積層ゴム内部の圧縮・曲げ弾性係数の分布に関する基礎的考察

COMPRESSION AND BENDING MODULI DISTRIBUTIONS
FOR MULTILAYERED ELASTOMERIC BEARINGS石井 建*, 菊地 優**
Ken ISHII and Masaru KIKUCHI

This paper describes two types of normalized modulus distribution under compression and bending for a circular rubber with pad top and bottom surfaces that are bonded to rigid layers. The distribution is applied to a series of axial springs to account for the compressive and bending moduli of the rubber pad. The paper demonstrates that the series of axial springs with varied modulus distribution has higher ratio of bending stiffness to compressive stiffness than the rubber pad. To define the correct ratio of bending stiffness to compressive stiffness, a nonlinear elastic model is provided for the axial springs. By using the varied modulus distribution and a nonlinear elastic model, the series of axial springs can produce much improved behavior over the uniform modulus assumption.

Keywords : *Seismic isolation, Multilayered elastomeric bearings, Compression stiffness, Bending stiffness, Bessel function*

免震, 積層ゴム, 圧縮剛性, 曲げ剛性, ベッセル関数

1. はじめに

免震構造に用いられる積層ゴムは、鉛直方向の高い支持能力と水平方向の柔軟性を両立させた構造部材である。積層ゴムの水平方向の力学特性は、低面圧下では大変形領域においても安定した荷重-変位関係を示すが、免震建物の終局状態において生じることが予想される高軸力・大変形のもとでは水平方向の支持力を失う座屈現象が生じる。このような水平特性の変化は、積層ゴムがせん断と軸力の相互作用の影響を受けることに起因し、近い将来に発生が予想されている長周期地震動下での免震建物の挙動を予測するうえで無視できない現象である。

積層ゴムにおけるせん断と軸力の連成効果を考慮するために、Koh & Kelly は積層ゴムの基部に回転ばねとせん断ばねを設け剛体要素で積層ゴムの高さを表現する力学モデル (Two-Spring Model)¹⁾、および回転ばねを積層ゴムの上下端に設けたモデル (Koh-Kelly Model)²⁾を提案した。これらの力学モデルでは、幾何学的非線形を考慮することによって $P-\Delta$ 効果による付加的な曲げモーメントが生じ、軸力の増大に伴う水平方向の復元力の喪失が曲げ特性を通じてモデル化される。著者らは Koh-Kelly Model の回転ばねを並列に配した軸ばねにより置き換えた力学モデル (並列軸ばねモデル) を出発点とし、平面二方向への拡張を行って角型鉛プラグ入り積層ゴムの加力方向による異方性を反映させた力学モデル³⁾や積層ゴムのハードニング特性を取り入れた復元力を採用して高減衰積層ゴムの力学特性を反映させた力学モデル⁴⁾を提案している。並列軸ばねモデルは積層ゴムに作用する軸力に応じて変化する曲げ特性を考慮可能であるが、

一部の解析結果は実験より高めの剛性評価をしてしまう欠点があり、積層ゴムの曲げ特性を端部並列ばねで表現する手法の改良が必要である。いずれの力学モデルにおいても、せん断と軸力の相互作用には曲げ特性の影響が反映されている。積層ゴムは長期荷重作用時には曲げを受けないように使用されるものの、地震時には上下面に作用するせん断力による曲げモーメントや建物重量による $P-\Delta$ 効果から生じる付加曲げモーメントが作用することを考えると、数値解析の精度を向上させるにはより正確な曲げ特性の表現が必要である。

一方、積層ゴムは中間鋼板がゴム層端部の変形を拘束する効果によって単体のゴム板よりも見かけの縦弾性係数が大きくなり、圧縮と曲げに関して異なる弾性係数を持つことが知られている⁵⁾。これらの弾性係数に関しては、ゴムの非圧縮性を仮定してゴム層の形状から定まる見かけの弾性係数を算出し、その値をゴム材料の体積弾性率によって近似的に補正する手法が広く用いられている。藤田らは積層ゴムの鉛直剛性の実験値と理論値を比較し、扁平なゴムの鉛直剛性に対しては体積変化を考慮することが必要であるとの結論を得ている⁶⁾。鈴木らはゴム板の曲げ剛性を測定し、回転角が小さい領域での実験値は体積弾性率を考慮した算定値と近い値になるという結果を得ている⁷⁾。西村らは体積弾性率が見かけの弾性係数に与える影響を厳密に扱い、ゴムの体積ひずみを考慮して鉛直剛性と曲げ剛性を求めた^{8),9)}。その結果、積層ゴム断面の中空部分が大きい場合には、圧縮と曲げに関する弾性係数がほぼ等しくなることが導かれている。飯塚は積層ゴムの端部回転が剛性に及ぼす影響を把握する目的で、積層ゴム端部の回転に関する自由度を考慮し、Haringx

* 北海道大学大学院工学院 大学院生・修士(工学)

** 北海道大学大学院工学研究院 教授・博士(工学)

Graduate Student, Graduate School of Engineering, Hokkaido University, M. Eng.
Prof., Faculty of Engineering, Hokkaido University, Dr. Eng.

