z(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e)^T \mathbf{N} d\xi d\eta d\zeta \right) \mathbf{H}_z$$

である。 $U_e^m(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)$, $U_e^b(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze})$ はそれぞれ膜要素と梁要素による歪エネルギーの離散化式であるが、一般的な内容であるため具体的な表現については省略する。(8)式を $\boldsymbol{\varphi}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}$ に関して変分すると、次の要素釣合式が得られる。

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_e^T : \mathbf{k}_\varphi(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) \boldsymbol{\varphi}_e - \mathbf{c}_x(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) \dot{\mathbf{u}}_e - \mathbf{c}_y(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e) \dot{\mathbf{v}}_e - \mathbf{c}_z(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e) \dot{\mathbf{w}}_e = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_e^T : & \mathbf{c}_x(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \dot{\boldsymbol{\varphi}}_e + a_x (\mathbf{H}_x \mathbf{s}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) + \mathbf{c}_{x2}(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \mathbf{x}_e(\mathbf{u}_e)) \\ & + a_y \mathbf{c}_{x2}(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \mathbf{y}_e(\mathbf{v}_e) + g \mathbf{c}_{x2}(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)^T \mathbf{z}_e(\mathbf{w}_e) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{k}_\varphi / \partial u_{e1} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{k}_\varphi / \partial u_{e8} \boldsymbol{\varphi}_e \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{y1} / \partial u_{e1} \dot{\mathbf{v}}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{y1} / \partial u_{e8} \dot{\mathbf{v}}_e \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{z1} / \partial u_{e1} \dot{\mathbf{w}}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{z1} / \partial u_{e8} \dot{\mathbf{w}}_e \end{array} \right\} \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{c}_{x1}^T}{\partial v_{ei}} \dot{\mathbf{v}}_{ei} + \frac{\partial \mathbf{c}_{x1}^T}{\partial w_{ei}} \dot{\mathbf{w}}_{ei} \right) \boldsymbol{\varphi}_e + \mathbf{q}_x^m(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) + \mathbf{q}_x^b(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}) = \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{v}_e^T : & \mathbf{c}_y(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e)^T \dot{\boldsymbol{\varphi}}_e + a_y (\mathbf{H}_y \mathbf{s}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) + \mathbf{c}_{y2}(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e)^T \mathbf{y}_e(\mathbf{v}_e)) \\ & + g \mathbf{c}_{y2}(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e)^T \mathbf{z}_e(\mathbf{w}_e) + a_x \mathbf{c}_{y2}(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e)^T \mathbf{x}_e(\mathbf{u}_e) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{k}_\varphi / \partial v_{e1} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{k}_\varphi / \partial v_{e8} \boldsymbol{\varphi}_e \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{z1} / \partial v_{e1} \dot{\mathbf{w}}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{z1} / \partial v_{e8} \dot{\mathbf{w}}_e \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{x1} / \partial v_{e1} \dot{\mathbf{u}}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{x1} / \partial v_{e8} \dot{\mathbf{u}}_e \end{array} \right\} \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{c}_{y1}^T}{\partial w_{ei}} \dot{\mathbf{w}}_{ei} + \frac{\partial \mathbf{c}_{y1}^T}{\partial u_{ei}} \dot{\mathbf{u}}_{ei} \right) \boldsymbol{\varphi}_e + \mathbf{q}_y^m(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) + \mathbf{q}_y^b(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{w}_e^T : & \mathbf{c}_z(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e)^T \dot{\boldsymbol{\varphi}}_e + a_z (\mathbf{H}_z \mathbf{s}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) + \mathbf{c}_{z2}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e)^T \mathbf{z}_e(\mathbf{w}_e)) \\ & + a_x \mathbf{c}_{z2}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e)^T \mathbf{x}_e(\mathbf{u}_e) + a_y \mathbf{c}_{z2}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e)^T \mathbf{y}_e(\mathbf{v}_e) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{k}_\varphi / \partial w_{e1} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{k}_\varphi / \partial w_{e8} \boldsymbol{\varphi}_e \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{x1} / \partial w_{e1} \dot{\mathbf{u}}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{x1} / \partial w_{e8} \dot{\mathbf{u}}_e \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{y1} / \partial w_{e1} \dot{\mathbf{v}}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{y1} / \partial w_{e8} \dot{\mathbf{v}}_e \end{array} \right\} \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{c}_{z1}^T}{\partial u_{ei}} \dot{\mathbf{u}}_{ei} + \frac{\partial \mathbf{c}_{z1}^T}{\partial v_{ei}} \dot{\mathbf{v}}_{ei} \right) \boldsymbol{\varphi}_e + \mathbf{q}_z^m(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) + \mathbf{q}_z^b(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\delta \boldsymbol{\theta}_{xe}^T : \mathbf{q}_{\theta x}^b(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}) = \mathbf{0}$$

$$\delta \boldsymbol{\theta}_{ye}^T : \mathbf{q}_{\theta y}^b(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}) = \mathbf{0}$$

$$\delta \boldsymbol{\theta}_{ze}^T : \mathbf{q}_{\theta z}^b(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\theta}_{xe}, \boldsymbol{\theta}_{ye}, \boldsymbol{\theta}_{ze}) = \mathbf{0}$$

ここに $\mathbf{c}_x = \mathbf{c}_{x1} + \mathbf{c}_{x2}$, $\mathbf{c}_y = \mathbf{c}_{y1} + \mathbf{c}_{y2}$, $\mathbf{c}_z = \mathbf{c}_{z1} + \mathbf{c}_{z2}$

$$\mathbf{c}_{x2}(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) = \rho_f \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{A}_x(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) d\xi d\eta d\zeta \right) \mathbf{H}_x$$

$$\mathbf{c}_{y2}(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e) = \rho_f \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{A}_y(\mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e) d\xi d\eta d\zeta \right) \mathbf{H}_y$$

$$\mathbf{c}_{z2}(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e) = \rho_f \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{A}_z(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e) d\xi d\eta d\zeta \right) \mathbf{H}_z$$

