連結制振構法を用いた建物の固有振動および減衰に関する基本特性

FUNDAMENTAL PROPERTIES ON EIGENVIBRATION AND DAMPING IN CONNECTED BUILDING STRUCTURES

満田 衛資^{*1}, 大淵 充紀^{*2}, 辻 聖晃^{*3}, 竹脇 出^{*4}

*Eisuke MITSUDA, Mitsunori OHBUCHI, Masaaki TSUJI
and Izuru TAKEWAKI*

Some fundamental properties are disclosed on eigenvibration and damping in connected building structures. A classification in terms of damping variation properties with respect to increased capacity of connected dampers is conducted by using complex eigenvibration analysis. There exist several regions in the plane of mass ratio and stiffness ratio. In each region, the lowest-mode damping variation exhibits a different property with respect to increased capacity of connected dampers. These properties are useful in the design of the system of connected buildings.

Keywords: *Connected building structure, eigenvibration, damping property, complex eigenvalue analysis, viscous damper, domain classification*

連結制振, 固有振動, 減衰特性, 複素固有値解析, 粘性ダンパー, 領域分類

1. 序

建物の耐震性能の向上を図る連結制振構法については, 基本的制振特性の解明や最適ダンパー量の決定方法に関する多数の研究結果が蓄積されており¹⁻²²⁾, 実建物に対する適用例も存在する^{23, 24)}.

従来の連結制振に関する研究の多くは, 2 棟の建物を連結機構により連結する場合, 連結する建物間の最適な固有周期比や, 連結機構の最適特性を明らかにすることを主目的としている. これに対して, 本論文の目的は, 連結する 2 棟の建物の質量比および剛性比の関係によって異なる固有振動特性および減衰特性を分類し, 固有値, 固有モードおよび減衰特性などに言及しながらその性質を明らかにすることである.

これまでに提案されている連結制振に関する理論的研究の代表的なものとして, 定点理論²⁵⁾を用いたものが存在する^{3-5, 10)}. 定点理論により厳密に扱うことのできるモデルは基本的に構造減衰を有しないモデルに限定される.

蔭山らは, 2 棟の構造物をダンパーのみ, もしくはばねとダンパーを併用して連結し, 両棟の耐震性能の向上を目的として, 上述の定点理論を用いた研究を展開している³⁻⁵⁾. ダンパーのみで 2 棟の構造物を連結するときの構造モデルとしては, 連結制振の理想系である双方の系の定点の伝達率の高さが等しくなるモデル(質量比と剛性比が反比例の関係となるモデル)を主に扱っており, その質量比と剛性比による制約を緩和するために, 連結ばねとダンパーを併用したモデルを

扱っている. 一方, 本論文で想定するモデルでは, ダンパーのみで連結する上で質量比および剛性比に制約を設けていないため, そのダンパー減衰係数をパラメータとして, より広範囲の質量比および剛性比を有するモデルについて検討している.

楊らは, 2 つの 1 質点系を接合ばねと接合ダンパーで連結した連結構造物の主構造物の伝達関数のピークを最小にする最適接合ばね剛性と最適ダンパー減衰係数の決定方法について, 定点理論に基づく理論を展開し, 質量比, 周波数比で定義される領域を 3 つに区分して, 各領域での最適値決定法を提案している¹⁰⁾.

しかしながら, これまでに, 連結制振系の固有振動数や減衰定数に関する特性について理論的な観点から詳細に論じた研究は著者らの知る限り存在しない. その理由として, 一般に複素固有値解析を必要とするため, 理論的検討が困難であったことや, 連結ダンパー容量の増加に対する特性変動の把握という視点が導入されなかったことが挙げられる. 本論文では, 連結ダンパー容量増加に対する固有振動数や減衰定数の特性について詳細に論じることを主目的としている.

本論文では, 質量比と剛性比を軸とする図において連結ダンパー容量の増加に伴う減衰定数や固有振動数の変動の特徴に応じて領域分けを行うが, その領域分けの図においては, 実際の建築物では想定しがたい質量比および剛性比の範囲についても一部触れているものの, 多くの連結制振構法の建物モデルについてその固有振動特性を予測することが可能となる. また, ある質量比および剛性比の建物モデル

*1 満田衛資構造計画研究所
京都大学大学院 博士課程・工修

*2 鹿島建設㈱ 工修
(元 京都大学大学院 大学院生)

*3 京都大学工学研究科建築学専攻 准教授・博士(工学)

*4 京都大学工学研究科建築学専攻 教授・工博

Mitsuda Structural Consultants
Graduate Student, Kyoto Univ., M. Eng.
Kajima Corp., M. Eng.

Assoc. Prof., Dept. of Architecture and Arch. Eng., Kyoto Univ., Dr. Eng.
Prof., Dept. of Architecture and Arch. Eng., Kyoto Univ., Dr. Eng.