理論¹⁰⁾をより一般化した積層ゴムの剛性を定式化した¹¹⁾。浅野・嶺脇は、積層ゴムは作用する曲げモーメントがある大きさに至ると急激に回転角が増加する曲げ特性を持ち、その曲げモーメントは導入面圧によって変化することを実験から明らかにした¹²⁾。このように、積層ゴムの鉛直特性と曲げ特性は、ともにゴムの形状・材料特性・荷重条件によって大きく変化する。

既往の研究^{3),4)}で積層ゴムの大変形挙動解析に用いた並列軸ばねモデルは積層ゴムの圧縮剛性を用いた定式化を行っており、曲げ特性をどの程度表現できているか直接的には明らかになっていない。本論文では、並列軸ばねモデルの改良を目的として、並列ばねの力学特性について考察を加え、積層ゴムの特性をより良く表現する手法について述べる。初めに、積層ゴムの圧縮と曲げに関する見かけの弾性係数の一般的な算出手法を概観する。次に、積層ゴム内部における弾性係数の分布状態について述べ、積層ゴムの圧縮剛性と曲げ剛性の関係について基礎的な考察を述べる。最後に、弾性係数の分布を応用して、並列ばねによって積層ゴムの圧縮特性と曲げ特性を同時に表現する手法を示す。

2. 弾性係数の算定

はじめに、積層ゴムの圧縮剛性と曲げ剛性の関係についての基礎的考察に向けて、Chalhoub & Kelly の方法を用いて見かけの弾性係数の算出手法を概観する¹³⁾。通常用いられる圧縮と曲げに関する弾性係数は、ゴム断面内に分布した応力を積分することで圧縮力と曲げモーメントを求め、それぞれを断面積と断面二次モーメントで除して平均化した値である。積層ゴムに関する理論式からは、中間鋼板の拘束効果により、圧縮と曲げに対して異なる弾性係数が導かれる。

2.1 圧縮に関する見かけの弾性係数

図1 ゴム層の形状

図2 ゴム層の変形状態

積層ゴムのゴム部分一層を図1に示す厚さ t 、半径 R の円板とする。ゴム層に図2(a)のような z 軸方向の圧縮力を作用させるとき、内部の微小領域に生じる体積ひずみについては次式が成り立つ。

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{p}{K} \quad (1)$$

ここで、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ はそれぞれ x, y, z 各方向のひずみであり、 p は微小領域における圧力、 K はゴム材料の体積弾性率を表す。ゴム部分では中間鋼板により上下面の変形が拘束されることを考慮し、 z 軸に垂直な平面が保持され、はらみ出し部分の断面外縁が放物線状になるという二点を仮定すると、(1) 式をゴムの厚さ方向に積分することで(2) 式が導かれる。

$$\nabla^2 p - \frac{12G}{Kr^2} p = -\frac{12G}{t^2} \varepsilon_c \quad (2)$$

ここで、 ε_c はゴム部分の圧縮ひずみ、 G はゴム材料のせん断弾性率である。変数 (x, y) の代わりに極座標系を導入して (r, θ) を用いると、(3) 式が成り立つ。

$$\nabla^2 p = \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 p}{d\theta^2} \quad (3)$$

ゴムの形状および圧縮時の変形状態が z 軸周りの回転について対称であることから、右辺の第3項は0である。これより、圧力 p の支配方程式は(4) 式で表される。

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} - \lambda^2 (p - K\varepsilon_c) = 0 \quad (\text{ただし、}\lambda^2 = \frac{12G}{Kr^2}) \quad (4)$$

圧力 p は r の関数となるが、鉛直ひずみ ε_c は r, θ によらず一定である。ゴム側面表面では圧力が0となることから境界条件 $p(R) = 0$ を考慮すると、(4) 式の解は(5) 式の形で書ける。

$$p(r) = K \left\{ 1 - \frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda R)} \right\} \varepsilon_c \quad (5)$$

ここで、 I_n は n 次の第一種変形ベッセル関数である。圧力を鉛直ひずみで除することにより、ゴム層内の任意位置における圧縮に関する弾性係数 e_c を算出できる。

$$e_c(r) = \frac{p(r)}{\varepsilon_c} = K \left\{ 1 - \frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda R)} \right\} \quad (6)$$

円形断面全体を積分領域とし、ゴム層全体における圧縮に関する弾性係数 E_c の平均値を(7) 式のように得ることができる。

$$E_c = \frac{\int e_c(r) dA}{\int dA} = K \left\{ 1 - \frac{2}{\lambda R} \frac{I_1(\lambda R)}{I_0(\lambda R)} \right\} \quad (7)$$