また、 $\mathbf{q}_x^m = \partial U_e^m / \partial \mathbf{u}_e$, $\mathbf{q}_y^m = \partial U_e^m / \partial \mathbf{v}_e$, $\mathbf{q}_z^m = \partial U_e^m / \partial \mathbf{w}_e$ であり膜要素の復元力に相当する。同様に、 $\mathbf{q}_x^b = \partial U_e^b / \partial \mathbf{u}_e$, $\mathbf{q}_y^b = \partial U_e^b / \partial \mathbf{v}_e$, $\mathbf{q}_z^b = \partial U_e^b / \partial \mathbf{w}_e$, $\mathbf{q}_{\theta x}^b = \partial U_e^b / \partial \boldsymbol{\theta}_{xe}$, $\mathbf{q}_{\theta y}^b = \partial U_e^b / \partial \boldsymbol{\theta}_{ye}$, $\mathbf{q}_{\theta z}^b = \partial U_e^b / \partial \boldsymbol{\theta}_{ze}$ であり、梁要素の復元力に相当する。また、(9)式の一部には総和規約が用いられており、下添え字の i はダミーインデックスを表す。(9)式の釣合式を要素毎に重ねあわせることで、次式のような系全体の釣合式が得られる。

$$\mathbf{K}_\varphi \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{C}_x \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{C}_y \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{C}_z \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{0} \quad (10-1)$$

$$\mathbf{C}_x^T \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{C}_{xy} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_{xz} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_x + \mathbf{R}_x + \mathbf{Q}_x^m + \mathbf{Q}_x^b = \mathbf{0} \quad (10-2)$$

$$\mathbf{C}_y^T \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{C}_{yx} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{yz} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_y + \mathbf{R}_y + \mathbf{Q}_y^m + \mathbf{Q}_y^b = \mathbf{0} \quad (10-3)$$

$$\mathbf{C}_z^T \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{C}_{zx} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{zy} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{F}_z + \mathbf{R}_z + \mathbf{Q}_z^m + \mathbf{Q}_z^b = \mathbf{0} \quad (10-4)$$

$$\mathbf{Q}_{\theta x}^b = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}_{\theta y}^b = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}_{\theta z}^b = \mathbf{0} \quad (10-5,6,7)$$

ここに、例えば $\mathbf{K}_\varphi = \mathbf{A}_e^{Mf} \mathbf{k}_\varphi$, $\mathbf{C}_x = \mathbf{A}_e^{Mf} \mathbf{c}_x$, $\mathbf{Q}_x^m = \mathbf{A}_e^{Mm} \mathbf{q}_x^m$, $\mathbf{Q}_x^b = \mathbf{A}_e^{Mb} \mathbf{q}_x^b$, $\mathbf{C}_{xy} = \mathbf{A}_e^{Mf} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \mathbf{c}_{x1}^T}{\partial v_{e1}} \boldsymbol{\varphi}_e & \dots & \frac{\partial \mathbf{c}_{x1}^T}{\partial v_{e8}} \boldsymbol{\varphi}_e \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{y1} / \partial u_{e1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{c}_{y1} / \partial u_{e8} \end{array} \right] \mathbf{R}_x = \mathbf{A}_e^{Mf} \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{k}_\varphi / \partial u_{e1} \boldsymbol{\varphi}_e \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_e^T \partial \mathbf{k}_\varphi / \partial u_{e8} \boldsymbol{\varphi}_e \end{array} \right]$, $\mathbf{F}_x = \mathbf{A}_e^{Mf} \left\{ a_x (\mathbf{H}_x \mathbf{s} + \mathbf{c}_{x2}^T \mathbf{x}_e) + a_y \mathbf{c}_{x2}^T \mathbf{y}_e + g \mathbf{c}_{x2}^T \mathbf{z}_e \right\}$ であり、 $\mathbf{A}$ は重ね合わせを表すアセンブリ演算記号、 M_f, M_m, M_b は、それぞれ流体要素、膜要素、梁要素の要素数を表す。

以上、リッツ法による定式化によって流体場の境界で満たされるべき諸条件を一切意識することなく非線形釣合式が導出された。(10)式の非線形釣合式とこれら境界条件との対応関係について述べ

る。(10-1)式は具体的には次のような形式となっている。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\phi 11} & \mathbf{K}_{\phi 12} \\ \mathbf{K}_{\phi 21} & \mathbf{K}_{\phi 22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{sf} \\ \boldsymbol{\Phi}_m \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{x1} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{y1} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{z1} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{0} \quad (11)$$

ここに $\boldsymbol{\Phi}_{sf}$ は自由表面（流体と浮屋根の境界面及び外周のクリアランス表面）上にある節点の速度ポテンシャル、 $\boldsymbol{\Phi}_m$ は自由表面以外の節点における速度ポテンシャルを意味する。(11)式の上段は流体と浮屋根の境界面上での運動学的条件に対応しており、下段はタンク底部および側壁における不透過条件および流体場内部の連続の式に対応している。タンク底部の法線方向は常に鉛直、側壁の法線方向は常にタンク中心に向い水平であり、浮屋根（自由表面）の変位によって向きが変わることは無い。この為、要素釣合式の重ね合わせの結果、 $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{w}}$ の係数マトリクスの下段の部分はすべてゼロとなることを確認している。一方、(10-2,3,4)式が流体と浮屋根の境界面上での力学的条件に対応することは、式中に弾性体の復元力が含まれていることから明らかである。(10-5,6,7)式は流体要素、膜要素に回転角の変位成分を含まないため、梁要素のみから成る節点モーメントに関する自己釣合式となっている。(10)式がこれらの境界条件と厳密に等価な離散化方程式であることを証明することは難しいが、(10)式の導出過程に離散化以外の近似は与えていないので、厳密な非線形相互作用が表現されているものと考えられる。