に対して得られる減衰定数の最大値およびそのときの連結ダンパー減衰係数の最適値を導くことで、アウトフレーム連結制振構法において剛性比がある程度以上の値になると減衰定数の増加が望めなくなる²¹⁾などの既往の研究の裏づけにもなり得る。

図1 連結制振系の単純モデル

図2 解析モデル概要（丸数字は、基本モデルにおける副系の質量と主系の剛性を基準としたときの主系と副系の質量および剛性の比率）

表1 解析モデル諸元

モデル	副系	主系			
		モデル I $\mu\kappa=0.5$	基本モデル $\mu\kappa=1.0$	モデル II $\mu\kappa=2.0$	モデル III $\mu\kappa=8.0$
質量[t]	1000	2000	2000	4000	2000
剛性[kN/mm]	784	196	392	392	3136

2. 連結制振系建物モデルの定義

図1に、本論文で扱う連結制振系の単純モデルを示す。独立した2棟の建物をともに1質点とした2自由度の平面せん断質点系モデルとして扱い、一方を主系、他方を副系と呼ぶ。主系の質量および剛性を M 、 K 、副系の質量および剛性を m 、 k とし、棟間を連結する粘性ダンパーの減衰係数を c とする。ただし $M \geq m$ とする。なお、ここでは建物の構造減衰は考慮しない。副系に対する主系の質量比 M/m を μ (≥ 1)、剛性比 K/k を κ とし、質量比と剛性比の積 MK/mk を $\mu\kappa$ で表す。

本論文では、複素固有値解析による固有円振動数、減衰定数、固有値、固有モードを単に固有円振動数、減衰定数、固有値および固有モードと呼ぶ。連結制振系の振動特性を把握するには連結ダンパー容量の増加に伴う減衰定数の特性を明らかにする必要がある。連結制振系の単純モデルにおいて、連結ダンパーの減衰係数に対する全体系の減衰定数の変動の様相は、2棟の建物の質量比および剛性比によって異なる。

3. 連結ダンパーの減衰係数の増加に伴う減衰定数および固有振動特性の変動

3.1 固有値と固有円振動数・減衰定数の関係と重複点の定義

本節では、4節以降で述べる質量比と剛性比を軸とする平面における領域分割の準備として、いくつかの代表的な建物モデルに対して連結ダンパー容量を増加させたときの数値解析を行い、減衰定数 h 、固有円振動数 ω およびそれに対応する固有値の変動、固有モードについて考察する。解析モデルの諸元を表1に、解析モデルの概要を図2に示す。前述のように建物の構造減衰は考慮しない。なお、 h および ω の値は、複素固有値解析により導出された4つの固有値 λ_k ($k=1,2,3,4$)を用い、次のように算出する。

$$\lambda_i, \lambda_j = -h^{(r)}\omega^{(r)} \pm \omega^{(r)} \sqrt{\{h^{(r)}\}^2 - 1} \quad (1)$$

$$\lambda_i \lambda_j = \{\omega^{(r)}\}^2, \quad \lambda_i + \lambda_j = -2h^{(r)}\omega^{(r)} \quad (2a,b)$$

$$\therefore \omega^{(r)} = \sqrt{\lambda_i \lambda_j}, \quad h^{(r)} = -(\lambda_i + \lambda_j) / (2\sqrt{\lambda_i \lambda_j}) \quad (3a,b)$$

ここで r は次数、 λ_i 、 λ_j は対（減衰振動域では共役を意味し、 $i=1, j=2$ が $r=1$ に、 $i=3, j=4$ が $r=2$ に対応）となる固有値である。(3a,b)式により、過減衰域の h および ω も減衰振動域と同様に定義する²⁶⁾。

連結ダンパーの減衰係数 c をパラメータとして変動させたときの固有値、減衰定数、固有円振動数の変動を、モデルI、基本モデル($\mu\kappa=1$)、モデルII、IIIの場合について図3に示す。固有値のグラフにおいて、ある c の値のときに、異なる4つの複素固有値の実部が等しくなる点（ $\text{Re}[\lambda_k] = \text{const.}$ ）あるいは虚部の絶対値が等しくなる点（ $|\text{Im}[\lambda_k]| = \text{const.}$ ）、またはその両方が成立する点が存在する場合がある。この点を「重複点」と呼ぶこととする。モデルIでは実部のみが、モデルIIでは虚部のみが、基本モデル($\mu\kappa=1$)では両方に重複点が存在している。また、非単調に変動する側の減衰定数が極値をとる点、および単調に増加する側の減衰定数が臨界減衰となる点の2点を境界として、グラフを3つの区間に分け、ダンパー減衰係数の小さい方からそれぞれ区間A、区間B、区間Cとする。区間A、Bは減衰振動域、区間Cは過減衰域である。

なお、重複点に相当する点が過減衰域にある場合には、重複点の定義を「4つの実固有値が、2組の重複固有値となる」とする（Appendix 1 参照）。またこのとき、単調に増加する側の減衰定数が臨界減衰となる点および非単調に変動する側の減衰定数が極値をとる点の2点を境界として、グラフを3つの区間に分けることができる。

図4は、各区間のある点における固有モードを示している。連結系の固有ベクトルは一般に複素ベクトルとなるため、図4では固有ベクトルの主系（右側）と副系（左側）の成分のそれぞれを、最大の成分の値が1となるように正規化し、複素平面上に表示している。

以下では、基本モデル($\mu\kappa=1$ ：詳細については後述)の場合とそれ以外($\mu\kappa \neq 1$)の場合に分けて考察する。

3.2 $\mu\kappa=1$ の場合

$\mu\kappa=1$ の場合、図3(b)より、区間A、Bの境界と重複点とが一致すると予想される。各区間における減衰定数、固有円振動数および固有値は以下の性質を示す。

