解析解と有限要素法の結合解法による浮屋根式円筒液体貯槽の 非線形スロッシング解析

A HYBRID ANALYTICAL AND FINITE ELEMENT METHOD FOR NONLINEAR SLOSHING ANALYSIS OF FLOATING-ROOF TYPE CYLINDRICAL LIQUID STORAGE TANKS

松井 徹哉^{*1}, 永谷 隆志^{*2}

Tetsuya MATSUI and Takashi NAGAYA

A hybrid analytical and finite element method is proposed to solve the nonlinear sloshing problem in a floating-roof type cylindrical liquid storage tank under long-period ground motion. The contained liquid is assumed to be inviscid and incompressible and the flow is assumed to be irrotational, while the floating roof is considered as a Kirchhoff plate undergoing large deflection. The proposed method is based on representation of the liquid motion by the analytical solution to the potential theory that satisfies the rigid wall and bottom conditions. This requires only the discretization of the liquid surface and the floating roof into finite elements, thus leading to a computationally very efficient method compared with full numerical analysis. Numerical examples are presented to investigate the nonlinear sloshing in oil storage tanks with single-deck type floating roofs damaged during the 2003 Tokachioki earthquake.

Keywords: liquid storage tank, single-deck type floating roof, fluid-structure interaction, nonlinear sloshing, long-period ground motion

液体貯槽, シングルデッキ型浮屋根, 流体—構造連成解析, 非線形スロッシング, 長周期地震動

1. 序

2003年十勝沖地震では、苫小牧地区の石油貯槽7基でスロッシングにより浮屋根が沈没し、そのうち1基が全面火災に至るといって甚大な被害が発生した。沈没した貯槽の浮屋根はいずれも、中央の曲げ剛性の極めて低いデッキ部と外周の剛性の比較的高いボンツーン部から成るシングルデッキ型浮屋根である。ボンツーン部にはスロッシング波圧により座屈破壊した痕跡が残されており、損傷した浮き室に原油が浸入し徐々に浮力を失って沈没に至ったと推測される。危険物保安技術協会の報告書¹⁾によると、このボンツーンの座屈は液面の有限振幅変位やデッキ部の大変形に伴うボンツーンの楕円化が原因であると指摘されている。この地震被害を教訓として、2005年には危険物の規制に関する技術上の基準の細目を定める総務省告示²⁾が改正され、長周期地震動によるスロッシングを考慮した浮屋根の耐震強度評価が義務付けられるようになった。

液体貯槽のスロッシングについては、古くから研究者の関心を集め、液面の有限振幅変位を考慮した理論的・数値的検討も多数報告されているが、そのほとんどが自由液面を有する場合を扱ったものであり^{3, 4)}、弾性体としての浮屋根と液体の連成を考慮した研究は、線形範囲に限ってみても数少ない⁵⁻⁹⁾。液体や浮屋根の非線形

性を考慮した解析例としては、汎用有限要素コードを用いた詳細解析¹⁰⁾のほか、Utsumi et al.¹¹⁾、山本ら¹²⁾の最近の研究がある。Utsumi et al.は液体—浮屋根連成系の非線形支配方程式を等価な変分原理に置き換えガラーキン法を適用して解く方法を提案し、内部共振によって発生する周方向0次および2次の非線形モードの振動がボンツーンの応力を増大させる可能性を指摘している。また山本らはALE有限要素法による数値解析を行い、線形2次モードとの共振による周方向3次の非線形モードの発生の可能性を示唆している。このような非線形現象の発生は井田ら¹³⁾、西ら¹⁴⁾および著者ら^{15, 16)}の模型振動実験でも観測されている。

以上のように、浮屋根の耐震強度の検討には液体—浮屋根連成系の非線形性を考慮した解析が必要となるが、現状ではこのような解析法が十分に確立されているとは言い難い。すなわち、汎用有限要素コードを用いた非線形詳細解析は入力データの作成に要する労力や計算時間が膨大となり、実用的簡便性に欠ける。一方、非線形支配方程式をガラーキン法により解く方法は理論的には完結しているが、非線形項の導出に煩雑な手計算を必要とし、また摂動法を採用しているため幾何学的非線形性などの非線形性の強い現象には適用できないという、実用上の限界がある。

^{*1} 名城大学理工学部建築学科 特任教授・工博

^{*2} 名城大学高度制震実験・解析研究センター
博士研究員・博士(工学)

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Science and Technology, Meijo Univ., Dr. Eng.
Post Doctoral Researcher, Advanced Research Center for Seismic Experiments and Computations, Meijo Univ., Dr. Eng.

本稿では、このような欠点を改良し、理論的完結性と実用的簡便性を兼ね備えた解法として、液体に対しては液面条件（運動学的条件および動力学的条件）を除く全境界条件を満たすポテンシャル理論の解析解を、浮屋根に対しては有限要素法を適用する結合解法を提案する。この方法によれば、液体領域や貯槽本体の要素分割を必要とせず、入力データ作成の労力から開放される上に、浮屋根部分のモデル化には既存の有限要素モデルを、圧力影響マトリックスを介して液体部分と結合するだけで、液体—浮屋根の連成を容易に考慮することができ、必要に応じて浮屋根の幾何学的非線形性や材料非線形性を考慮することも可能である。前稿¹⁷⁾では、本解法を2次元円筒貯槽に適用してその有効性を示した。本稿ではさらに、3次元円筒貯槽にも適用できるように拡張するとともに、2003年十勝沖地震で被災したシングルデッキ型浮屋根貯槽に適用して、被害の原因究明と再発防止対策に役立てることを目的とする。

2. 解析方法

2.1 境界値問題

図1に示すような平底円筒液体貯槽の地震時液面動揺問題を扱う。貯槽は剛体であると仮定し、その半径を R 、液深を H とする。貯槽に固定され貯槽とともに移動するオイラー直交座標系 (x, y, z) の原点を静止液面中心にとり、 x 軸を水平加振方向に、 z 軸を鉛直上向きにとる。さらに円筒座標系 (r, θ, z) を $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ によって定義する。

内容液は理想流体でポテンシャル理論が成立すると仮定すると、 x 方向に水平地動加速度 $\ddot{x}_g(t)$ を受ける場合の速度ポテンシャル ϕ の境界値問題は、次式のように記述される。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{流体内で} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{側壁 } r = R \text{ で} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{底面 } z = -H \text{ で} \quad (3)$$

図1 貯槽の形状と座標系

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{液面 } \Gamma_f \text{ で} \quad (4)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \nabla^2 \phi - \mu \phi - \ddot{x}_g \xi - g \zeta - \frac{p}{\rho} \quad \text{液面 } \Gamma_f \text{ で} \quad (5)$$