2.4 非線形釣合式の時間積分

クランク・ニコルソン法を適用して(10)式を時間積分する方法について示す。(10)式を改めて次式のように表現する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_y & \mathbf{C}_z \\ \mathbf{C}_x^T & \mathbf{O} & \mathbf{C}_{xy} & \mathbf{C}_{xz} \\ \mathbf{C}_y^T & \mathbf{C}_{yx} & \mathbf{O} & \mathbf{C}_{yz} \\ \mathbf{C}_z^T & \mathbf{C}_{zx} & \mathbf{C}_{zy} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{\phi\phi} \\ -\mathbf{F}_x - \mathbf{R}_x - \mathbf{Q}_x^m - \mathbf{Q}_x^b \\ -\mathbf{F}_y - \mathbf{R}_y - \mathbf{Q}_y^m - \mathbf{Q}_y^b \\ -\mathbf{F}_z - \mathbf{R}_z - \mathbf{Q}_z^m - \mathbf{Q}_z^b \\ -\mathbf{Q}_{\theta x}^b \\ -\mathbf{Q}_{\theta y}^b \\ -\mathbf{Q}_{\theta z}^b \end{Bmatrix} \quad (12-1)$$

また、上式を次のようにも表す。

$$\mathbf{C}(\mathbf{d})\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{F}(\mathbf{d}, t) \quad (12-2)$$

上式にクランク・ニコルソン法を適用することを考える。クランク・ニコルソン法は正規系の1階常微分方程式 $\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{f}(\mathbf{d}, t)$ を次式のように差分近似する陰解法である。

$$\frac{\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{f}(\mathbf{d}_k, t_k) + \mathbf{f}(\mathbf{d}_{k+1}, t_k + \Delta t) \} \quad (13)$$

(12-2)式は、変係数 $\mathbf{C}(\mathbf{d})$ を有する非正規系の方程式となっており、(13)式をそのまま適用することができない。ここでは変係数 $\mathbf{C}(\mathbf{d})$ を右辺と同様に中央値として近似し、次の差分近似式を用いることにする。

$$\frac{1}{2} [\mathbf{C}(\mathbf{d}_k) + \mathbf{C}(\mathbf{d}_{k+1})] \frac{\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{F}(\mathbf{d}_k, t_k) + \mathbf{F}(\mathbf{d}_{k+1}, t_k + \Delta t) \} \quad (14)$$

上式は $\mathbf{d}_{k+1}$ に関して非線形方程式となっているため、 $\mathbf{d}_{k+1}$ を求めるには反復計算を必要とする。 $t = t_k$ の反復計算第 i ステップにおける $\mathbf{d}_{k+1}$ の解候補を $\mathbf{d}_{k+1}^{(i+1)} = \mathbf{d}_{k+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{d}^{(i)}$ のように増分表現するものとし、(14)式にニュートン・ラプソン法を適用すれば、次の修正公式が得られる。

$$\left[\frac{1}{2\Delta t} [\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{k+1}^{(i)}] + \frac{1}{2\Delta t} \left[\frac{\partial \mathbf{C}_{k+1}^{(i)}}{\partial u_1} (\mathbf{d}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{d}_k), \dots, \frac{\partial \mathbf{C}_{k+1}^{(i)}}{\partial u_N} (\mathbf{d}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{d}_k) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{F}_{k+1}^{(i)}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{F}_{k+1}^{(i)}}{\partial u_N} \right] \right] \Delta \mathbf{d}^{(i)} = -\frac{1}{2\Delta t} [\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{k+1}^{(i)}] (\mathbf{d}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{d}_k) + \frac{1}{2} [\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_{k+1}^{(i)}] \quad (15)$$

ここに、 $\mathbf{C}_k = \mathbf{C}(\mathbf{d}_k)$, $\mathbf{C}_{k+1}^{(i)} = \mathbf{C}(\mathbf{d}_{k+1}^{(i)})$, $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(\mathbf{d}_k, t_k)$,

$\mathbf{F}_{k+1}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{d}_{k+1}^{(i)}, t_k + \Delta t)$ を意味する。

以上、流体と浮屋根弾性体の非線形相互作用問題の定式化について示した。非線形釣合式を線形化し線形固有値解析を行う方法や、非線形釣合式に比例減衰を導入する方法など、一連の解析方法については、釣合式に弾性体の復元力が含まれる以外は文献13)とほぼ同じであるので、こちらを参照されたい。

3 数値解析例

3.1 解析モデル

円筒貯槽は直径80m、液体高さ15mとする(図3)。対称性を考慮し解析は1/2の部分で行い(境界条件は図1と等価となるように与える)、要素分割は半径方向に7分割(浮屋根デッキ6分割)、周方向に12分割、高さ方向に4分割とする。液体密度は850kg/m³とし、ポンツーン及びデッキの断面は図4及び表1に示す値とした。

スロッッシング解析に先立って基本的な振動性状を把握するため線形固有値解析を行い、固有周期の算定を行った。周期の長いほうから10番目までの値を表2に示す。同表中には、モード形が分かるように固有モードを半径方向及び周方向にフーリエ級数展開した際に

図3 解析モデル

図4 浮屋根断面寸法

表1 浮屋根断面諸元

デッキ	ヤング率 E	205.8 GPa
	板厚 t	0.45 cm
	ポアソン比 ν	0.3
ポンツーン	ヤング率 E	205.8 GPa
	断面積 A	639.8 cm ²
	断面2次モーメント I_y	810,900 cm ⁴
	断面2次モーメント I_z	21,180,000 cm ⁴
	ねじり定数 J	2,716,000 cm ⁴
	ポアソン比 ν	0.3

表2 固有周期

モード 次数	モード形		FEM 周期(s)	自由液面 解析解 周期(s)
	半径 方向 次数	周 方向 次数		
1	1	1	12.01	12.09
2	1	2	7.76	(8.04)
3	1	0	7.04	-
4	1	3	5.68	(6.46)
5	2	1	5.50	5.60
6	2	0	4.89	-
7	2	2	4.73	(4.93)
8	1	4	4.72	(5.61)
9	1	5	4.19	(5.05)
10	3	1	4.18	4.35