区間A： $h^{(1)}=h^{(2)}(<1)$ 、 $\omega^{(1)} \neq \omega^{(2)}$ ：1次、2次ともに複素固有値

区間B： $h^{(1)} \neq h^{(2)}(<1)$ 、 $\omega^{(1)}=\omega^{(2)}$ ：1次、2次ともに複素固有値

区間C： $h^{(1)}(>1) \neq h^{(2)}(<1)$ 、 $\omega^{(1)}=\omega^{(2)}$ ：1次が実固有値、2次が複素固有値

固有値は、区間A、Bでは異なる2組の複素固有値となるが、重複点（区間A、Bの境界）においてそれらは等しい値の組となり、臨界減衰点（区間B、Cの境界）において1組の固有値の実部が2つの異なる値となり、それに対応する固有値の虚部が0となる。

図3 各モデルにおける固有値・減衰定数・固有円振動数の変動 (左上: $\text{Re}[\lambda]$ [rad/s], 右上: $\text{Im}[\lambda]$ [rad/s], 左下: h , 右下: ω [rad/s])

減衰定数は、区間 A では 1 次と 2 次が等しく、 $h < 1$ の領域内の重複点を境に 2 つの異なる値となり (区間 B)、その後一方は 0 に収束し、もう一方は増大しやがて過減衰となる (区間 C)。

固有円振動数は、区間 A では異なる 2 つの値がダンパー減衰係数の増加に伴って近接していき、重複点を越え区間 B、C では両者は等しい値となる。また、この区間 B、C での固有円振動数は、2 棟を剛結したモデルの固有円振動数に等しい。

重複点における分岐の変化勾配は ∞ であるものと見られ、ダンパー減衰係数のわずかな変動に対して、固有値、減衰定数、固有円振動数の値は大きく変動する。

図 4(b) より、固有モードは以下の性質を示す。区間 A において、従属して動く側の建物がそれぞれ 1 次と 2 次とで共役な複素固有モードをとり、その絶対値は 1 より小さい。区間 B において、従属して動く側の建物が 1 次と 2 次とで異なる複素固有モードをとるが、それらの絶対値はともに 1 となる。区間 C において、過減衰である 1 次

は異なる 2 つの実固有モードであり、それらの位相は π ずれている。減衰定数が 0 に収束する 2 次は従属して動く側の建物が絶対値 1 の複素固有モードをとり、その位相はダンパー減衰係数の増加に伴って卓越して動く側の建物のモードの位相に近接していく。このようなモードをとることから、ダンパー減衰係数の増加に伴う減衰定数の変化が重複点で分岐した後、1 次が増大、2 次が減少するものと考えられる。

3.3 $\mu\kappa \neq 1$ の場合

$\mu\kappa \neq 1$ の場合、図 3(a), (c) より、区間 A、B の境界と重複点とは一致しない。重複点において、モデル I ($\mu\kappa = 0.5$) の場合では異なる 4 つの複素固有値の実部が等しく、モデル II ($\mu\kappa = 2.0$) の場合では異なる 4 つの複素固有値の虚部の絶対値が等しい。また図 3(d) より、モデル III ($\mu\kappa = 8.0$) の場合では重複点は存在しない。

重複点の誘導については 4 節で触れる。また、連結ダンパー容量を増加させたときの減衰定数と固有円振動数の性質については 5, 6 節で詳述する。

図 4 各区間のある点における固有モード (右：主系, 左：副系, 数字は絶対値)

4. 重複点の条件式

4.1 共通事項

3節で導入した2棟連結建物モデルについて、図3のグラフにおける重複点, またはそれに対応する点を特徴付ける条件式について考える。それぞれの建物モデルの質量比および剛性比と, 連結ダンパーの減衰係数, 連結モデルの減衰定数および固有円振動数間の関係を示す。

図1のモデルにおける自由振動の支配式は, 固有値 λ を用いて (4) 式のように表される。

$$\lambda^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

$$\therefore \det \begin{bmatrix} m\lambda^2 + c\lambda + k & -c\lambda \\ -c\lambda & M\lambda^2 + c\lambda + K \end{bmatrix} = 0$$

この行列式を計算すると, 次の4次方程式となる。

$$Mm\lambda^4 + (M+m)c\lambda^3 + (Mk+mK)\lambda^2 + (K+k)c\lambda + Kk = 0 \quad (5)$$

(5)式 (実数係数) の4つの解をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ とおくと, 4次方程式の解と係数の関係より以下の式が成り立つ。

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -\frac{(M+m)c}{Mm} \quad (6a)$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_1 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 = \frac{Mk+mK}{Mm} \quad (6b)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2 = -\frac{(K+k)c}{Mm} \quad (6c)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \frac{Kk}{Mm} \quad (6d)$$