ここに、 (ξ, η, ζ) は液体粒子の瞬間位置を示すラグランジェ座標、 D/Dt はラグランジェ時間微分を示し、 μ は減衰係数、 g は重力加速度、 ρ は液体密度、 p は浮屋根面に作用する圧力である。

有限要素法によりモデル化された浮屋根の運動方程式は、一般的に次式のように表せる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} - \mathbf{F}\mathbf{P} = -\mathbf{M}\mathbf{I}_x \ddot{x}_g \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{M}$ は全体質量マトリックス、 $\mathbf{C}$ は全体減衰マトリックス、 $\mathbf{K}$ は全体剛性マトリックス、 $\mathbf{D}$ ($\dot{\mathbf{D}}$, $\ddot{\mathbf{D}}$)は節点変位(速度, 加速度)ベクトル、 $\mathbf{P}$ は節点圧力ベクトル、 $\mathbf{F}$ は $\mathbf{F}\mathbf{P}$ が圧力 p に等価な節点ベクトルを与えるように定義された圧力影響マトリックス、 $\mathbf{I}_x$ は x 方向変位に対応する行のみを1とし、他を0とする列ベクトルである。

浮屋根変位と液面変位は法線速度の連続条件

$$n_x \dot{u} + n_y \dot{v} + n_z \dot{w} = n_x \frac{D\xi}{Dt} + n_y \frac{D\eta}{Dt} + n_z \frac{D\zeta}{Dt} \quad \text{液面 } \Gamma_f \text{ 上で} \quad (7)$$

あるいは式(4)を代入して

$$n_x \dot{u} + n_y \dot{v} + n_z \dot{w} = n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + n_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{液面 } \Gamma_f \text{ 上で} \quad (8)$$

を満足しなければならない。ここに、 (u, v, w) は浮屋根の (x, y, z) 方向変位を、 $\cdot$ は時間 t に関する微分を、 (n_x, n_y, n_z) は液面の外向き法線の (x, y, z) 方向余弦を、 $\partial/\partial n$ は法線方向の微分を示す。

2.2 速度ポテンシャルの解

連続方程式(1)、壁面条件(2)および底面条件(3)を満足する速度ポテンシャル ϕ の解を次の形に仮定する^{注1)}。

$$\phi = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M \alpha_m^n(t) H_m^n(r, z) \cos(n\theta) + \alpha_0(t) \quad (9)$$

ここに、 α_m^n は (m, n) 次のモード座標、 α_0 は任意の時間関数、

$$H_m^n(r, z) = J_n(\varepsilon_m^n r/R) \cosh[\varepsilon_m^n (z+H)/R] \quad (10)$$

で、 J_n は n 次の第1種ベッセル関数、 ε_m^n は $J_n'(\varepsilon_m^n) = 0$ を満たす正実根である。

式(9)を式(8)、(5)に代入し、 $D\phi/Dt = \partial\phi/\partial t + \nabla^2\phi$ に注意して整理すれば、液面における運動学的条件および動力学的条件はそれぞれ次式のように表される。

$$\begin{aligned} n_x \dot{u} + n_y \dot{v} + n_z \dot{w} = & \sum_n \sum_m \alpha_m^n \left[n_x \left(\frac{\partial H_m^n}{\partial r} \cos(n\theta) \cos\theta + \frac{n}{r} H_m^n \sin(n\theta) \sin\theta \right) \right. \\ & \left. + n_y \left(\frac{\partial H_m^n}{\partial r} \cos(n\theta) \sin\theta - \frac{n}{r} H_m^n \sin(n\theta) \cos\theta \right) + n_z \frac{\partial H_m^n}{\partial z} \cos(n\theta) \right] \end{aligned} \quad \text{液面 } \Gamma_f \text{ 上で} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_n \sum_m \frac{d\alpha_m^n}{dt} H_m^n \cos(n\theta) + \frac{d\alpha_0}{dt} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_n \sum_m \sum_l \sum_k \alpha_m^n \alpha_k^l \left[\left(\frac{\partial H_m^n}{\partial r} \frac{\partial H_k^l}{\partial r} + \frac{\partial H_m^n}{\partial z} \frac{\partial H_k^l}{\partial z} \right) \cos(n\theta) \cos(l\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{nl}{r^2} H_m^n H_k^l \sin(n\theta) \sin(l\theta) \right] - \sum_n \sum_m 2h_m^n \omega_m^n \alpha_m^n H_m^n \cos(n\theta) \\
&\quad - \ddot{x}_g \xi - g\zeta - \frac{p}{\rho} \quad \text{液面}\Gamma_f\text{上で}
\end{aligned} \tag{12}$$

ここに、 $h_m^n = \mu/(2\omega_m^n)$ は (m, n) 次のモード減衰定数を、 ω_m^n は次式で定義される (m, n) 次の固有円振動数を示す。

$$\omega_m^n = \sqrt{(g/R) \varepsilon_m^n \tanh(\varepsilon_m^n H/R)} \tag{13}$$

以上により、浮屋根を有する円筒液体貯槽の非線形スロッシング問題は浮屋根変位 $\mathbf{D}$ 、圧力 $\mathbf{P}$ 、モード座標 α_m^n および任意時間関数 α_0 を未知量とする初期値問題(6)、(11)および(12)の解に帰着される。

2.3 重み付き残差方程式とその離散化

液面における運動学的条件(11)および動力学的条件(12)に重み関数 $\hat{\phi}$ および $\hat{\delta}$ を乗じ、液面にわたり積分すれば、次の重み付き残差方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_f} \hat{\phi} \left[(n_x \dot{u} + n_y \dot{v} + n_z \dot{w}) \right. \\
& \quad - \sum_n \sum_m \alpha_m^n \left\{ n_x \left(\frac{\partial H_m^n}{\partial r} \cos(n\theta) \cos\theta + \frac{n}{r} H_m^n \sin(n\theta) \sin\theta \right) \right. \\
& \quad \left. + n_y \left(\frac{\partial H_m^n}{\partial r} \cos(n\theta) \sin\theta - \frac{n}{r} H_m^n \sin(n\theta) \cos\theta \right) \right. \\
& \quad \left. \left. + n_z \frac{\partial H_m^n}{\partial z} \cos(n\theta) \right\} \right] d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_f} \hat{\delta} \left[\sum_n \sum_m \frac{d\alpha_m^n}{dt} H_m^n \cos(n\theta) + \sum_n \sum_m 2h_m^n \omega_m^n \alpha_m^n H_m^n \cos(n\theta) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \sum_l \sum_k \alpha_m^n \alpha_k^l \left[\left(\frac{\partial H_m^n}{\partial r} \frac{\partial H_k^l}{\partial r} + \frac{\partial H_m^n}{\partial z} \frac{\partial H_k^l}{\partial z} \right) \cos(n\theta) \cos(l\theta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{nl}{r^2} H_m^n H_k^l \sin(n\theta) \sin(l\theta) \right] + \frac{d\alpha_0}{dt} + \ddot{x}_g \xi + g\zeta + \frac{p}{\rho} \right] d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