図5 固有モード

主要となる展開波次数を記入してある。また周方向展開次数が1となるモードに対し、比較のために自由液面の固有周期の解析解を並べて示した（周方向展開次数が1以外のモードに対しては自由液面の解析解を参考値として括弧をつけて示した）。シングルデッキ型浮屋根式タンクの周方向展開次数1のモードに対する固有周期は自由液面の場合と殆ど変わらないことが分かっており⁶⁾、本解析においても比較的良く一致していることが分かる。代表的な固有モードを図5に示す。図中に記入した ϕ_j は固有モードを意味し、下添え字 i は半径方向展開次数、 j は周方向展開次数を表す。 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ではボンツーンはそれぞれ同一平面上にあり面外曲げ変形を生じないモードであり、一方 ϕ_2, ϕ_3 ではボンツーンは面外方向に波打ち、面外曲げ変形を生じるモードとなっている。

3.2 正弦波入力に対する二次モードスロッシング応答

入力加速度として、時間に比例して振幅が漸増した後、一定振幅となる正弦波（図6）を与えて、時刻歴応答解析を行う。正弦波の振幅は2.5galと5galの2ケースとし、周期は ϕ_1 の固有周期付近である4.7secから6secまでを0.1sec毎に変化させてそれぞれ解析を行う。減衰はモード別減衰とし、周期の長いほうから1～16番目までのモードに対して0.5%、17番目以降のモードに対して5%の減衰を与えた（完全流体の数値解析では時間の経過や波高が高くなるにつれ、高次の波が生起し自由表面がジグザグ状になる場合があることが報告されている^{14),15)}。この問題を避けるため高次モードに対して比較的大きな減衰を与えた。この減衰が以後述べる結果に大きな影響を与えないことを確認している）。時間積分の刻みは0.1secとした。

入力周期と最大波高（浮屋根右端部（図3のA点）の最大鉛直変位）の関係を、入力加速度が2.5galの結果を記号■で、5galの結果を記号▼を用いて図7に示す。また同図中には、浮屋根に対し幾何学的非線形性を考慮せず、梁要素及び膜要素を微小変形理論による線形要素とした場合の結果も同時に示す。入力加速度が2.5galの結果を記号□、5galの結果を記号▽で表す。また、浮屋根の幾何学的非線形挙動を考慮した結果に対し、デッキに発生した最大の引張主応力を、2.5galの時を記号■で、5galの時を記号▼で図8に示す。また参考として、デッキに発生したMises応力の最大値について同図中に、2.5galの時を記号○で、5galの時を記号△でそれぞれ示す。これらの結果から、浮屋根の幾何学的非線形挙動を考慮することでデッキに引張力を生じ（図8）、見掛けの剛性が高くなることで固有周期が短周期

図6 入力波

図7 外力周期と最大波高の関係

図8 外力周期とデッキ最大応力の関係

図9 外力周期と ϕ_{21}, ϕ_{13} の正側最大振幅の関係

側に移動し、応答も小さくなっていることが確認できる（図7）。

一方、浮屋根の幾何学的非線形挙動を考慮した解析では、 ϕ_{21} の振幅が大きくなると、 ϕ_{13} の振動が生起する傾向が見られた。このことについて示す。なお以降では、記述を簡単にする為に、幾何学的非線形挙動を考慮した浮屋根を非線形浮屋根、線形挙動のみを考慮した浮屋根を線形浮屋根と呼ぶことにする。

上述の正弦波入力による解析のうち、代表的なものとして外力周期5.4sec、外力振幅5galの時の時刻歴応答波形を、非線形浮屋根の結果を図10-aに、線形浮屋根の結果を図11-aにそれぞれ示す。縦軸は浮屋根右端部（図3のA点）の鉛直変位を表す。次にこれらの浮屋根の変位に対して図5に示した各固有モード成分がそれぞれの程度含まれているかを見るために、変位ベクトルを次式のように固有モードで展開して表現する。

$$\mathbf{d} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \cdots + \alpha_N \phi_N \quad (16)$$

ここに、 N は変位の自由度であり、各固有モード ϕ_i ($i=1, \dots, N$) はA点の鉛直変位が1となる様に基準化して用いる。 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 及び ϕ_{13} の重み係数の時刻歴波形について、非線形浮屋根の結果を図10-b,c,d,eに、線形浮屋根の結果を図11-b,c,d,eにそれぞれ示す。これらの図を見ると、線形浮屋根、非線形浮屋根ともに卓越しているのは無論 ϕ_{21} の振動成分であるが、非線形浮屋根の場合では ϕ_{21} の振幅が大きくなるにつれて ϕ_{13} の振動が生起していることが分かる。一方、線形浮屋根の場合ではこのような振動は発生していない。 ϕ_{21} と ϕ_{13} の固有周期はそれぞれ5.50secと5.68secであり、両者の固有周期は近い値となっている（図5）。各外力周期の非線形浮屋根の応答対

図10 時刻歴応答波形

(浮屋根の幾何学的非線形挙動を考慮, 周期5.4sec, 振幅5gal)

して同様にモード展開を行い、 ϕ_{21} と ϕ_{31} の正側最大振幅と外力周期の関係を図9に示す。図中、記号■及び▼が ϕ_{21} の2.5gal及び5galの時の最大振幅を、記号□及び▽が ϕ_{31} の2.5gal及び5galの時の最大振幅を表す。図を見ると、 ϕ_{21} の振幅が大きく、デッキに応力が発生する外力周期の範囲(5galの場合5.1sec~5.6sec付近、図8参照)において ϕ_{31} の振動が生起していることが解かる。 ϕ_{21} の振幅増加により、デッキの引張力によってポンツーンが面外変位を起こし、 ϕ_{21} と ϕ_{31} の固有周期が近い為に ϕ_{31} の振動が生ずるものと考えられる。(尚、図9を見ると ϕ_{21} と ϕ_{31} の振幅は比例関係に無く、5.5secから5.1secに向かい ϕ_{21} の振幅は上昇するのに対し、 ϕ_{31} の振幅は上昇していない。これは ϕ_{31} では ϕ_{21} に比べデッキ引張力による見かけの剛性の変化が小さく、 ϕ_{31} の固有周期5.68secから離れるにつれ共振しにくくなる為と考えられる。)