ここで, 異なる4つの複素固有値を以下のようにおく。

$$\lambda_{1,2} = \text{Re}[\alpha] \pm i \text{Im}[\alpha] \quad (i: \text{虚数単位}) \quad (7a)$$

$$\lambda_{3,4} = \text{Re}[\beta] \pm i \text{Im}[\beta] \quad (7b)$$

(7a, b)式を用いて, (6a-d)式は以下のように書き換えられる。

$$2(\text{Re}[\alpha] + \text{Re}[\beta]) = -\frac{(M+m)c}{Mm} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \{\text{Re}[\alpha]\}^2 + \{\text{Im}[\alpha]\}^2 + \{\text{Re}[\beta]\}^2 + \{\text{Im}[\beta]\}^2 + 4\text{Re}[\alpha]\text{Re}[\beta] \\ = \frac{Mk+mK}{Mm} \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} 2\{\text{Re}[\alpha]\}(\{\text{Re}[\beta]\}^2 + \{\text{Im}[\beta]\}^2) + \text{Re}[\beta](\{\text{Re}[\alpha]\}^2 + \{\text{Im}[\alpha]\}^2) \\ = -\frac{(K+k)c}{Mm} \end{aligned} \quad (8c)$$

$$(\{\text{Re}[\alpha]\}^2 + \{\text{Im}[\alpha]\}^2)(\{\text{Re}[\beta]\}^2 + \{\text{Im}[\beta]\}^2) = \frac{Kk}{Mm} \quad (8d)$$

4.2 $\mu\kappa < 1$ の場合

図3(a)のグラフにおける重複点での条件を考える (モデル I)。重複点において, 4つの複素固有値は実部がいずれも等しいことから, $\text{Re}[\alpha] = \text{Re}[\beta]$ である。ここで, $\text{Re}[\alpha] = \text{Re}[\beta] = \text{Re}[\lambda]$ とおき直すと, (8a-d)式は以下のように書き換えられる。

$$4\text{Re}[\lambda] = -\frac{(M+m)c}{Mm} \quad (9a)$$

$$6\{\text{Re}[\lambda]\}^2 + \{\text{Im}[\alpha]\}^2 + \{\text{Im}[\beta]\}^2 = \frac{Mk+mK}{Mm} \quad (9b)$$

$$2\text{Re}[\lambda](2\{\text{Re}[\lambda]\}^2 + \{\text{Im}[\alpha]\}^2 + \{\text{Im}[\beta]\}^2) = -\frac{(K+k)c}{Mm} \quad (9c)$$

$$(\{\text{Re}[\lambda]\}^2 + \{\text{Im}[\alpha]\}^2)(\{\text{Re}[\lambda]\}^2 + \{\text{Im}[\beta]\}^2) = \frac{Kk}{Mm} \quad (9d)$$

(9a-d)式を c について解くと, 重複点におけるダンパー減衰係数 c は以下の式で表すことができる。

$$\begin{aligned} c = 2\frac{M-m}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{M^2-m^2}(Mk-mK)} &= 2\frac{M-m}{M+m}\sqrt{\frac{M^2 \cdot mk - m^2 \cdot MK}{M^2-m^2}} \\ &= 2\frac{M-m}{M+m}\sqrt{\frac{m^3 k \mu^2}{M^2-m^2}\{1-(\kappa/\mu)\}} \end{aligned} \quad (10)$$

このとき、重複点における減衰定数 h および固有円振動数 ω はそれぞれ以下の式で表すことができる。

$$h^{(1)}, h^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(M-m)(Mk-mK)}{Mm(K+k) \pm \sqrt{Mm(mk-MK)(Mk-mK)}}} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(M-m)Mk\{1-(\kappa/\mu)\}}{Mm(K+k) \pm Mmk\sqrt{(1-\mu\kappa)\{1-(\kappa/\mu)\}}}} \quad (11)$$

$$\omega^{(1)}, \omega^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{M+m} \left(K+k \pm \sqrt{\frac{(mk-MK)(Mk-mK)}{Mm}} \right)} \quad (12)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{M+m} \left(K+k \pm k\sqrt{(1-\mu\kappa)\{1-(\kappa/\mu)\}} \right)} \quad (12)$$

複号において、1 次が-、2 次が+に対応する。(11),(12)式から、 $\mu\kappa=1$ と $\mu=\kappa$ が領域を分ける関係式であることが理解され、(11),(12)式の根号内の表現から、 $\mu\kappa<1$ の場合には、 $\mu>\kappa$ となる必要がある(後述の図 5 の領域 I に対応)。また、(11)式から、1 次の減衰定数は 2 次よりも大きいことがわかる。

4.3 基本モデル ($\mu\kappa=1$) の場合

図 3(b)のグラフにおける重複点での条件を考える。重複点において、4 つの複素固有値は実部および虚部の絶対値がいずれも等しいことから、 $\text{Re}[\alpha]=\text{Re}[\beta]$ かつ $\text{Im}[\alpha]=\text{Im}[\beta]$ である。ここで、それぞれを $\text{Re}[\alpha]=\text{Re}[\beta]=\text{Re}[\lambda]$ 、 $\text{Im}[\alpha]=\text{Im}[\beta]=\text{Im}[\lambda]$ とおき直すと、(8a-d)式は以下のように書き換えられる。