式(14)および(15)を離散化して解くために、時々刻々変化する液面 Γ_f を N_e 個の有限要素に分割する。要素分割の方法は任意であって良いが、ここでは液面要素の節点が浮屋根要素の液面に接する節点と一致するように分割する。これにより、液面に関する諸量と浮屋根に関する諸量が両者の接線面では共通の座標位置で定義されることになり、液面と浮屋根面の連続性を保証することが容易となる^{注2)}。このように要素分割すれば、要素 j ($=1, 2, \dots, N_e$) 内の (ξ, η, ζ) 、 (u, v, w) および p は、形状関数 $\mathbf{N}$ を用いて、次式のように節点値で内挿される。

$$\begin{aligned}
\xi &= \mathbf{N}\mathbf{x}, & \eta &= \mathbf{N}\mathbf{y}, & \zeta &= \mathbf{N}\mathbf{z} \\
u &= \mathbf{N}\mathbf{u}, & v &= \mathbf{N}\mathbf{v}, & w &= \mathbf{N}\mathbf{w}, & p &= \mathbf{N}\mathbf{p}
\end{aligned} \tag{16}$$

ここに、太字は各変数の節点値から成る列ベクトルを示す。

重み関数 $\hat{\phi}$ および $\hat{\delta}$ も同様に

$$\hat{\phi} = \sum_n \sum_m \hat{\alpha}_m^n H_m^n \cos(n\theta) + \hat{\alpha}_0, \quad \hat{\delta} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{d}} \tag{17}$$

といて、式(16)、(17)を式(14)、(15)に代入し、変形前 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 = \mathbf{0})$ にあつた液面節点座標（浮屋根要素の液面に接する節点の座標）は変形後

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{v}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{w} = \mathbf{w} \tag{18}$$

に移動することに注意すれば、重み関数の任意性により、次の離散化方程式が導かれる。

$$\sum_{j=1}^{N_e} \left[(\mathbf{B}\mathbf{x}_m^n \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{y}_m^n \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}\mathbf{z}_m^n \dot{\mathbf{w}}) - \sum_l \sum_k E_{mk}^{nl} \alpha_k^l \right] = 0 \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{N_e} (\mathbf{B}\mathbf{x}_0 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{y}_0 \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}\mathbf{z}_0 \dot{\mathbf{w}}) = 0 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_e} \left[\sum_n \sum_m \left(\mathbf{G}_m^n \frac{d\alpha_m^n}{dt} + 2h_m^n \omega_m^n \mathbf{G}_m^n \alpha_m^n + \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \mathbf{Q}_{mk}^{nl} \alpha_k^l \right) \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{G}_0 \frac{d\alpha_0}{dt} + \ddot{x}_g \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) + g\mathbf{A}\mathbf{w} + \frac{1}{\rho} \mathbf{A}\mathbf{p} \right] = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{21}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}\mathbf{x}_m^n &= \int_{S_e} n_x \mathbf{N} H_m^n \cos(n\theta) dS, & \mathbf{B}\mathbf{x}_0 &= \int_{S_e} n_x \mathbf{N} dS \\
\mathbf{B}\mathbf{y}_m^n &= \int_{S_e} n_y \mathbf{N} H_m^n \cos(n\theta) dS, & \mathbf{B}\mathbf{y}_0 &= \int_{S_e} n_y \mathbf{N} dS \\
\mathbf{B}\mathbf{z}_m^n &= \int_{S_e} n_z \mathbf{N} H_m^n \cos(n\theta) dS, & \mathbf{B}\mathbf{z}_0 &= \int_{S_e} n_z \mathbf{N} dS
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
E_{mk}^{nl} &= \int_{S_e} H_m^n \cos(n\theta) \left[n_x \left\{ \frac{\partial H_k^l}{\partial r} \cos(l\theta) \cos\theta + \frac{l}{r} H_k^l \sin(l\theta) \sin\theta \right\} \right. \\
&\quad \left. + n_y \left\{ \frac{\partial H_k^l}{\partial r} \cos(l\theta) \sin\theta - \frac{l}{r} H_k^l \sin(l\theta) \cos\theta \right\} \right. \\
&\quad \left. + n_z \frac{\partial H_k^l}{\partial z} \cos(l\theta) \right] dS
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\mathbf{G}_m^n = \int_{S_e} \mathbf{N}^T H_m^n \cos(n\theta) dS, \quad \mathbf{G}_0 = \int_{S_e} \mathbf{N}^T dS \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{mk}^{nl} &= \int_{S_e} \mathbf{N}^T \left[\left(\frac{\partial H_m^n}{\partial r} \frac{\partial H_k^l}{\partial r} + \frac{\partial H_m^n}{\partial z} \frac{\partial H_k^l}{\partial z} \right) \cos(n\theta) \cos(l\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{nl}{r^2} H_m^n H_k^l \sin(n\theta) \sin(l\theta) \right] dS
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\mathbf{A} = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS \tag{26}$$

で、 S_e は要素の全面積を示す。式(20)は非圧縮性の仮定に基づく液体の体積一定条件を与える。

式(6)および式(19)～(21)を時間積分して解けば、浮屋根変位 $\mathbf{D}$ 、圧力 $\mathbf{P}$ 、モード座標 α_m^n および任意時間関数 α_0 の解が得られる。

2.4 時間積分法の適用

常微分方程式の時間積分には様々な手法が提案されているが、ここでは、1 階微分方程式(19)～(21)に対してクラנק・ニコルソン法を、2 階微分方程式(6)に対してニューマーク β 法を適用する。