3.3 地震波入力に対するスロッシング応答

入力地震動として、2003年十勝沖地震の際に苫小牧で観測された地震波(KNET公開波HKD1290309260450EW)を採用し、時刻歴応答解析を行う。地震動の加速度時刻歴波形と速度応答スペクトル(減衰定数0.5%)を図12-a,bにそれぞれ示す。数値解析における時間積分の刻みは、地震動記録データと同じ0.01secとし、減衰定数は先と同様1~16番目までのモードに対して0.5%、17番目以降のモードに対して5%とした。

浮屋根A点の鉛直変位の時刻歴波形を図13-aに示す。また、線形浮屋根とした場合の時刻歴波形を図14-aに示す。非線形浮屋根の場合の最大変位は103.5cm($t=74.05$ sec)、線形浮屋根の場合は128.3cm($t=86.9$ sec)であり、応答波形にも差が見られる。前節と同様にこれらの変位を固有モードで展開して示す。 ϕ_{11} 、 ϕ_{21} 、 ϕ_{31} 及び ϕ_{42} 、 ϕ_{43} の重み係数の時刻歴波形を、非線形浮屋根の場合について図13-b,c,d,e,fに、線形浮屋根の場合について図14-b,c,d,e,fにそれぞれ示す。線

図11 時刻歴応答波形

(浮屋根の線形挙動のみ考慮, 周期5.4sec, 振幅5gal)

形浮屋根の結果について見てみると、図14-b,cから ϕ_{21} に対応する変位が ϕ_{11} に対応する変位と同程度のオーダーとなっており比較的大きな応答となっている。入力地震動の速度応答スペクトルのピークが5秒付近にあり(図12)、 ϕ_{21} で共振していることが分かる。次に非線形浮屋根の場合について見てみると(図13-b,c)、 ϕ_{11} に対応する変位は線形浮屋根の場合(図14-b)とほぼ同じであるのに対し、 ϕ_{21} に対応する変位は線形浮屋根の場合(図14-c)の1/2程度に抑えられている。浮屋根の幾何学的非線形性によって ϕ_{21} の応答が低減されていることが分かる。また図13-e,図14-eを見ると、線形浮屋根、非線形浮屋根ともに ϕ_{42} に対応する変位が僅かに生じている。これは流体が ϕ_{41} で共振する際に引き起こされる倍調波振動成分であり^{21),22)}、流体の非線形性によって生じる振動成分である。

次に図13-f,図14-fを見てみると、前節と同様に非線形浮屋根の場

(a) 加速度時刻歴波形

(b) 速度応答スペクトル

図12 入力地震動

図13 時刻歴応答波形（浮屋根の幾何学的非線形挙動を考慮）

図14 時刻歴応答波形（浮屋根の線形挙動のみ考慮）

図15 ポンツーンの最大断面力分布及びA,B点で最大となる時の断面力分布

合では ϕ_3 の振動を生じており、一方、線形浮屋根の場合では生じていない。また図13-eと図13-fの比較から、 ϕ_3 に対応する変位は ϕ_2 に対応する変位よりも大きいことが分かる。 ϕ_2, ϕ_3 は共にポンツーンに面外曲げを伴うモードであり、これらの結果から浮屋根の幾何学的非線形挙動を考慮した場合、ポンツーンに発生する面外曲げモーメントは主に ϕ_3 の振動成分によって生じることが推測できる。

ポンツーンに発生する軸圧縮力の分布を図15-aに示す。横軸はポンツーン上の位置を角度で表現しており、0度は図3のB点、180度はA点に対応する。記号□はポンツーンの各点で生じた最大軸圧縮力を表し、記号○はA点で軸圧縮力が最大となった時刻（ $t=81.22\text{sec}$ ）の応力分布を、記号▽はB点で最大となった時刻（ $t=78.66\text{sec}$ ）の応

力分布を表す。同様に、ポンツーンの面外曲げモーメントの分布と面内曲げモーメントの分布を図15-b,cにそれぞれ示す。断面力が最大となる時刻は断面力の種類によってそれぞれ異なっているが、記号の意味は図15-aと同様である。

図15-bを見ると、A点及びB点で最大となる時（ $t=81.07\text{sec}$ 及び 79.02sec ）の面外曲げモーメントの分布はともに周方向3波の分布を示しており、前述の変位に見られた結果と良く対応する。

面内曲げモーメント（図15-c）については、A点最大時（ $t=79.15\text{sec}$ ）及びB点最大時（ $t=103.34\text{sec}$ ）では応力の分布が異なっており、やや複雑な分布を示している。これらの時刻における浮屋根の変形の様子を図16-a,bに示す。また同図中にはポンツーンがデッ

図16 浮屋根の変形とポンツーンが受ける面内節点力の分布

図17 デッキ面外変形量とポンツーン半径方向縮みの関係

キから受ける節点力の分布を矢印で同時に示した（矢印の長さが節点力の大きさを表す）。これらの図を見るとポンツーンは面内方向に楕円状に変形しており、変位や節点力はいずれも巨視的には軸対称分布と周方向2波の分布が卓越している。これに対しポンツーンの面内モーメントの分布は図15-cに示すように周方向高次モードの影響を受けやすいようである（ポンツーンのみをモデル化したリング状フレームに図16の節点力を与えると図15-cの曲げモーメント分布を示すことを平面骨組解析により確認している）。