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4\text{Re}[\lambda] = -\frac{(M+m)c}{Mm} \quad (13a)$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_1 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 = 6\{\text{Re}[\lambda]\}^2 + 2\{\text{Im}[\lambda]\}^2 = \frac{Mk+mK}{Mm} \quad (13b)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2 = 4\text{Re}[\lambda]\{\{\text{Re}[\lambda]\}^2 + \{\text{Im}[\lambda]\}^2\} = -\frac{(K+k)c}{Mm} \quad (13c)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \left(\{\text{Re}[\lambda]\}^2 + \{\text{Im}[\lambda]\}^2\right)^2 = \frac{Kk}{Mm} \quad (13d)$$

さらに、 $\mu\kappa=1$ であるので、

$$\mu\kappa = \frac{MK}{mk} = 1 \Leftrightarrow MK = mk \quad (14)$$

(13a-d)式を c について解き(14)式の条件を用いて整理すると、重複点におけるダンパー減衰係数 c は以下の式で表すことができる。

$$c = 2\frac{M-m}{M+m}\sqrt{MK} = 2\frac{M-m}{M+m}\sqrt{mk} \quad (15)$$

このとき、重複点における減衰定数 h および固有円振動数 ω は、それぞれ以下の式で表すことができる。

$$h = -\frac{\text{Re}[\lambda]}{\sqrt{\{\text{Re}[\lambda]\}^2 + \{\text{Im}[\lambda]\}^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(M^2-m^2)(k-K)}{Mm(K+k)}} = \frac{1-\kappa}{2\sqrt{\kappa}} \quad (16)$$

$$\omega = \sqrt{\{\text{Re}[\lambda]\}^2 + \{\text{Im}[\lambda]\}^2} = \sqrt{\frac{K+k}{M+m}} \quad (17)$$

(16),(17)式の最終項は、固有値が実数であるか複素数であるかにかかわらず成り立つ式であるが、第 2 項から第 3 項への変形は重複点における固有値が複素数、すなわち重複点における減衰定数が 1 以下の場合にのみ成り立つ。

重複点における減衰定数が 1 となる条件を(16)式より整理すると、以下の式となる。

$$h=1 \Leftrightarrow \kappa = -\mu^2 + 5\mu + 5$$

$$\therefore \mu = 3 + 2\sqrt{2} \quad (\because \mu\kappa=1) \quad (18)$$

境界 $\mu\kappa=1$ 上では、 μ の値の増加に伴って重複点における減衰定数は増加する傾向にあり(図 8, 9 参照)、(18)式より $\mu > 3 + 2\sqrt{2}$ において $h > 1$ となる。この範囲での重複点における実固有値は完全に重複するのではなく、2 組の重複した実固有値に分けられることになる(Appendix 1 参照)。

また $\mu\kappa \neq 1$ の場合、重複点における非単調に変動する減衰定数が過減衰となる範囲は、本研究で扱う $\mu (\geq 1)$ および $\kappa (> 0)$ の値の領域に存在しないため、(18)式を境界として固有値の性質が分かれることはない。

4.4 $\mu\kappa > 1$ の場合

図 3(c)のグラフにおける重複点での条件を考える。重複点において、4 つの複素固有値は虚部の絶対値がいずれも等しいことから、 $\text{Im}[\alpha]=\text{Im}[\beta]$ である。ここで、 $\text{Im}[\alpha]=\text{Im}[\beta]=\text{Im}[\lambda]$ とおき直すと、(8a-d)式は以下のように書き換えられる。

$$2(\text{Re}[\alpha] + \text{Re}[\beta]) = -\frac{(M+m)c}{Mm} \quad (19a)$$

$$(\text{Re}[\alpha] + \text{Re}[\beta])^2 + 2(\text{Re}[\alpha]\text{Re}[\beta] + \{\text{Im}[\lambda]\}^2) = \frac{Mk+mK}{Mm} \quad (19b)$$

$$2(\text{Re}[\alpha] + \text{Re}[\beta])\{\text{Re}[\alpha]\text{Re}[\beta] + \{\text{Im}[\lambda]\}^2\} = -\frac{(K+k)c}{Mm} \quad (19c)$$

$$\left(\{\text{Re}[\alpha]\}^2 + \{\text{Im}[\lambda]\}^2\right)\left(\{\text{Re}[\beta]\}^2 + \{\text{Im}[\lambda]\}^2\right) = \frac{Kk}{Mm} \quad (19d)$$

(19a-d)式を c について解くと、重複点におけるダンパー減衰係数 c は、 $\mu\kappa < 1$ の場合と同様に(10)式で表すことができる(モデル II)。ただし、

$$Mk-mK < 0 \Leftrightarrow \frac{M}{m} < \frac{K}{k} \Leftrightarrow \mu < \kappa \quad (20)$$