クラーク・ニコルソン法では、時刻 $t = (s-1)\Delta t$ から $t = s\Delta t$ の間（以下、時間ステップ s と称す）の各変数およびその導関数の増分を

$$\alpha_m^{n(s)} = \alpha_m^{n(s-1)} + \Delta\alpha_m^{n(s)}, \quad \left(\frac{d\alpha_m^n}{dt} \right)^{(s)} = \frac{2}{\Delta t} \Delta\alpha_m^{n(s)} - \left(\frac{d\alpha_m^n}{dt} \right)^{(s-1)} \quad (27)$$

$$\alpha_0^{(s)} = \alpha_0^{(s-1)} + \Delta\alpha_0^{(s)}, \quad \left(\frac{d\alpha_0}{dt} \right)^{(s)} = \frac{2}{\Delta t} \Delta\alpha_0^{(s)} - \left(\frac{d\alpha_0}{dt} \right)^{(s-1)} \quad (28)$$

$$p^{(s)} = p^{(s-1)} + \Delta p^{(s)} \quad (29)$$

によって近似する。またニューマーク β 法では、変位、速度、加速度の増分を

$$\mathbf{D}^{(s)} = \mathbf{D}^{(s-1)} + \Delta\mathbf{D}^{(s)} \quad (30)$$

$$\dot{\mathbf{D}}^{(s)} = \dot{\mathbf{D}}^{(s-1)} + \frac{\delta}{\beta} \left[\frac{1}{\Delta t} \Delta\mathbf{D}^{(s)} - \dot{\mathbf{D}}^{(s-1)} + \Delta t \left(\frac{\beta}{\delta} - \frac{1}{2} \right) \ddot{\mathbf{D}}^{(s-1)} \right] \quad (31)$$

$$\ddot{\mathbf{D}}^{(s)} = \ddot{\mathbf{D}}^{(s-1)} + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\Delta t^2} \Delta\mathbf{D}^{(s)} - \frac{1}{\Delta t} \dot{\mathbf{D}}^{(s-1)} - \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{D}}^{(s-1)} \right] \quad (32)$$

で与える。ニューマーク β 法で $\delta = 2\beta$ とおくと、クランク・ニコルソン法とニューマーク β 法は等価になる。

式(27)～(32)を式(19)～(21)および式(6)に適用すると、各変数の増分 $\Delta\mathbf{D}^{(s)}$, $\Delta\mathbf{P}^{(s)}$, $\Delta\alpha_m^{n(s)}$ および $\Delta\alpha_0^{(s)}$ を定める方程式として次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left[\frac{2}{\Delta t} \left(\mathbf{B}\mathbf{x}_m^n \Delta\mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{B}\mathbf{y}_m^n \Delta\mathbf{v}^{(s)} + \mathbf{B}\mathbf{z}_m^n \Delta\mathbf{w}^{(s)} \right) - \sum_l \sum_k \mathbf{E}_{mk}^{nl} \Delta\alpha_k^{l(s)} \right] \\ = \sum_{j=1}^{Ne} \left[\mathbf{B}\mathbf{x}_m^n \dot{\mathbf{u}}^{(s-1)} + \mathbf{B}\mathbf{y}_m^n \dot{\mathbf{v}}^{(s-1)} + \mathbf{B}\mathbf{z}_m^n \dot{\mathbf{w}}^{(s-1)} + \sum_l \sum_k \mathbf{E}_{mk}^{nl} \alpha_k^{l(s-1)} \right] \quad (33)$$

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left[\frac{2}{\Delta t} \left(\mathbf{B}\mathbf{x}_0 \Delta\mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{B}\mathbf{y}_0 \Delta\mathbf{v}^{(s)} + \mathbf{B}\mathbf{z}_0 \Delta\mathbf{w}^{(s)} \right) \right] \\ = \sum_{j=1}^{Ne} \left(\mathbf{B}\mathbf{x}_0 \dot{\mathbf{u}}^{(s-1)} + \mathbf{B}\mathbf{y}_0 \dot{\mathbf{v}}^{(s-1)} + \mathbf{B}\mathbf{z}_0 \dot{\mathbf{w}}^{(s-1)} \right) \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left[\sum_n \sum_m \left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{G}_m^n + 2h_m^n \omega_m^n \mathbf{G}_m^n + \sum_l \sum_k \mathbf{Q}_{mk}^{nl} \alpha_k^{l(s-1)} \right) \Delta\alpha_m^{n(s)} \right. \\ \left. + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{G}_0 \Delta\alpha_0^{(s)} + \ddot{\mathbf{x}}_g \mathbf{A} \Delta\mathbf{u}^{(s)} + g \mathbf{A} \Delta\mathbf{w}^{(s)} + \frac{1}{\rho} \mathbf{A} \Delta\mathbf{p}^{(s)} \right] \\ = \sum_{j=1}^{Ne} \left[\sum_n \sum_m \left\{ \mathbf{G}_m^n \left(\frac{d\alpha_m^n}{dt} \right)^{(s-1)} - 2h_m^n \omega_m^n \mathbf{G}_m^n \alpha_m^{n(s-1)} - \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \mathbf{Q}_{mk}^{nl} \alpha_m^{n(s-1)} \alpha_k^{l(s-1)} \right\} \right. \\ \left. + \mathbf{G}_0 \left(\frac{d\alpha_0}{dt} \right)^{(s-1)} - \ddot{\mathbf{x}}_g \mathbf{A} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}^{(s-1)}) - g \mathbf{A} \mathbf{w}^{(s-1)} - \frac{1}{\rho} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(s-1)} \right] \quad (35)$$

$$\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \Delta\mathbf{D}^{(s)} - \mathbf{F} \Delta\mathbf{P}^{(s)} \\ = -\mathbf{M} \left[\left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{D}}^{(s-1)} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{D}}^{(s-1)} \right] \\ - \mathbf{C} \left[\Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{D}}^{(s-1)} + \left(1 - \frac{\delta}{\beta} \right) \dot{\mathbf{D}}^{(s-1)} \right] - \mathbf{K} \mathbf{D}^{(s-1)} + \mathbf{F} \mathbf{P}^{(s-1)} - \mathbf{M} \mathbf{I}_x \ddot{\mathbf{x}}_g \quad (36)$$

浮屋根の幾何学的非線形性や材料非線形性を考慮する場合には、式(36)の $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$ は非線形となるため、反復解法を用いて解を得ることになる。ここでは、非線形方程式の解法としてよく知られたニュートン・ラプソン法を適用することにすれば、時間ステップ s における i 回目の反復時の増分解 $\Delta\mathbf{D}^{(s,i)}$ を得るための修正式は次式で与え

られる。

$$\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\beta\Delta t} \mathbf{C}_T + \mathbf{K}_T \right) \left(\Delta\mathbf{D}^{(s,i)} - \Delta\mathbf{D}^{(s,i-1)} \right) - \mathbf{F} \left(\Delta\mathbf{P}^{(s,i)} - \Delta\mathbf{P}^{(s,i-1)} \right) \\ = \mathbf{U} \mathbf{F}^{(s,i-1)} \quad (37)$$