デッキの面外変形量とポンツーンの半径方向縮みの関係を図17に示す。面外変形量と半径方向縮みの算定方法は文献2)に従った。図中の点線が地震応答時の関係を表しており、実線は3.2節で示した正弦波入力（5.1sec, 5gal）による応答時の関係を表している。地震応答の場合では ϕ_{21} 以外のモードの影響によってややバラつくものの相関関係が確認できる。一方、正弦波入力による応答では明瞭な相関関係が確認できる。このような算定は文献2), 文献11)で行われており、本報の結果は文献11)の結果と良く一致する。

デッキにおいて最大のMises応力発生時（ $t=78.66\text{sec}$ ）における主応

表3 有効断面積及び有効断面係数

有効断面積 A_e	265.3 cm^2
有効断面係数 Z_{ye} (面外)	6,825 cm^3
有効断面係数 Z_{ze} (面内)	40,050 cm^3

表4 数値解析により得られた最大応力と設計式との比較

	FEM 最大値 (N/mm^2)	設計式 ¹⁸⁾ (N/mm^2)
軸応力 N/A_e	296.5	212.8
面外曲げ応力 M_y/Z_{ye} (括弧内は線形浮屋根時)	550.5 (28.5)	58.2
面内曲げ応力 M_z/Z_{ze}	132.5	37.6

図20 ポンツーンの最大応力の分布

図21 A点最大応力発生時の応力分布（ $t=81.07\text{sec}$ ）

力図を図18に示す。細線は引張応力、太線は圧縮応力を表す。最大Mises応力は 217.8N/mm^2 であり、鋼材の基準強度（SS400, $F=235\text{N/mm}^2$ ）を超える応力は生じていない。

3.4 地震応答解析結果に対するポンツーン応力の検討

前節で得られた地震応答解析結果に対し、ポンツーンに発生する応力について検討する。ポンツーンは薄肉の鋼板によって構成されている為、圧縮時の局部座屈を考慮した有効断面で応力を評価する必要がある。ここでは文献2)に倣って有効断面を評価する。

前節の数値解析では、ポンツーンを実際のものと同程度の断面を有する長方形箱型断面として簡単にモデル化した為、実際のポンツーンでは上下板に補強リングが施されている。この為、上下板をそれぞれおよそ三等分する位置に補強リング（ $L130 \times 130 \times 9$ ）を配置し、図19-a,bに示す断面を改めて仮定する。図19-aは軸力及び面内曲げに対する有効断面を、図19-bは面外曲げに対する有効断面（下板引張時）をそれぞれ表す（図中黒塗りの部分）。この断面から算定される有効断面積及び面外方向及び面内方向の有効断面係数を表3に示す。

上記の有効断面を用いて、前節の十勝沖地震入力による応答解析結果に対し、ポンツーンに発生する応力を評価した（前節の解析では補強リングの断面を無視していることになるが影響は小さいものとする）。ポンツーンの各点で生じた最大応力を図20に示す。図中記号□は最大軸圧縮応力の分布を、記号○は面外曲げモーメントにより生じる最大縁応力を、記号△は面内曲げモーメントによる最大縁応力を示す。これらの3つの応力のオーダーを比較すると、面外曲げ応力が他の応力に比べ最も大きく（最大値 550.5N/mm^2 ）、またポンツーンの多くの箇所鋼材の基準強度を超えている。軸応力が次に大きく（最大値 296.5N/mm^2 ）、面内曲げ応力が最も小さい

図19 有効断面

(最大値132.5N/mm²)。次にA点において最大応力を発生した時刻($t=81.07\text{sec}$)におけるポンツーンの応力分布を図21に示す。図中記号□は軸応力を、記号○は面外曲げによる縁応力を、記号△は面内曲げによる縁応力をそれぞれ表し、記号×はこれらを合計した値を表す。ポンツーンの多くの箇所鋼材の基準強度を超えている。

平成17年4月の消防法告示の改正³⁾では浮屋根がスロッシングによって損傷を受けない構造とすることが義務付けられたが、浮屋根の具体的な強度評価の方法(以下設計式と呼ぶ)については、平成17年1月14日に通知された「危険物の規制に関する規則の一部を改正する省令等の施行について」²³⁾に規定されている(設計式は文献2)で提案されたものと同じである)。この設計式によって算定される応力と、上で算定された最大応力との比較を行う。結果を表4に示す。全体に設計式は数値解析より小さな値を示すが、軸応力と面内曲げ応力については比較的良い対応を示している。一方、面外曲げ応力は両者で値が大きく異なっている。これは、設計式では ϕ_1 の大振幅時に流体の非線形性によって生じる ϕ_2 の変形を評価することで面外曲げ応力を算定しており、本解析結果で見られた ϕ_3 の変形は考慮されていない為である。参考として、線形浮屋根とした時の解析結果(図14)から得られるポンツーンの最大面外曲げ応力を、同表中括弧内に示した。この場合では ϕ_3 は発生せず ϕ_2 が主要な変形となる為、設計式と比較的良好に対応する。

3.5 固有周期に対する要素分割及び液高の影響

前節までの数値解析例では ϕ_{21} で共振する際に ϕ_3 の振動が生起することを示した。その理由のひとつとして ϕ_{21} と ϕ_3 の固有周期の値が比較的近いことを挙げた。以下ではこれらの固有周期の関係の妥当性や液高による影響について検討する。

3.1節で示した解析モデル(直径80m、液高15m)に対して浮屋根(弾性体要素)を取り除いて固有値解析を行い、自由表面における固有周期を算定する(自由表面節点はz方向のみに変位するものとした)。要素分割を変化させ、固有周期の収束の様子を描いたグラフを図22に示す。横軸は自由度(節点速度ポテンシャル及び自由表面節点変位の総数)、縦軸は固有周期をそれぞれ表す。記号の□や○などで示される点が、固有値解析により得られた値であり、これらの対応するモードは図中に記入してある。また、図の上部に示した「3×4×6」といった文字列は計算に用いた要素分割を表しており、最初の数字は液高方向分割数、次の数字は半径方向分割数、最後の数字は周方向分割数をそれぞれ表す。また、これら固有値解析