ここで、 $\int dA$ はゴムの断面積に相当し、積分値は πR^2 である。

2.2 曲げに関する見かけの弾性係数

ゴム層に図2(b)のような y 軸周りの曲げモーメントを作用させるとき、ゴム層の上下面がなす角を φ とすると、任意位置における圧縮ひずみ ε_c は r, θ の関数となり、(8) 式で表される。

$$\varepsilon_c(r, \theta) = -\frac{\varphi}{t} r \cos \theta \quad (8)$$

曲げモーメントが作用する場合に生じる圧力 p の支配方程式は(9) 式となる。

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 p}{d\theta^2} - \lambda^2 (p + K \cdot \frac{\varphi}{t} r \cos \theta) = 0 \quad (9)$$

圧力 p は r, θ の関数であり、任意の θ について $p(R, \theta) = 0$ となる境界条件を考慮し、解は (10) 式の形で書ける。

$$p(r, \theta) = K \left\{ \frac{R}{r} \frac{I_1(\lambda r)}{I_1(\lambda R)} - 1 \right\} \frac{\varphi}{r} r \cos \theta \quad (10)$$

曲げモーメントが作用する場合においても、圧力を鉛直ひずみで割ることにより、任意位置における曲げに関する弾性係数 e_b は、(11) 式のように r だけの関数で表現できる。

$$e_b(r) = \frac{p(r, \theta)}{\varepsilon_c(r, \theta)} = K \left\{ 1 - \frac{R}{r} \frac{I_1(\lambda r)}{I_1(\lambda R)} \right\} \quad (11)$$

ゴム層全体における曲げに関する弾性係数の平均値 E_b は (12) 式のように得られる。

$$E_b = \frac{\int e_b(r) \cdot x^2 dA}{\int x^2 dA} = K \left\{ 1 - \frac{4}{\lambda R} \frac{I_2(\lambda R)}{I_1(\lambda R)} \right\} \quad (12)$$

ここで、 $\int x^2 dA$ はゴムの断面二次モーメントに相当し、積分値は $\pi R^4/4$ である。

2.3 見かけの弾性係数の略算式

見かけの弾性係数の算定にベッセル関数を用いることは実用上の難点であるため、以下の手順のように求めた値を用いることが一般的である。まず、ゴムに体積変化が生じない、すなわち $K = +\infty$ と仮定し、(1) 式の右边を 0 とした微分方程式を解く。その解から得られる応力の分布を用いると、(7) 式と (12) 式で表わされた弾性係数の平均値 E_c, E_b は次式のように得られる。

$$E_c = 6S_1^2 G \quad (13)$$

$$E_b = 2S_1^2 G \quad (14)$$

ここで、 S_1 は (15) 式で計算される一次形状係数である。

$$S_1 = \frac{R}{2t} \quad (15)$$

ゴムの体積変化がない場合、縦弾性係数 E_0 とせん断弾性率 G の間には $E_0 = 3G$ の関係が成り立つので、(13),(14) 式に代入すると次式が得られる。

$$E_c = 2S_1^2 E_0 \quad (16)$$

$$E_b = \frac{2}{3} S_1^2 E_0 \quad (17)$$

ゴムの硬度によって定まる補正係数 κ を導入し、ゴム層上下面の拘束がない状態での剛性 E_0 を足し合わせることで、見かけの弾性係数の平均値は次式で書ける。

$$E_c = 2\kappa S_1^2 E_0 + E_0 = (1 + 2\kappa S_1^2) E_0 \quad (18)$$

$$E_b = \frac{2}{3} \kappa S_1^2 E_0 + E_0 = \left(1 + \frac{2}{3} \kappa S_1^2\right) E_0 \quad (19)$$

ゴム層の一次形状係数が大きい場合には体積変化の影響が無視できなくなり、(18),(19) 式による計算値の精度が悪くなるため、(20),(21) 式のように体積弾性率 K を用いて見かけの弾性係数を補正する手法が提案されている⁶⁾。

$$E_c' = \frac{E_c \cdot K}{E_c + K} \quad (20)$$

$$E_b' = \frac{E_b \cdot K}{E_b + K} \quad (21)$$

3. 弾性係数の分布状態

本章では、積層ゴムの断面内に分布する見かけの弾性係数について具体的な数値計算を行い、その分布状態について考察する。2.1 節と 2.2 節で示したゴム断面内の任意位置における弾性係数 $e_c(r)$ および $e_b(r)$ は、ゴムの形状および材料定数をパラメータとして変化させる。この特徴を明確に把握するために、二つの無次元量を導入する。

$$\bar{\lambda} = \lambda R = 4S_1 \sqrt{\frac{3G}{K}} \quad (22)$$

$$\bar{r} = \frac{r}{R} \quad (23)$$

$\bar{\lambda}$ は弾性係数の均一度に関するパラメータであり、ゴム材料の体積変化が小さいほど 0 に、ゴム形状が扁平であるほど $+\infty$ に近づく。また、 $\bar{r}$ は円形断面のゴムの中心からの距離を表す値であり、 $0 \leq \bar{r} \leq 1$ の範囲で弾性係数が定義される。弾性係数の分布 e_c および e_b を $\bar{\lambda}$ と $\bar{r}$ の関数とみなすと、(6) 式と (11) 式はそれぞれ (24) 式と (25) 式のように表現できる。

$$e_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) = K \left\{ 1 - \frac{I_0(\bar{\lambda} \bar{r})}{I_0(\bar{\lambda})} \right\} \quad (24)$$

$$e_b(\bar{\lambda}, \bar{r}) = K \left\{ 1 - \frac{1}{\bar{r}} \frac{I_1(\bar{\lambda} \bar{r})}{I_1(\bar{\lambda})} \right\} \quad (25)$$