ここに、 $\mathbf{K}_T$ は接線剛性マトリックス、 $\mathbf{C}_T$ は接線減衰マトリックス、 $\mathbf{U} \mathbf{F}^{(s,i-1)}$ は次式で与えられる時間ステップ s における $i-1$ 回目の反復後の不平衡力である。

$$\mathbf{U} \mathbf{F}^{(s,i-1)} = - \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \Delta\mathbf{D}^{(s,i-1)} + \mathbf{F} \Delta\mathbf{P}^{(s,i-1)} \\ - \mathbf{M} \left[\left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{D}}^{(s-1)} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{D}}^{(s-1)} \right] \\ - \mathbf{C} \left[\Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{D}}^{(s-1)} + \left(1 - \frac{\delta}{\beta} \right) \dot{\mathbf{D}}^{(s-1)} \right] - \mathbf{K} \mathbf{D}^{(s-1)} \\ + \mathbf{F} \mathbf{P}^{(s-1)} - \mathbf{M} \mathbf{I}_x \ddot{\mathbf{x}}_g \quad (38)$$

式(38)を式(37)に代入して整理すれば、最終的に次式を得る。

$$\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\beta\Delta t} \mathbf{C}_T + \mathbf{K}_T \right] \Delta\mathbf{D}^{(s,i)} - \mathbf{F} \Delta\mathbf{P}^{(s,i)} \\ = \left[\frac{\delta}{\beta\Delta t} (\mathbf{C}_T - \mathbf{C}) + \mathbf{K}_T - \mathbf{K} \right] \Delta\mathbf{D}^{(s,i-1)} \\ - \left[\left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \mathbf{M} + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\beta} \right) \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{D}}^{(s-1)} \\ - \left[-\frac{1}{\beta\Delta t} \mathbf{M} + \left(1 - \frac{\delta}{\beta} \right) \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{D}}^{(s-1)} - \mathbf{K} \mathbf{D}^{(s-1)} + \mathbf{F} \mathbf{P}^{(s-1)} - \mathbf{M} \mathbf{I}_x \ddot{\mathbf{x}}_g \quad (39)$$

以上のアルゴリズムでは、浮屋根変位 ($\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$) に伴って液面形状も変化することになるが、形状の変化に応じて式(22)～(35)および式(39)を逐次更新し、繰り返し計算を行うことにより収束解を得る。液面 Γ_f 上の積分には要素ごとにガウスの 3×3 点公式を用いる。各時間ステップの $|\Delta\mathbf{D}^{(s)}|$, $|\Delta\mathbf{P}^{(s)}|$, $|\Delta\alpha_m^{n(s)}|$ および $|\Delta\alpha_0^{(s)}|$ の最大値に対する反復前後のそれらの差が 10^{-3} 以下になった時点で収束計算を打ち切る。ちなみに、以下の解析例では、2～5 回の反復計算の後、収束解を得ることができた。

3. 数値解析例

3.1 解析モデル

解析対象とした浮屋根貯槽モデルは 2003 年十勝沖地震でスロッシング被害を受けたシングルデッキ型浮屋根貯槽群のうち、容量 3 万キロリットル貯槽 (モデル 3A) と容量 10 万キロリットル貯槽 (モデル 10B) の 2 基とし、それぞれの諸元を表 1 に示す。

浮屋根のモデル化には面外せん断変形と非適合モードを考慮した 9 節点アイソパラメトリック・シェル要素 (付録参照) を用い、要素内変位を剛体変位と相対変位とに分離する更新ラグランジェ定式化に基づき幾何学的非線形性を考慮する¹⁸⁾。ボンツーン部は解析モデルと伸び剛性および面外曲げ剛性が等しくなるような伸び剛性算定用等価厚および曲げ剛性算定用等価厚をもつ中実等厚シェル要素としてモデル化する。要素上の積分にはガウスの 3×3 点公式を用いる。

解析には対称性を考慮して浮屋根の半面のみを対象とすることとし、解の収束性を確認した上で、要素分割を図 2 に示すように半径方向に 6 分割 (デッキ部 5 分割, ボンツーン部 1 分割), 半円周方向

表1 モデル貯槽の諸元

	モデル3A	モデル10B
貯槽半径 (m)	21.35	39.1
液深(m)	21.75	14.414
液体密度 (kg/m ³)	845	832
デッキ厚(mm)	4.5	4.5
ポンツーン断面幅 (mm)	2.3	5
ポンツーン外縁断面高(mm)	710	870
ポンツーン内縁断面高(mm)	410	450
ポンツーン上板厚(mm)	4.5	4.5
ポンツーン下板厚(mm)	4.5	6
ポンツーン内リム厚(mm)	15	12
ポンツーン外リム厚(mm)	6	12
ポンツーン断面積(mm ²)	33,014	77,816
ポンツーン断面2次モーメント(mm ⁴)	205,172×10 ⁴	712,753×10 ⁴
ポンツーン伸び剛性算定用等価厚(mm)	14.35	15.56
ポンツーン曲げ剛性算定用等価厚(mm)	220.4	257.7
ポンツーン有効断面積(mm ²)	12,668	27,495
ポンツーン有効断面係数(mm ³)	1,776×10 ³	5,784×10 ³
デッキ単位面積質量(kg/m ²)	35.3	35.3
ポンツーン単位長さ質量(kg/m)	253	611
ヤング係数(Gpa)	206	206
ポアソン比	0.3	0.3

表2 線形固有値解析による固有周期 (s)

		モデル3A			モデル10B		
		半径方向次数			半径方向次数		
		1	2	3	1	2	3
周方向次数	0	4.76	3.52	2.90	6.82	4.78	3.93
	1	7.01	4.04	3.19	12.05	5.56	4.31
	2	4.83	3.39	2.81	7.78	4.83	3.95
	3	3.83	2.94	2.47	5.66	4.16	3.53

図2 浮屋根（液面）の有限要素分割

に8分割, 採用モード数を半径方向, 周方向ともに5次までとした。

3.2 入力地震動と時刻歴応答解析

入力地震動として使用した2003年十勝沖地震 K-NET 苫小牧 EW波 (HKD1290309260450EW) の加速度時刻歴波形と速度応答スペクトル (0.5%減衰時) を図3に示す。ニューマーク β 法の係数には, クランク・ニコルソン法との整合性を考慮して, $\delta=1/2$, $\beta=1/4$ を採用し, 時間刻みを $\Delta t=0.01\text{sec}$ とした。流体, 浮屋根ともに剛性比例型減衰を仮定し, 周方向1次, 半径方向1次の線形1次モードに対し0.5%減衰となるように各次モードの減衰定数 h_m^n および減衰マトリックス $\mathbf{C}$ を設定した。参考までに, 線形固有値解析により算出した各モデルの固有周期を表2に掲載する。なお, 以下の議論では, 周方向1次のモードを線形モード, 他を非線形モードとして区別することとする。