となるような領域では(10)式は実数解をもたない。よって、 $\mu < \kappa$ の領域(モデル III)において重複点は存在しない。

5. 連結ダンパー容量の増加に伴う固有振動数と減衰定数の変動特性による分類

図 5 は、4 節での検討に基づく μ と κ による減衰定数の変動の様相の領域分けである。 $\mu \geq 1$ の範囲において、 $\mu\kappa=1$ 、 $\mu=\kappa$ を境界として、減衰定数の変動の様相をそれぞれ異なる 3 つの領域に分けることができる。連結ダンパーの減衰係数に対する減衰定数の変動の様相の違いを図 6 に示す。領域 I、III では、連結ダンパーの減衰係数の増加に伴って 1 次減衰定数は単調に増加するが、2 次減衰定数はある点で極値をとったのち 0 に収束する。これに対し領域 II では、2 次減衰定数が単調増加し 1 次減衰定数が非単調に変動する。また、境界上は特別な場合に相当し、各領域とは異なる変動の様相を呈する。境界 $\mu\kappa=1$ 上では、連結ダンパーの減衰係数の特別な値の点まで 1 次および 2 次の減衰定数は等しく、その点を境として異なる 2 つの値に分岐し、一方が増加、一方が 0 に収束する。境界 $\mu=\kappa$ 上では、連結ダンパーの減衰係数にかかわらず 1 次、2 次ともに減衰定数が 0 であり、この場合連結による制振効果は得られない。連結ダンパー減衰係数 c が無限大となったとき、減衰定数のうちの 1 つはゼロに収束することの証明を Appendix 2 に示す。

領域 I、II には、アウトフレーム連結制振モデル^{7,8)}や低層建物と高層建物の連結モデル等が該当する。領域 III には、鉄筋コンクリート構造(重くて剛)と鉄骨構造(軽くて柔)の連結モデル等が該当する。

尚、序文でも述べたように、楊ら¹⁰⁾は質量比と固有振動数比を軸とする平面において類似の領域分割を行っているが、そこでは定点理論に基づき、定点における伝達率の特性に関する領域分割を行っており、連結ダンパー容量の増加に対する減衰定数や固有振動数の変動特性に関する分類を行っている本論文とは目的が異なる。また、本論文での記号を用いると、楊らの領域境界は $\mu=\kappa$ と $\kappa=1/(2\mu+1)$ であり、連結制振モデルにおいて自明の境界である $\mu=\kappa$ は同じであるものの、他方のものは本論文の $\kappa=1/\mu$ ($\mu\kappa=1$)とは異なる。

図5 μ と κ による領域分類

図6 モデルごとの減衰定数の変動の様相

6. 基本モデル ($\mu\kappa=1$) における減衰定数と固有円振動数の性質

6.1 準備計算

本節では、3節と4節で示された基本モデル ($\mu\kappa=1$) における減衰定数と固有円振動数の性質について、詳細な証明を交えた説明を行う。ここでは、 $M > m > 0$, $k > K > 0$, $c > 0$ とする。減衰振動（臨界減衰以下）、すなわち、全ての固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ が複素数の場合を考える。過減衰モードを含む場合は付録に示す。このとき、代数方程式の性質から、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ は2組の共役なペアに分けることができる。そこで、 $\lambda_1 = \lambda_2^*$, $\lambda_3 = \lambda_4^*$ とする。このとき、固有値と固有円振動数、減衰定数の関係を用いると、次の関係が成立する。

$$\lambda_1 = -h^{(1)}\omega^{(1)} + \omega^{(1)}\sqrt{1-h^{(1)2}}i, \lambda_2 = -h^{(1)}\omega^{(1)} - \omega^{(1)}\sqrt{1-h^{(1)2}}i \quad (21a,b)$$

$$\lambda_3 = -h^{(2)}\omega^{(2)} + \omega^{(2)}\sqrt{1-h^{(2)2}}i, \lambda_4 = -h^{(2)}\omega^{(2)} - \omega^{(2)}\sqrt{1-h^{(2)2}}i \quad (21c,d)$$

したがって

$$\lambda_1\lambda_2 = (\omega^{(1)})^2, \lambda_3\lambda_4 = (\omega^{(2)})^2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2h^{(1)}\omega^{(1)}, \lambda_3 + \lambda_4 = -2h^{(2)}\omega^{(2)} \quad (22a-d)$$

ここで簡単のために、次の表記を導入する。

$$\Omega^{(r)} \equiv (\omega^{(r)})^2, Z^{(r)} = 2h^{(r)}\omega^{(r)} \quad (23a,b)$$

(22a-d)式を(6)式に代入し、(23a,b)式の表記を用いると、以下を得る。

$$Z^{(1)} + Z^{(2)} = \frac{M+m}{Mm}c, \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)} + Z^{(1)}Z^{(2)} = \frac{Mk+mK}{Mm}$$

$$\Omega^{(1)}Z^{(2)} + \Omega^{(2)}Z^{(1)} = \frac{K+k}{Mm}c, \Omega^{(1)}\Omega^{(2)} = \frac{Kk}{Mm} \quad (24a-d)$$

(24a-d)式は、4つの正の実数 $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ を未知数とする非線形連立方程式である。あるいは、4つの正の実数 $h^{(1)}, h^{(2)}, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ を未知数とする非線形連立方程式であるともいえる。

(24a-d)式から $Z^{(1)}$ と $Z^{(2)}$ を消去することを考える。(24a, c)式より、次式が得られる。

$$\left(1 - \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}\right)Z^{(1)} = \left(\frac{1}{\Omega^{(2)}}\frac{K+k}{Mm} - \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}\frac{M+m}{Mm}\right)c \quad (25)$$

6.2 基本モデル ($\mu\kappa=1$) において c がある値以上で2つの固有円振動数 ω が一致して定数となる証明 (図7(a))