図22 自由度数と固有周期の関係(浮屋根無し)

図23 自由度数と固有周期の関係(浮屋根有り)

図24 液高と固有周期の関係

により得られた点を結ぶ曲線に漸近する水平点線は次式で表される自由表面の固有周期の解析解により算定された値を表す。

$$T_{nm} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{\epsilon_{nm} g} \coth\left(\frac{\epsilon_{nm} H}{R}\right)} \quad (17)$$

ただし、 T_{nm} の半径方向次数 n 、周方向次数 m の固有周期を意味し、 ϵ_{nm} は第1種 m 位ベッセル関数 J_m に対し $J_m' = 0$ を満たす n 番目の正根を表す。また、 R, H はそれぞれタンクの半径及び液高を表す。

自由表面の場合、要素分割を増やすにつれ、固有値解析と解析解の値は良く一致することが分かる。

次に、浮屋根を有する場合の結果を同様に図23に示す。図中の記号や文字列の意味は先と同じである。図22と比較すると、 $\phi_{11}, \phi_{21}, \phi_{31}$ の固有周期は自由表面の場合と殆ど変わらず解析解と良く一致しているのに対し、 ϕ_{12}, ϕ_{13} の固有周期は自由液面の解析解から離れ、周期が幾分か短くなっている。また、 ϕ_{12} より ϕ_{13} の方が(周方向次数が大きいほど)より周期が短くなっていることが分かる。これは ϕ_{12}, ϕ_{13} の変形に対し、ポンツーンが曲げ抵抗するためである。

3.1、3.2節の数値解析モデルの要素分割は $4 \times 7 \times 12$ である。図23を見ると固有周期は十分に収束しているとはいえないが、振動挙動の大概を捉えるには十分な精度を有していると考える。 ϕ_{21} と ϕ_{13} の固有周期は実際よりもより近い値となっているが、時刻歴応答解析では多くの計算時間を要する為、やむを得ずこの要素分割とした。

次に浮屋根を有する場合に対して液高を変化させて固有値解析を行い、固有周期の変化を調査した。計算に用いる要素分割は $10 \times 11 \times 20$ とした。結果を図24に示す。横軸は液高、縦軸は固有周期を表し、その他の記号□や○等の意味は先と同様である。また同図中には、ポンツーンの面外曲げ剛性を0.5倍及び2倍とした時の ϕ_{13} の固有周期を点線で記入した。図を見ると ϕ_{21} と ϕ_{13} の固有周期は液高の比較的広い範囲で近い値を示しており、また、液高が高くなる程これらの固有周期は近づく傾向にある。従って、前節までに示した数値解析結果が妥当なものであるとすれば、液高が高いほど本報と同様の ϕ_{13} の振動が生起する可能性が高くなる。低液位の場合に生起するか否かは調査が必要である。

4 まとめ

完全流体と弾性体との非線形相互作用問題の定式化を行い、シングルデッキ型浮屋根を有する円筒液体貯槽の非線形スロッシング解析を行った。本論文の成果を以下にまとめる。

1. 著者らが既報^{(12),(13)}で提案している完全流体における非線形スロッシングの有限要素解析法を拡張し、浮屋根弾性体との相互作用問題の定式化を行った。定式化は変分原理に基づいており、煩雑になりがちなこの問題の非線形釣合式を簡潔に導出して示した。

2. 十勝沖地震において被災したシングルデッキ型浮屋根式タンクと同規模の数値解析モデルを設定し、提案手法を用いて地震応答解析を行った。その結果、浮屋根の二次モード（周方向1次、半径方向2次のモード）の振幅が大きくなるにつれ、浮屋根の幾何学的非線形性によって周方向3次、半径方向1次の振動モードが生起し、ボンツーンが破壊するほどの大きな面外曲げモーメントを発生した。

上記の2で述べた結果と同様の報告は既往の研究に見つからなかった。実際に二次モードの振動が卓越する際に周方向3次、半径方向1次の振動モードが生起するか否かについては、実験や他の数値解法と比較するなどして検証を行い、慎重に議論していく必要がある。