図3 入力地震動の加速度時刻歴と速度応答スペクトル

3.3 地震応答解析結果

3.3.1 浮屋根代表点のスロッシング変位

浮屋根代表点のスロッシング変位の時刻歴とフーリエ振幅スペクトルを図4, 図5に示す。以下, 本節の全ての図において, 赤実線は浮屋根の幾何学的非線形性を考慮した場合, 青点線は考慮しない場合の解析結果を示す。

モデル3Aの場合, 線形1次固有周期7.01sが地震動の卓越周期域 (図3参照) と重なるため, スロッシング応答が増幅され, 線形1次モードが最大振幅となる加振軸上外端部 (r, θ) = (21.35m, 0°) では, 最大変位が3.4mに達している。振幅は上昇側で大きく下降側で小さくなり, 非線形性の影響が見られる^{1,10)}。浮屋根の非線形性を考慮した場合と考慮しない場合とで応答に顕著な差は見られないことから, この傾向は液面の非線形性によるものと推察される。全体的に線形1次モードの寄与が支配的であるが, 線形2次モードが最大振幅となる加振軸上三分点 (7.62m, 0°) では, 微量ながら2次モードの影響が認められ, 浮屋根の幾何学的非線形性を考慮した場合の応答が考慮しない場合よりも若干小さく, 卓越周期も線形2次固有周期より若干短い3.4sとなっている。これは線形2次モードとの共振によってデッキ部に膜応力が発生し, 浮屋根の剛性 (幾何剛性) が増加することによって応答が低減されるためと推測される¹²⁾。

モデル10Bの場合, 線形1次固有周期12.05sが地震動の卓越周期域から離れているため, 加振軸上外端部 (39.1m, 0°) でも, 最大変位は1.2m程度にとどまっている。全体的に線形1次モードの寄与が卓越しているものの, 地震動の主要動が作用した直後の $t=60\sim180\text{s}$ では, 線形2次モードの影響が相対的に大きくなり, モデル3Aの場合と同じ理由により, 浮屋根の幾何学的非線形性を考慮した場合の応答が考慮しない場合よりも小さく, 卓越周期も線形2次固有周期より若干短い5.0sとなっている。

さらに, モデル3A, モデル10Bともに, 線形理論では応答が0となるべき浮屋根中心点 (0m, 0°) や加振直交軸上外端部 (21.35m, 90°), (39.1m, 90°) においても, 浮屋根の非線形性を考慮した場合には, 加振軸上外端部 (21.35m, 0°), (39.1m, 0°) の10~15%程度

の応答が生じている。浮屋根の非線形性を考慮しない場合には応答が著しく減じられることから、これらの非線形応答には浮屋根の幾何学的非線形性の影響が大きいと考えられる。スペクトルの卓越周期に着目すると、浮屋根中心点では周方向 0 次、加振直交軸上外端部では周方向 0 次および 2 次の固有周期に対応する 2 つのピークのほかに、モデル 3A では線形 1 次固有周期の 1/2 に当たる 3.5s 付近に

もピークが認められる。この第 3 のピークは浮屋根の非線形性を考慮しない場合にも同様に見られることから、液面の非線形性に起因する、いわゆる倍数調波振動¹¹⁾に相当するものと推察される。

3.3.2 ポンツーン変位の周方向モード展開

ポンツーン中心線上の鉛直変位を円周方向にフーリエ展開した場合の各次のモード振幅の時刻歴とフーリエ振幅スペクトルを図 6、図

図 4 浮屋根変位の時刻歴とフーリエ振幅スペクトル (モデル 3A)

図 5 浮屋根変位の時刻歴とフーリエ振幅スペクトル (モデル 10B)

7に示す。周方向1次の線形モード以外に、周方向0次、2次、さらにモデル10Bにおいては3次の非線形モードの存在が認められる。浮屋根の非線形性を考慮した場合、各次非線形モードの振幅は線形1次モードの10~15%程度であり、デッキ部に作用する膜応力により浮屋根の剛性が増加するため、スペクトルの卓越周期は線形1次モー

ドを除いて、表2に示す線形固有値解析による各次周方向展開モードの1次固有周期よりも幾分短い値となっている。モデル3Aの場合、周方向0次および2次のモードにはさらに線形1次固有周期の1/2に当たる3.5s付近にも卓越周期が見られる。これは浮屋根の非線形性を考慮しない場合にも同様に見られることから、液面の非線形性

図6 ポンツーン変位の周方向フーリエ展開モード振幅の時刻歴とフーリエ振幅スペクトル (モデル3A)

図7 ポンツーン変位の周方向フーリエ展開モード振幅の時刻歴とフーリエ振幅スペクトル (モデル10B)

に起因する、いわゆる倍数調波振動と考えられる¹¹⁾。一方、モデル 10B の周方向 3 次のモードにはこのような振動成分は含まれておらず、線形 2 次モードとの共振によって固有周期が接近している周方向 3 次のモードの応答が励起されたものと推察される¹²⁾。

3.3.3 ポンツーン応力

ポンツーンに生じる軸方向力および面外曲げモーメントを、局部座屈を考慮して圧縮側断面の有効幅を低減した有効断面積および有効断面係数¹⁾でそれぞれ除して算定したポンツーンの加振軸上外端部近傍における軸応力度および面外曲げ応力度の時刻歴とフーリエ振幅スペクトルを図 8、図 9 に示す。また軸応力度が最大値をとる瞬間の各応力の周方向の分布を図 10、図 11 に示す。

浮屋根の幾何学的非線形性を考慮することによりポンツーンの応力が著しく増加し、地震動の主要動が作用した直後の $t = 60 \sim 130$ s では鋼材の降伏応力度を超える高応力が発生していることが分かる。スペクトルから推定される応答の卓越周期は、モデル 3A では、軸応力度で 3.5s および 1.7s、曲げ応力度で 4.6s および 3.5s となっており、前者は図 6 に示す線形 1 次固有周期および線形 2 次卓越周期の 1/2 に、後者は周方向 2 次の非線形モードの卓越周期および線形 1 次固有周期の 1/2 にそれぞれ一致している。後者の線形 1 次固有周期の

1/2 の卓越周期は浮屋根の幾何学的非線形性を考慮しない場合にも見られることから、液面の非線形性に起因する倍調波振動と考えられる。一方、モデル 10B では、軸応力度で 2.4s、曲げ応力度で 5.0s となっており、前者は図 7 に示す線形 2 次固有周期の 1/2 に、後者は周方向 3 次の非線形モードの卓越周期に一致している。