今、 $\Omega^{(1)} \neq \Omega^{(2)}$ であれば、(25)式と(24a)式より次式が得られる。

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= \frac{\frac{1}{\Omega^{(2)}}\frac{K+k}{Mm} - \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}\frac{M+m}{Mm}}{1 - \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}}c = \frac{(K+k) - \Omega^{(1)}(M+m)}{Mm(\Omega^{(2)} - \Omega^{(1)})}c \\ Z^{(2)} &= \frac{M+m}{Mm}c - \frac{\frac{1}{\Omega^{(2)}}\frac{K+k}{Mm} - \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}\frac{M+m}{Mm}}{1 - \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}}c = \frac{M+m}{Mm}c - \frac{(K+k) - \Omega^{(1)}(M+m)}{Mm(\Omega^{(2)} - \Omega^{(1)})}c \\ &= \frac{(M+m)(\Omega^{(2)} - \Omega^{(1)})}{Mm(\Omega^{(2)} - \Omega^{(1)})}c - \frac{(K+k) - \Omega^{(1)}(M+m)}{Mm(\Omega^{(2)} - \Omega^{(1)})}c = \frac{(K+k) - \Omega^{(2)}(M+m)}{Mm(\Omega^{(2)} - \Omega^{(1)})}c \end{aligned} \quad (26a, b)$$

すなわち、 $Z^{(1)}$ と $Z^{(2)}$ が消去されたことになり、 $\Omega^{(1)}$ と $\Omega^{(2)}$ を得るには、(26a,b)式を(24b)式に代入し、それと(24d)式を $\Omega^{(1)}$ と $\Omega^{(2)}$ を未知数とする非線形連立方程式として解けばよい。しかし、この場合については本節の目的と合致しないので省略する。

一方、もし $\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)}$ 、すなわち $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$ であれば、

$$\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)} \equiv \Omega \quad (27)$$

とし、これを(24a-d)式に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} Z^{(1)} + Z^{(2)} &= \frac{M+m}{Mm}c, 2\Omega + Z^{(1)}Z^{(2)} = \frac{Mk+mK}{Mm} \\ \Omega(Z^{(1)} + Z^{(2)}) &= \frac{K+k}{Mm}c, \Omega^2 = \frac{Kk}{Mm} \end{aligned} \quad (28a-d)$$

(28a)式と(28c)式より、次式が導かれる。

$$\Omega = \frac{\frac{K+k}{Mm}c}{\frac{M+m}{Mm}c} = \frac{K+k}{M+m} \Rightarrow \omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \sqrt{\frac{K+k}{M+m}} \quad (29)$$

このとき、次の性質が存在する。

特性1：過減衰モードを含まない連結系において、 $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$ であるときには、その値は連結ダッシュポットの減衰係数 c には無関係であり、両質点を剛連結したときの固有円振動数に等しい。

次に、(28d)式と(29)式より、 $\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)}$ となるための必要条件は次のように表される。

$$MK - mk = 0 \Rightarrow MK = mk \Rightarrow \frac{MK}{mk} = \mu\kappa = 1 \quad (30)$$

したがって、次の性質が存在する。

特性2：過減衰モードを含まない連結系において、 $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$ となるためには、 $\mu\kappa=1$ でなければならない。

さらに、 $\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)}$ の場合に $Z^{(1)}$ と $Z^{(2)}$ が実数となるための条件より、次式が導かれる。

$$c \geq \sqrt{\frac{4(M-m)^2 MK}{(M+m)^2}} = \frac{2(M-m)}{(M+m)} \sqrt{MK} = \frac{2(M-m)}{(M+m)} \sqrt{mk} \quad (31)$$

したがって、次の性質が存在する。

特性3：過減衰モードを含まない連結系において、 $\mu\kappa=1$ かつ

$$c \geq \frac{2(M-m)}{(M+m)} \sqrt{MK} \quad (32)$$

のとき、以下の関係が成立する。

$$\omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \sqrt{\frac{K+k}{M+m}} \quad (33)$$

以上より、 $\mu\kappa=1$ で、かつ c がある値より大きくなった場合における、固有円振動数 ω の重複および定数化現象が証明された。

図7 (a) 固有円振動数 ω の重複および定数化現象 (区間 B, C),
(b) 減衰定数の重複現象 (区間 A)

6.3 基本モデル ($\mu\kappa=1$) において c がある値以下で2つの減衰定数 h が重複する証明 (図7(b))

(24a)式と(24c)式から誘導された(26a,b)式を再度書き、 Ω と Z の定義を用いと次式が得られる。

$$h^{(1)} = \frac{(K+k) - \Omega^{(1)}(M+m)}{2\sqrt{\Omega^{(1)}Mm(\Omega^{(2)} - \Omega^{(1)})}} c = \frac{\frac{K+k}{\sqrt{\Omega^{(1)}}} - \sqrt{\Omega^{(1)}}(M+m)}{2Mm(\Omega^{(2)} - \Omega^{(1)})} c \quad (34a)$$

$$h^{(2)} = \frac{(K+k) - \Omega^{(2)}(M+m)}{2\sqrt{\Omega^{(2)}Mm(\Omega^{(1)} - \Omega^{(2)})}} c = -\frac{\frac{K+k}{\sqrt{\Omega^{(2)}}} - \sqrt{\Omega^{(2)}}(M+m)}{2Mm(\Omega^{(1)} - \Omega^{(2)})} c \quad (34b)$$