参考文献

- 1) 危険物保安技術協会：平成15年十勝沖地震危険物施設の被害記録，2004.12
- 2) 危険物保安技術協会：屋外タンク貯蔵所浮屋根審査基準検討会報告書，2004.9
- 3) 総務省告示第30号：危険物の規制に関する技術上の基準の細目を定める告示の一部を改正する件，2005.4
- 4) Nakagawa, K.: On the Vibration of an Elevated Water-Tank-II, Technology Reports of the Osaka University, No.117, pp.247-264, 1955
- 5) 山本善之：地震による石油タンクの液面の動揺と衝撃圧，高圧力，3(1), pp.2-8, 1965.1
- 6) 坂井藤一，西村正弘，小川浩：浮屋根式石油貯槽のスロッシング性状に関する研究，川崎技報，74号，pp.60-66, 1980
- 7) 松井徹哉：浮屋根式円筒液体貯槽の地震時スロッシング応答の解析，日本建築学会構造系論文集，No.594, P.167-173, 2005.8
- 8) 松井徹哉：シングルデッキ型浮屋根を有する円筒液体貯槽の地震時スロッシング応答，日本建築学会構造系論文集，No.607, P.101-109, 2006.9
- 9) 三浦正博，菊地務，米川太，人見光夫：浮き屋根式タンクのスロッシングシミュレーション，出光技報，VOL.47, NO.3, pp.62-70, 2004
- 10) 内海雅彦，石田和雄：非線形スロッシングによる石油タンク浮き屋根の振動に関する研究－第1報：内部共振の応力への影響，圧力技術，46(2), pp.50-58, 2008
- 11) 内海雅彦，石田和雄：非線形スロッシングによる石油タンク浮き屋根の振動に関する研究－第3報：デッキの縮みによるボンツーンの楕円化変形，圧力技術，46(5), pp.11-19, 2008
- 12) 山本憲司，皆川洋一：完全流体における非線形スロッシングの有限要素解析法－二次元矩形容器の解析－，日本建築学会構造系論文集，No.609, pp.89-96, 2006.11
- 13) 山本憲司，皆川洋一：完全流体における非線形スロッシングの有限要素解析法－二次元任意形状容器の解析及び振動実験との比較－，日本建築学会構造系論文集，No.634, pp.2119-2127, 2008.12
- 14) 皆川洋一：有限変位場でのポテンシャル流体と弾性体容器の相互作用を支配する汎関数，日本建築学会構造系論文報告集，No.362, pp.105-115, 1986.4
- 15) 鷲津久一郎他：有限要素法ハンドブックⅡ応用編，培風館，1997
- 16) 佐藤稔夫，中村恒善：新建築学大系36骨組構造の解析，彰国社，1982
- 17) 山本憲司，皆川洋一，大森博司：座屈荷重を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究，日本建築学会構造系論文集，No.564, pp.95-102, 2003.2
- 18) Luke, J. C.: A variational principles for a fluid with a free surface, J. of Fluid Mech., Vol. 27, 395-397, 1967
- 19) Longuet-Higgins, M. S. and Cokelet, E. D.: The deformation of steep waves on water, I. A numerical method of computation, Proc. R. Soc. Lond., A, 350, pp.1-26, 1976
- 20) Chen, W., Haroun, M. A., Liu, F.: Large amplitude liquid sloshing in seismically excited tanks, Earthq. Engng. Struct. Dyn., 25, 653-669, 1996
- 21) 大森博司，松井徹哉，日比野浩：液体貯槽における有限振幅液面動揺に関する研究（その1）基礎方程式の誘導とその円筒形貯槽への適用，日本建築学会構造系論文報告集，No.375, P.98-105, 1987.5
- 22) 嶋田三朗，山田善一，家村浩和，野田茂：円筒タンクの非線形スロッシング解析に基づく長周期応答スペクトルの推定，土木学会論文集，第368号，pp.383-392, 1986
- 23) 消防法第14号：危険物の規制に関する規則の一部を改正する省令等の施行について，2005.1

付録A 幾何学的非線形性を考慮した膜要素¹⁵⁾

要素の形状と変位場の定義を図Aに示す。要素内任意点における変位を、節点変位 (u_i, v_i, w_i) ($i=1, 2, 3$) を用いて次式により仮定する。

$$u = \sum_{i=1}^3 L_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^3 L_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^3 L_i w_i \quad (\text{A.1})$$

ここに、 L_i ($i=1, 2, 3$) は三角形の面積座標に対応しており、次式により表される。

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2S} \quad (\text{A.2})$$

$a_i = x_j y_k - x_k y_j$, $b_i = y_j - y_k$, $c_i = x_k - x_j$, S : 三角形の面積

ここに (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換を表す $((i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2))$

面内の歪として次式のグリーン歪を採用し、仮想仕事の原理により非線形釣合式を導いている。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

付録B 幾何学的非線形性を考慮した梁要素^{16), 17)}

部材 ij が外力を受け i' に変位したものとす (図B)。変形前の要素座標系における節点変位ベクトルを次式で表す。

$$\mathbf{d} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj}]^T \quad (\text{B.1})$$

節点変位ベクトル $\mathbf{d}$ から軸方向変位は剛体変位を、回転角は要素座標系で部材角を除去して定義される材端変位ベクトルを $\mathbf{d}_e$ として次式で表す。

$$\mathbf{d}_e = [u_e \quad \theta_{ex} \quad \theta_{eyi} \quad \theta_{ezi} \quad \theta_{eyj} \quad \theta_{ezj}]^T \quad (\text{B.2})$$

ここで $\mathbf{d}$ と $\mathbf{d}_e$ には幾何学的に次の関係が成り立つ。

$$u_e = \sqrt{(u_j - u_i + l)^2 + (v_j - v_i)^2 + (w_j - w_i)^2} - l \quad (\text{B.3})$$

$$\theta_{ex} = \theta_{xj} - \theta_{xi}, \quad \theta_{eyi} = \theta_{yi} - R_y, \quad \theta_{eyj} = \theta_{yj} - R_y, \quad \theta_{ezi} = \theta_{zi} - R_z, \quad \theta_{ezj} = \theta_{zj} - R_z$$

$$\text{ここに, } R_y = -\tan^{-1} \left(\frac{w_j - w_i}{u_j - u_i + l} \right), \quad R_z = \tan^{-1} \left(\frac{v_j - v_i}{u_j - u_i + l} \right) \quad (\text{B.4})$$

上式の材端変位 $\mathbf{d}_e$ を用いて、材軸上における任意位置の変位を軸方向及び回転変位を1次、法線方向変位を3次の多項式によって近似する。

$$\begin{aligned} u &= \xi u_e, \quad \theta = \xi \theta_{ex}, \quad v = l(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \theta_{eyi} + l(\xi^3 - \xi^2) \theta_{eyj} \\ w &= l(-\xi^3 + 2\xi^2 - \xi) \theta_{eyi} + l(-\xi^3 + \xi^2) \theta_{eyj} \quad (\xi = x/l) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

要素内任意点における軸方向歪 ε_x および捩れにより生じるせん断歪 γ_{xy}, γ_{xz} を次式で仮定する。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - z \phi_y - y \phi_z, \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \right) \phi_x, \quad \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - y \right) \phi_x \quad (\text{B.6})$$

ここに、

$$\varepsilon_0 = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\}, \quad \phi_x = \frac{d\theta}{dx}, \quad \phi_y = \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad \phi_z = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (\text{B.7})$$

であり、 Ψ はゆがみ関数である。上式歪を用いて、仮想仕事の原理により非線形釣合式を導いている。