以上により、軸応力度が面外回転角の 2 乗に、曲げ応力度が面外変位にそれぞれ比例することに注意すれば、モデル 3A の軸応力度には線形 1 次モードおよび線形 2 次モードの 2 乗項が、曲げ応力度には周方向 2 次の非線形モードと線形 1 次モードの倍調波成分が主として寄与し、モデル 10B の軸応力度には線形 2 次モードの 2 乗項が、曲げ応力度には周方向 3 次の非線形モードが大きく寄与していることが分かる。図 10、図 11 に示す各応力度の周方向分布図はこの特性を反映したものとなっている。

3.3.4 総務省告示²⁾との比較

総務省告示²⁾では、線形 1 次モード変形時に液面の有限振幅変位によって生じる周方向 2 次の面外曲げモーメントと、線形 2 次モード変形時に浮屋根の幾何学的非線形性によって生じる周方向 0 次の軸方向力および周方向 2 次の面内曲げモーメントの重ね合わせによって、ポンツーン応力を算定することとしている。

図 8 ポンツーン応力の時刻歴とフーリエ振幅スペクトル (モデル 3A)

図 9 ポンツーン応力の時刻歴とフーリエ振幅スペクトル (モデル 10B)

図 10 ポンツーン応力の周方向分布 (モデル 3A)

告示式によると、線形 1 次モード変形が支配的なモデル 3A の場合、ポンツーンには軸応力が生じないことになるが、図 8、図 10 を見ると、モデル 10B と比較しうほどの大きな軸応力が発生している。浮屋根を線形と仮定した場合には軸応力は生じていないことから、この軸応力の発生は浮屋根デッキ部の大変形に伴う膜応力効果によるものと推察される。一方、線形 2 次モード変形が支配的なモデル 10B の場合、ポンツーンには面外曲げ応力は生じないことになるが、図 9、図 11 を見ると、鋼材の降伏応力度を超える過大な曲げ応力が発生している。浮屋根を線形と仮定した場合には顕著な曲げ応力は生じていないことから、この曲げ応力の発生は浮屋根の幾何学的非線形性の影響、特に周方向 3 次の非線形モードの存在によるものと推察される。

4. 結 語

液体と浮屋根の非線形性を考慮した円筒液体貯槽のスロッシング解析法として、液体に対しては液面条件（運動学的条件および動力学的条件）を除く全境界条件を満たすポテンシャル理論の解析解を、浮屋根に対しては有限要素法を適用する結合解法を提案し、2003 年十勝沖地震で被災したシングルデッキ型浮屋根貯槽に適用した。その結果得られた結論は、以下のように要約される。

- 浮屋根の応答には、周方向 1 次の線形モードのほかに、液面や浮屋根の非線形性に起因する周方向 0 次、2 次、さらに 10 万キロリットル級貯槽の場合には 3 次の非線形モードが存在する。
- 非線形モードの存在により、ポンツーンには鋼材の座屈限界を超える高応力が発生する可能性がある。
- ポンツーン応力には液面の非線形性よりも浮屋根の非線形性、特にデッキ部の大変形に伴う膜応力の影響が大きい。

図 11 ポンツーン応力の周方向分布 (モデル 10B)

- 浮屋根の幾何学的非線形性を考慮することにより、ポンツーンには総務省告示²⁾では考慮されていない線形 1 次モード変形による軸応力や線形 2 次モード変形による周方向 3 次の面外曲げ応力が発生しうる。

線形 1 次モード変形による軸応力の発生については、これまでに同様の報告をした研究が見られないことから、今後実験や他の数値解析法と比較することにより、その妥当性を検証しておく必要がある。一方、周方向 3 次の非線形モードの存在は山本ら¹²⁾の数値解析や著者ら¹⁵⁾の模型振動実験でも確認されている。上記の解析結果を踏まえ、告示式の妥当性については今後再検討されることが望まれる。

謝 辞

本研究は平成 19～23 年度文部科学省私立大学学術研究高度化推進事業ハイレクリサーチセンター整備事業により名城大学高度制震実験・解析研究センターのプロジェクト研究の一部として行われたものである。本研究にはまた平成 20～23 年度日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (B) の援助が得られている。なお、地震波には(独)防災科学技術研究所の強震観測網 K-NET 公開波を使用した。

注

注1) ここでは問題を単純化するため、 x 軸に関して対称なモードのみを採用しているが、逆対称のモードを含めることにより、より一般的な定式化を与えることが可能である。

注2) 前稿¹⁷⁾の定式化では、液面変位と浮屋根変位とを独立に扱ったため、液面節点と浮屋根節点の間にずれが生じ、このずれを補正するために節点の再配置を必要とした。ここでは液面形状を浮屋根節点変位によって補間しているため、このような節点のずれは生じない。2 次元問題における本定式化の妥当性については、前稿と同じ問題に適用した場合に同じ結果が得られることにより確認している。