また、弾性係数の平均値 E_c および E_b は、(7),(12) 式より (26),(27) 式で書ける。

$$E_c(\bar{\lambda}) = K \left\{ 1 - \frac{2}{\bar{\lambda}} \frac{I_1(\bar{\lambda})}{I_0(\bar{\lambda})} \right\} \quad (26)$$

$$E_b(\bar{\lambda}) = K \left\{ 1 - \frac{4}{\bar{\lambda}} \frac{I_2(\bar{\lambda})}{I_1(\bar{\lambda})} \right\} \quad (27)$$

図 3 に、 $\bar{\lambda}$ に応じた E_c と E_b の変化を示す。横軸は $1 \leq \bar{\lambda} \leq 100$ の範囲で対数軸とし、縦軸は K の係数倍として表現した。

図 3 弾性係数の平均値 E_c, E_b の変化

図 3 より、 $\bar{\lambda}$ が大きい場合、すなわち扁平なゴムほど弾性係数 E_c と E_b は共に体積弾性率 K に漸近し、 E_c と E_b の値が近づくことがわかる。

ここで、ゴム内の任意位置における弾性係数と平均値の関係を

(28),(29) 式で表現する。

$$e_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) = E_c(\bar{\lambda}) \cdot \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) \quad (28)$$

$$e_b(\bar{\lambda}, \bar{r}) = E_b(\bar{\lambda}) \cdot \bar{e}_b(\bar{\lambda}, \bar{r}) \quad (29)$$

新しく導入した $\bar{e}_c$ および $\bar{e}_b$ は無次元量である。これらは弾性係数の重み係数分布を表す関数となっているので、以降では分布関数と呼ぶ。分布関数 $\bar{e}_c$ および $\bar{e}_b$ は、(24)~(27) 式を用いて、(30),(31) 式のように得られる。

$$\bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) = \frac{e_c(\bar{\lambda}, \bar{r})}{E_c(\bar{\lambda})} = \left\{ 1 - \frac{I_0(\bar{\lambda}\bar{r})}{I_0(\bar{\lambda})} \right\} / \left\{ 1 - \frac{2}{\bar{\lambda}} \frac{I_1(\bar{\lambda})}{I_0(\bar{\lambda})} \right\} \quad (30)$$

$$\bar{e}_b(\bar{\lambda}, \bar{r}) = \frac{e_b(\bar{\lambda}, \bar{r})}{E_b(\bar{\lambda})} = \left\{ 1 - \frac{1}{\bar{r}} \frac{I_1(\bar{\lambda}\bar{r})}{I_1(\bar{\lambda})} \right\} / \left\{ 1 - \frac{4}{\bar{\lambda}} \frac{I_2(\bar{\lambda})}{I_1(\bar{\lambda})} \right\} \quad (31)$$

図 4 に、 $\bar{\lambda} = 1, 10, 100$ とした場合の $\bar{e}_c$ および $\bar{e}_b$ を示す。図 4 において、 $\bar{r} = 1$ となる外縁部および $y = 0$ での断面を太線で示した。縦軸の目盛りは 1 刻みである。

図 4 $\bar{\lambda}$ に応じた分布関数の変化

(左列: $\bar{e}_c$ の分布形状, 右列: $\bar{e}_b$ の分布形状)

(30),(31) 式で定義される二つの分布関数を $0 \leq r \leq 1$ の範囲全体で積分することで、(7) 式や (12) 式のように分布関数の平均値を計算できる。この積分の計算を簡略化するために、二つの分布関数が (32)

式のように関係付けられると仮定する。

$$\bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) = \alpha \bar{e}_b(\beta \bar{\lambda}, \bar{r}) \quad (32)$$

実際に (30) 式と (31) 式を数値計算すると、 $\bar{\lambda}$ に応じて (32) 式を成り立たせるような二つの係数 α と β が定まる。図 5 に、数値計算により求めた α と β の変化を示す。

図 5 係数 α, β の変化

積層ゴム内部における見かけの弾性係数分布に関する考察として、分布関数 $\bar{e}_c$ と $\bar{e}_b$ の特徴を以下に列挙する。

(i) 平均値

分布関数 $\bar{e}_c$ を断面全体で積分し、無次元化された圧縮に関する弾性係数の平均値 $\bar{E}_c$ を求めると、 $\bar{\lambda}$ によらず 1 となる。同様に、 $\bar{e}_b$ から無次元化された曲げに関する弾性係数の平均値 $\bar{E}_b$ を求めると、 $\bar{\lambda}$ によらず 1 となる。すなわち、(33),(34) 式が成り立つ。

$$\bar{E}_{c(c)} = \frac{\int \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) dA}{\int dA} = 1 \quad (33)$$

$$\bar{E}_{b(b)} = \frac{\int \bar{e}_b(\bar{\lambda}, \bar{r}) \cdot x^2 dA}{\int x^2 dA} = 1 \quad (34)$$