参考文献

- 1) 危険物保安技術協会：屋外タンク貯蔵所浮屋根審査基準検討会報告書，2004.9
- 2) 総務省告示第 30 号：危険物の規制に関する技術上の基準の細目を定める告示の一部を改正する件，2005.1
- 3) 木村憲明，大橋弘隆：軸対称容器におけるスロッシングの非線形応答（第 1 報．支配方程式の導出と解の性質），日本機械学会論文集（C 編），Vol. 44, No. 385, pp. 3024-3033, 1978.9
- 4) 大森博司，松井徹哉，日比野浩：液体貯槽における有限振幅液面動揺に関する研究（その 1．基礎方程式の誘導とその液体貯槽への応用），日本建築学会構造系論文報告集，第 375 号，pp. 65-72, 1987.5
- 5) F. Sakai, M. Nishimura and H. Ogawa: Sloshing Behavior of Floating-Roof Oil Storage Tanks. Computers and Structures, Vol.19, No.1-2, pp.183-192, 1984
- 6) 松井徹哉：浮屋根式円筒液体貯槽の地震時スロッシング応答の解析解，日本建築学会構造系論文集，第 594 号，pp.167-173, 2005.8
- 7) T. Matsui: Sloshing in a Cylindrical Liquid Storage Tank with a Floating Roof under Seismic Excitation. Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of ASME, Vol. 129, Issue 4, pp.557-566, November 2007
- 8) 松井徹哉：シングルデッキ型浮屋根を有する円筒液体貯槽の地震時スロッシング応答—デッキ・ボンツーン連成系の空中モード展開に基づく解表現—，日本建築学会構造系論文集，第 612 号，pp.87-94, 2007.2
- 9) T. Matsui: Sloshing in a Cylindrical Liquid Storage Tank with a Single-deck Type Floating Roof under Seismic Excitation. Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of ASME, Vol. 131, Issue 2, pp. 0213030/1-10, April 2009
- 10) 菊地務，米川太，人見光夫，三浦正博：浮き屋根式タンクのスロッシングシミュレーション，出光技報，Vol. 47, No. 3, pp. 62-70, 2004
- 11) M. Utsumi and K. Ishida: Vibration Analysis of a Floating Roof Taking into Account the Nonlinearity of Sloshing. Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 75, pp. 041008/1-10, July 2008
- 12) 山本憲司，皆川洋一：シングルデッキ型浮屋根を有する円筒液体貯槽の非線形スロッシング解析，日本建築学会構造系論文集，第 643 号，pp.1603-1612, 2009.9
- 13) 井田剛史，平野廣和，有田新平，佐藤尚次，奥村哲夫：スロッシング発生時の貯槽浮屋根挙動の一考察— ϕ 4000 タンクモデルでの振動実験—，土木学会論文集，Vol. 63, No. 3, pp. 444-453, 2007.7
- 14) H. Nishi, M. Yamada, S. Zama, K. Hatayama, and K. Sekine: Experimental Study on the Sloshing Behavior of the Floating Roof Using a Real Tank. Journal of High Pressure Institute of Japan, Vol.46, No.1, pp.4-17, 2008.2
- 15) 永谷隆志，松井徹哉：シングルデッキ型浮屋根を有する円筒液体貯槽模型の地震時スロッシング実験，第 13 回日本地震工学シンポジウム論文集，pp. 2640-2647, 2010.11
- 16) 永谷隆志，松井徹哉：浮屋根式円筒液体貯槽模型の地震時スロッシング実験—線形ポテンシャル理論解の実験による検証—，日本建築学会構造系論文集，第 659 号，pp.53-62, 2011.1
- 17) 永谷隆志，松井徹哉：解析解と有限要素法の結合解法による浮屋根を有する 2 次元矩形貯槽の非線形スロッシング解析，日本建築学会構造系論文集，第 644 号，pp.1723-1730, 2009.10
- 18) 鷲津久一郎，宮本博，山田嘉照，山本善之，川井忠彦：有限要素法ハンドブック I（基礎編），培風館，1981
- 19) C.-K. Choi: Reduced Integrated Nonconforming Plate Element. Journal of Engineering Mechanics, Proceedings of ASCE, Vol. 112, No. 4, pp. 370-385, April 1986
- 20) Sanders, J. L., Jr.: Nonlinear Theories for Thin Shells, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 21, pp. 21-36, 1963

付録：アイソパラメトリック・シェル要素の基礎的関係式

浮屋根のモデル化に用いた幾何学的非線形性を考慮した 9 節点アイソパラメトリック・シェル要素の基礎的関係式を以下に示しておく。なお，本付録の中では，本篇と同じ記号が全く異なる定義で使われている場合があることを断っておく。

スロッシングにより浮屋根が全体座標 (x, y, z) 方向に (U_0, V_0, W_0) だけ剛体移動した後， y 軸周りに Θ_x ，続いて x 軸周りに Θ_y だけ，この順序で剛体回転した位置を基準状態とし，要素内任意点の変位を剛体変位とこの基準状態か

図 12 9 節点アイソパラメトリック・シェル要素

らの相対変位の和によって表現する。要素の節点配置と座標系の定義を図 12 に示す。ここに， $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ は基準状態における中央面に対して $\bar{x}, \bar{y}$ 軸が接線方向に， $\bar{z}$ 軸が法線方向に一致するように採られた要素座標系を， (ξ, η) は -1 から 1 の範囲で連続的に変化する無次元化座標を示す。

中央面の $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 方向相対変位を $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ ，中央面に対する法線の $\bar{y}, \bar{x}$ 軸周りの相対回転角を $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ とし，要素内の相対変位を，形状関数を用いて次式のように節点値で補間する。

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^4 \hat{N}_j(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{v}_j \\ \hat{w}_j \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_i \\ \bar{\beta}_i \end{Bmatrix} \quad (40)$$

ここに

$$N_i = \frac{1}{4} \left[(3\xi^2 - 2)\xi^2 + \xi\xi + 2(1 - \xi^2) \right] \left[(3\eta^2 - 2)\eta^2 + \eta\eta + 2(1 - \eta^2) \right] \quad (41)$$

は節点 i では 1，他の節点では 0 の値をとる形状関数， (ξ_i, η_i) ， $(\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i)$ および $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$ は (ξ, η) ， $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ および $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ の節点値， $\hat{N}_j$ および $(\hat{u}_j, \hat{v}_j, \hat{w}_j)$ は非適合モードに対応する形状関数および自由度である。本論では非適合モードとして次の 4 モードを採用している¹⁹⁾。

$$\hat{N}_1 = \xi(1 - \xi^2), \quad \hat{N}_2 = \eta(1 - \eta^2), \quad \hat{N}_3 = \xi\eta(1 - \xi^2), \quad \hat{N}_4 = \xi\eta(1 - \eta^2) \quad (42)$$

面外せん断変形を考慮したシェル理論²⁰⁾によれば，要素内のひずみは相対変位成分を用いて，次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}} \\ \varepsilon_{\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{z}} \\ \gamma_{\bar{y}\bar{z}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 - \bar{z} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{2} \bar{\beta}^2 - \bar{z} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{\alpha} \bar{\beta} - \bar{z} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \bar{x}} \right) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \bar{\alpha} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} - \bar{\beta} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

要素座標系に関する相対変位成分 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ と全体座標系に関する変位成分 (u, v, w, α, β) との間には次のような関係が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{Bmatrix} + ([\mathbf{R}] - [\mathbf{I}]) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} + [\mathbf{R}] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{\bar{y}} & -(\cos \theta_{\bar{x}} \cos \Theta_x + \cos \theta_{\bar{z}} \sin \Theta_x) \\ -\cos \theta_{\bar{y}} & \cos \theta_{\bar{x}} \cos \Theta_x + \cos \theta_{\bar{z}} \sin \Theta_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_x \\ \Theta_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

ここに

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \Theta_x & -\sin \Theta_x \sin \Theta_y & -\sin \Theta_x \cos \Theta_y \\ 0 & \cos \Theta_y & -\sin \Theta_y \\ \sin \Theta_x & \cos \Theta_x \sin \Theta_y & \cos \Theta_x \cos \Theta_y \end{bmatrix} \quad (46)$$

は要素座標系から全体座標系への座標変換マトリックス， $[\mathbf{I}]$ は 3×3 単位マトリックス， $\theta_{\bar{y}}$ などは $\bar{y}$ 軸と y 軸などのなす角度を表す。

以上の関係式を基に仮想仕事の原理を適用し，全体座標系に関する要素特性を導いている¹⁸⁾。非適合モードに対応する自由度は静的縮約によって消去されるので，独立な自由度 $u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i$ ($i=1, \dots, 9$) の数は $5 \times 9 = 45$ となる。