ここで、添え字を用いた表現 $E_{x(y)}$ は、分布関数 $\bar{e}_y$ を用いて弾性係数の平均値 $\bar{E}_x$ を算出したことを示す。添え字 x, y には、圧縮に関する場合に c 、曲げに関する場合に b を用いる。

もし、圧縮変形時の弾性係数分布が曲げ変形時にもそのまま当てはまるとすると、(32) 式と (34) 式を用いて、 $\bar{e}_c$ から曲げに関する弾性係数の平均値 $\bar{E}_b$ を次式で算出できる。

$$\bar{E}_{b(c)} = \frac{\int \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) \cdot x^2 dA}{\int x^2 dA} = \frac{\int \alpha \bar{e}_b(\beta \bar{\lambda}, \bar{r}) \cdot x^2 dA}{\int x^2 dA} = \alpha \quad (35)$$

同様に、(32) 式と (33) 式を用いて、 $\bar{e}_b$ から圧縮に関する弾性係数の平均値 $\bar{E}_c$ を次式で算出できる。

$$\bar{E}_{c(b)} = \frac{\int \bar{e}_b(\bar{\lambda}, \bar{r}) dA}{\int dA} = \frac{\int \frac{1}{\alpha} \bar{e}_c(\frac{1}{\beta} \bar{\lambda}, \bar{r}) dA}{\int dA} = \frac{1}{\alpha} \quad (36)$$

(ii) 最大値・最小値

分布関数は、 $\bar{r} = 0$ となる箇所、すなわちゴム断面中央で (37),(38)

式の最大値をとる。

$$\bar{e}_c(\bar{\lambda}, 0) = \left\{ 1 - \frac{1}{I_0(\bar{\lambda})} \right\} / \left\{ 1 - \frac{2}{\bar{\lambda}} \frac{I_1(\bar{\lambda})}{I_0(\bar{\lambda})} \right\} \quad (37)$$

$$\bar{e}_b(\bar{\lambda}, 0) = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{\lambda}}{I_1(\bar{\lambda})} \right\} / \left\{ 1 - \frac{4}{\bar{\lambda}} \frac{I_2(\bar{\lambda})}{I_1(\bar{\lambda})} \right\} \quad (38)$$

これらの値は、 $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ としたとき、それぞれ上限 $\bar{e}_c(0, 0) \rightarrow 2$, $\bar{e}_b(0, 0) \rightarrow 3$ となる。また、どちらも $\bar{\lambda}$ が大きくなるほど減少し、 $\bar{e}_c(+\infty, 0) \rightarrow 1$, $\bar{e}_b(+\infty, 0) \rightarrow 1$ となる。

分布関数の最小値は、 $\bar{r} = 1$ 、すなわちゴム断面の外縁で 0 となる。このことは $\bar{\lambda}$ の大小によらず、ゴムの縁では圧力が 0 であることに対応する。すなわち、(39),(40) 式が成り立つ。

$$e_c(\bar{\lambda}, 1) = 0 \quad (39)$$

$$\bar{e}_b(\bar{\lambda}, 1) = 0 \quad (40)$$

(iii) $\bar{\lambda}$ に対する分布形状の変化

(22) 式で定義された $\bar{\lambda}$ は、分布関数で表わされる弾性係数の均一度に関するパラメータであり、体積変化の小さいゴムほど 0 に、扁平なゴムほど $+\infty$ に近づく。 $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ としたとき、分布関数は (41),(42) 式の形に漸近する。

$$\bar{e}_c(0, \bar{r}) = 2 \times (1 - \bar{r}^2) \quad (41)$$

$$\bar{e}_b(0, \bar{r}) = 3 \times (1 - \bar{r}^2) \quad (42)$$

この結果は $K \rightarrow +\infty$ としてゴムの非圧縮性を仮定した場合に相当し、弾性係数の分布形状は回転放物面となる。

これに対して、 $\bar{\lambda} \rightarrow +\infty$ とすると、分布関数は (43),(44) 式の形に漸近する。

$$\bar{e}_c(+\infty, \bar{r}) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \bar{r} < 1) \\ 0 & (\bar{r} = 1) \end{cases} \quad (43)$$

$$\bar{e}_b(+\infty, \bar{r}) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \bar{r} < 1) \\ 0 & (\bar{r} = 1) \end{cases} \quad (44)$$

この結果はゴム厚さ $t \rightarrow 0$ として極めて扁平なゴム板を想定した場合に相当し、弾性係数は断面内に一様に分布する。

図 4(a),(c) はそれぞれ $\bar{\lambda} = 1, 100$ の分布形状であり、(41),(42) 式および (43),(44) 式で表わされる分布関数とほぼ等しくなっている。(22) 式より $\bar{\lambda} > 0$ であるので、中央部の見かけの弾性係数は $\bar{e}_c$ の場合に平均値の 2 倍、 $\bar{e}_b$ の場合に平均値の 3 倍以上には集中しない。また、ゴム板中央部の弾性係数は常に平均値よりも大きく、ゴム板外側の弾性係数が内側よりも大きくなることはない。

4. 分布関数を適用した並列ばねに関する考察

4.1 並列ばねの圧縮と曲げに関する特性

図 6 に示す並列ばねは、積層ゴムの断面を分割し各分割領域に鉛直ばねを配置することで、圧縮特性と曲げ特性を同時に表現する要素である。著者らは、並列ばねを水平一方向および二方向に配置し、

積層ゴムに作用する軸力が曲げ特性に与える影響や角型積層ゴムの加力方向による異方性を反映させた力学モデルを提案している^{3),4)}。これらの提案モデルでは、積層ゴムの水平方向の変形は並列ばねとともに用いるせん断ばねの変形と剛体要素の傾きによって表現され、積層ゴムの圧縮剛性と回転剛性が並列ばねによって表現される。

並列ばねが圧縮および曲げを受けた際の変形状態を図 7 に示す。並列ばねを構成する各鉛直ばねは分割部分の重心位置に配置され、各ばねの上下端が位置する点は変形の前で平面を保つと仮定する。

図 6 並列ばねの構成

図 7 並列ばねの変形状態

ここで、(28),(29) 式で表現された e_c と e_b は、ゴム層の鉛直方向ひずみに注目して算出した圧縮と曲げに関する見かけの弾性係数である。そのため、並列ばねを構成する各鉛直ばねに、ゴム中心からの距離に応じて e_c あるいは e_b により算出される弾性係数を与えることで、積層ゴムの圧縮特性や曲げ特性を表現できる。以下において並列ばねの本数は十分多いと仮定し、パラメータ $\bar{\lambda}$ に応じて変化する並列ばねの圧縮と曲げに関する特性を求める。並列ばねに与える弾性係数の分布を圧縮に関する弾性係数の分布 e_c としたとき、並列ばねの圧縮と曲げに関する弾性係数の平均値は (45),(46) 式のように求められる。

$$F_{c(c)} = \frac{\int E_c(\bar{\lambda}) \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) dA}{\int dA} = E_c(\bar{\lambda}) \quad (45)$$

$$E_{b(c)} = \frac{\int E_c(\bar{\lambda}) \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) \cdot x^2 dA}{\int x^2 dA} = \alpha E_c(\bar{\lambda}) \quad (46)$$

ここで、(33)~(36) 式と同様の添え字表現を用いた。並列ばねに曲げに関する弾性係数の分布 e_b を与えた場合も、並列ばねの圧縮と曲げに関する弾性係数の平均値を同様に算出できる。

$$F_{c(b)} = \frac{\int E_b(\bar{\lambda}) \bar{e}_b(\bar{\lambda}, \bar{r}) dA}{\int dA} = \frac{1}{\alpha} F_b(\bar{\lambda}) \quad (47)$$

$$E_{b(b)} = \frac{\int E_b(\bar{\lambda}) \bar{e}_b(\bar{\lambda}, \bar{r}) \cdot x^2 dA}{\int x^2 dA} = E_b(\bar{\lambda}) \quad (48)$$

(45)~(48) 式より、並列ばねの特性について曲げ圧縮比を $E_{b(c)}/E_{c(c)}$

あるいは $E_{b(b)}/E_{c(b)}$ で定義すると、その値はどちらも (32) 式で導入した α と等しくなる。これより、曲げ圧縮比は並列ばねに適用した弾性係数の分布 e_c と e_b の別によらず定まり、パラメータ $\bar{\lambda}$ に応じて変化することがわかる。これに対して、実際の積層ゴムに関する曲げ圧縮比 E_b/E_c は、(26) 式および (27) 式を用いて算出できる。積層ゴムの曲げ圧縮比 E_b/E_c と並列ばねの曲げ圧縮比 α との比較を図 8 に示す。

図 8 積層ゴムと並列ばねの曲げ圧縮比の変化

図 8 より、弾性係数の均一度 $\bar{\lambda} \rightarrow +\infty$ としたとき、 E_b/E_c は 1 に漸近する。これは、 $\bar{\lambda}$ が大きくなるほどゴム端部の拘束による効果が比較的小さくなり、曲げ剛性と圧縮剛性に差がなくなること示す。ゴムの扁平度が増し $\bar{\lambda}$ が大きくなる領域では、 α が E_b/E_c とほぼ一致しており、一般的な梁理論が適用できるため並列ばねによって積層ゴムの特性を正しく表現できる。一方、 $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ としたとき、 E_b/E_c は 1/3 に、 α は 2/3 に近づく。これは、 $\bar{\lambda}$ が小さくなるほど曲げ剛性は圧縮剛性に比べて小さくなることを示す。ゴムの体積変化が少なくなり $\bar{\lambda}$ が小さくなる領域では α が E_b/E_c よりも大きく、並列ばねは実際の積層ゴムよりも圧縮剛性に対する曲げ剛性の比を大きく評価している。実際の積層ゴムは扁平かつ体積変化が少ないため $\bar{\lambda}$ の値は積層ゴムの諸元によって大きく変動するが、常に $\alpha > E_b/E_c$ となるため、並列ばねは積層ゴムよりも大きな曲げ圧縮比を持つことがわかる。

4.2 並列ばねの圧縮・曲げ特性を改良する手法の提案

並列ばねは実際のゴムよりも大きな曲げ圧縮比を与えるため、積層ゴムの特性を模擬する力学モデルへの適用にあたっては圧縮剛性に対して曲げ剛性を低減させることが必要になる。そこで、積層ゴムの引張試験からは積層ゴムの引張降伏応力度が低いことが明らかとなっている¹⁴⁾ ことを踏まえて、並列ばねを構成する各鉛直ばねに圧縮と引張に対して異なる弾性係数を与える手法を考えてみる。引張に対する弾性係数を圧縮に対する弾性係数よりも小さく設定することで、圧縮剛性は変化せずに曲げ剛性が低減される。並列ばねに適用する応力-ひずみ関係を図 9 に示す。

図 9 並列ばねを構成する鉛直ばねの応力-ひずみ関係

このとき、並列ばねに与える弾性係数 e_c は、圧縮に関する弾性係数の分布 e_c を基準として (49) 式で表現できる。

$$e_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) = N(\bar{r}, \theta) \cdot e_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) \quad (49)$$

ここで、 $N(\bar{r}, \theta)$ は並列ばねを構成する各鉛直ばねの位置と応力状態によって定められる関数であり、(50) 式で定義される。

$$N(\bar{r}, \theta) = \begin{cases} 1 & (\text{圧縮領域}) \\ n & (\text{引張領域}) \end{cases} \quad (50)$$

n は引張と圧縮の弾性係数比であり、 n に 1 よりも小さい値を適用することによって、引張に対しては圧縮よりも小さな弾性係数を示すような振る舞いを再現することができる。具体的な n の値は、圧縮と曲げがそれぞれ単独で作用した場合について、弾性係数の分布 e_c によって定まる並列ばねの曲げ圧縮比が、積層ゴムの曲げ圧縮比と等しくなるように定める。 e_c を適用した並列ばねの圧縮に関する弾性係数の平均値は (51) 式で求められる。

$$\begin{aligned} E_{c(c')} &= \frac{\int N(\bar{r}, \theta) \cdot E_c(\bar{\lambda}) \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) dA}{\int dA} \\ &= \frac{\int 1 \cdot E_c(\bar{\lambda}) \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) dA}{\int dA} = E_c(\bar{\lambda}) \end{aligned} \quad (51)$$

ここで、圧縮変形時にはすべてのばねが圧縮領域にあることを用いた。同様に、 y 軸周りの曲げモーメントが作用するとき、並列ばねの曲げに関する弾性係数の平均値は (52) 式のように求められる。

$$\begin{aligned} E_{b(c')} &= \frac{\int N(\bar{r}, \theta) \cdot E_c(\bar{\lambda}) \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) \cdot (x-l)^2 dA}{\int x^2 dA} \\ &= \frac{\int_C 1 \cdot E_c(\bar{\lambda}) \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) \cdot (x-l)^2 dA + \int_T n \cdot E_c(\bar{\lambda}) \bar{e}_c(\bar{\lambda}, \bar{r}) \cdot (x-l)^2 dA}{\int x^2 dA} \end{aligned} \quad (52)$$

ここで、 l は中立軸位置の x 座標である。また、積分領域について、並列ばねの圧縮領域を C 、引張領域を T とした。弾性係数比 n は、並列ばねの曲げ圧縮比が積層ゴムの曲げ圧縮比と等しくなるように定めればよい。この条件は (53) 式で書ける。

$$\frac{E_{b(c')}}{E_{c(c')}} = \frac{E_b}{E_c} \quad (53)$$

数値計算により求めた $\bar{\lambda}$ に応じた n の変化を図 10 に示す。

図 10 弾性係数比 n の変化

n は $\bar{\lambda} \rightarrow +\infty$ としたとき 1 に漸近する。これより、並列ばねに与える応力-ひずみ関係は $\bar{\lambda}$ が大きいほど引張領域での弾性係数が圧縮領域での弾性係数に近づく傾向を示す。 $\bar{\lambda}$ が十分大きい場合には、一般的な梁理論のように圧縮と引張に対して対称的な応力-ひずみ関係を適用することが可能である。逆に、 $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ としたときは、 n を用いて圧縮と引張に対して非対称な軸方向特性を並列ばねに与えることで適切な曲げ圧縮比を実現することが必要である。以上に述べた手法のまとめとして、実際の積層ゴムを想定した数値の例を表 1 に示す。

表 1 並列ばねに適用する数値の一例

一次形状係数	S_I	30
せん断弾性率	G	0.6 [MPa]
体積弾性率	K	2000 [MPa]
弾性係数の均一度	$\bar{\lambda}$	3.6
積層ゴムの曲げ圧縮比	E_b/E_c	0.574
並列ばねの弾性係数比	n	0.629

以上のように、積層ゴムの材料と形状の諸元から $\bar{\lambda}$ を算出し、(24) 式から e_c を求めることができる。さらに、 $\bar{\lambda}$ の値から n を求め、 n により定まる関数 N を用いて、並列ばねに与える弾性係数の分布を $e_d = N \cdot e_c$ とすれば、 e_d によって定まる圧縮に関する弾性係数の平均値および曲げ圧縮比は両方とも積層ゴムと同じ値となる。ここから、 e_d によって定まる曲げに関する弾性係数の平均値も積層ゴムと同じ値となり、並列ばねによって積層ゴムの圧縮挙動と曲げ挙動を同時に再現できる。

5. まとめ

本論文では、積層ゴムのように端部の変形が拘束されたゴム層に圧縮力および曲げモーメントが作用した際の見かけの弾性係数の分布に関して論じた。その分布について、ゴムの形状と材料定数によって定まる無次元量のパラメータ $\bar{\lambda}$ を導入し、特性を詳細に記述した。また、弾性係数の分布関数を並列ばねへ適用する場合について考察し、並列ばねは実際の積層ゴムよりも圧縮剛性に対する曲げ剛性の比を大きく評価することを明らかにした。最後に、圧縮と引張に対

して異なる弾性係数を与えることによって並列ばねの挙動を積層ゴムの挙動に一致させる手法を提案した。

今後は、圧縮と曲げが同時に作用する場合の並列ばねの力学特性をより明確に捉えるとともに、提案した手法を並列ばねを用いた積層ゴムの力学モデルに適用し、各種積層ゴムについて力学挙動解析の精度改良を行う予定である。

参考文献

- 1) C. G. Koh and J. M. Kelly: A Simple Mechanical Model for Elastomeric Bearings Used in Base Isolation, Int. J. Mech. Sci., Vol. 30, No. 12, pp. 323–334, 2000.
- 2) J. M. Kelly: Earthquake-resistant Design with Rubber (2nd edition), Springer, London, 1997.
- 3) 菊地優, 山本祥江, 仲村崇仁, 西村拓也, 田村和夫: 3 次元並列多軸ばねを用いた角型鉛プラグ入り積層ゴムの大变形挙動解析, 日本建築学会構造系論文集, 第 638 号, pp. 647–655, 2009.4.
- 4) 菊地優, 石井建, 加藤秀章: 大変形・高軸力下における高減衰積層ゴムの力学挙動予測に関する研究, 構造工学論文集, Vol. 56B, pp. 179–188, 2010.3.
- 5) A. N. Gent and E. A. Meinecke: Compression, Bending, and Shear of Bonded Rubber Blocks, Polymer Engineering and Science, Vol. 10, No. 1, pp. 48–53, 1970.1.
- 6) 藤田聡, 藤田隆史: 重量機器免震用積層ゴムの静的加力実験 第 3 報 剛性についての理論的検討一, 生産研究, Vol. 38, No. 4, pp. 189–191, 1986.4.
- 7) 鈴木重信, 正木信男, 大島靖樹: 積層ゴムの曲げ剛性に関する研究 ゴムディスクの曲げ試験, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 II, pp. 539–540, 1998.
- 8) 西村功, 山田俊一, 坂本光雄, 近藤明洋, 小堀鐸二: 中空断面を有する積層ゴム支承の鉛直剛性に関する解析的研究, 日本建築学会構造系論文集, 第 505 号, pp. 61–68, 1998.3.
- 9) 西村功: 中空断面を有する積層ゴム支承の曲げ剛性に関する解析的研究, 日本建築学会構造系論文集, 第 558 号, pp. 149–156, 2002.8.
- 10) J.A.Haringx: On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and Their Application for Vibration-Free Mountings, Philips Research Reports, Vol. 3, 1948 & Vol. 4, 1949.
- 11) 飯塚真巨: 積層ゴムの剛性マトリクス (Haringx 理論に基づく定式化), 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 II, pp. 619–620, 1995.
- 12) 浅野三男, 嶺脇重雄: 取り付け部の柔性を考慮した免震用積層ゴムの水平剛性評価, 日本建築学会技術報告集, 第 8 号, pp. 57–62, 1999.
- 13) Michel S. Chalhoub and James M. Kelly: Effect of Bulk Compressibility on the Stiffness of Cylindrical Base Isolation Bearings, Int. J. Solids Structures, Vol. 26, No. 7, pp. 743–760, 1990.
- 14) 大島靖樹: 積層ゴム免震要素の引張許容応力設定に関する検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 II, pp. 535–536, 1997.

(2010年12月8日原稿受理, 2011年4月19日採用決定)