両者の差をとり、 $\mu\kappa=1$ を代入すると、両者が一致することを次のように示すことができる。

$$h^{(1)} - h^{(2)} = \frac{\frac{(K+k)\sqrt{Mm}}{\sqrt{Kk}} - (M+m)}{2Mm(\sqrt{\Omega^{(2)}} - \sqrt{\Omega^{(1)}})} c = \frac{m}{K} \frac{\{(K+k) - (k+K)\}}{2Mm(\sqrt{\Omega^{(2)}} - \sqrt{\Omega^{(1)}})} c = 0 \quad (35)$$

したがって、次の性質が存在する。

特性4：過減衰でない連結系において、 $\mu\kappa=1$ かつ

$$c < \frac{2(M-m)}{(M+m)} \sqrt{MK} \quad (36)$$

のとき (重複点以下)、次式が成立し2つの減衰定数は重複する。

$$h^{(1)} = h^{(2)} \quad (37)$$

7. 数値例題

7.1 減衰定数と固有円振動数の特性

副系の固有周期に対する主系の固有周期の比を τ で表す。このとき $\tau = \sqrt{\mu/\kappa}$ である。質量比と剛性比の平面において、 τ は図8に示すような意味を有する。質量均衡型モデル、基本モデル ($\mu\kappa=1$)、剛性均衡型モデルの3種類について、ここでは $\tau = \sqrt{2}$ 、 $\tau = 2$ 、 $\tau = \sqrt{10}$ の場合の解析結果を示す。解析モデルの諸元を表2, 3, 4に示す。

図9は、固有周期比 $\tau = \sqrt{2}, 2, \sqrt{10}$ のモデルについて、減衰定数の

変化を、連結ダンパー減衰係数 c をパラメータとして示したものである。質量均衡型モデルは領域Iにあるため、3節で解説した通り、連結ダンパーの減衰係数の増加に伴って1次減衰定数は単調に増加するが、2次減衰定数はある点で極値をとったのち0に収束する。また、固有周期比の増加に伴い、1次と2次の減衰定数の原点における勾配は離れることがわかる。

次に、基本モデルでは、固有周期比の増加に伴い、重複点における減衰定数は大きくなるといえる。さらに、剛性均衡型モデルは領域IIにあるため、3節で解説した通り、連結ダンパーの減衰係数の増加に伴って2次減衰定数は単調に増加するが、1次減衰定数はある点で極値をとったのち0に収束する。すなわち、1次振動が卓越する場合には、その減衰定数は、連結ダンパーの減衰係数を増加させても頭打ちとなるため、連結ダンパーの減衰係数を決定するには十分な注意が必要である。また、質量均衡型モデルと同様に、固有周期比の増加に伴い、1次と2次の減衰定数の原点における勾配は離れることがわかる。

図8 質量比と剛性比の平面における τ の意味

7.2 地震時応答特性との関係

連結ダンパーによる減衰定数の変化と地震時応答の変化の関係の一例として、7.1節で示したモデルの内、 $\tau=2$ (表3) の3モデルについて、記録地震波 (Hachinohe 1968 NS, JMA-Kobe 1995 NS, いずれも地動最大速度を 0.5m/s とするようにより規準化) を作用させた場合の主系と副系の最大変位の変化を図10に示す。この3モデルにおいて副系は同一であり、主系は固有周期が同一である。応答解析には、Newmark- β 法に基づく時刻歴応答解析を用いた。また、両系とも構造減衰はゼロとした。図中には減衰定数の変化もあわせて示す。

図10より、以下のことが観察される。

表2 解析モデル諸元 ($\tau = \sqrt{2}$)

モデル	副系	主系		
		質量均衡型	基本	剛性均衡型
質量[t]	300	300 ($\mu=1$)	424 ($\mu=\sqrt{2}$)	600 ($\mu=2$)
剛性[kN/mm]	294	147 ($\kappa=0.5$)	208 ($\kappa=1/\sqrt{2}$)	294 ($\kappa=1$)

表3 解析モデル諸元 ($\tau = 2$)

モデル	副系	主系		
		質量均衡型	基本	剛性均衡型
質量[t]	300	300 ($\mu=1$)	600 ($\mu=2$)	1200 ($\mu=4$)
剛性[kN/mm]	294	73.5 ($\kappa=0.25$)	147 ($\kappa=0.5$)	294 ($\kappa=1$)

表4 解析モデル諸元 ($\tau = \sqrt{10}$)

モデル	副系	主系		
		質量均衡型	基本	剛性均衡型
質量[t]	300	300 ($\mu=1$)	949 ($\mu=\sqrt{10}$)	3000 ($\mu=10$)
剛性[kN/mm]	490	49 ($\kappa=0.1$)	155 ($\kappa=1/\sqrt{10}$)	490 ($\kappa=1$)

図9 固有周期比 $\tau = \sqrt{2}, 2, \sqrt{10}$ のモデルの減衰定数

図10 地震時応答特性と減衰定数の変化の関係 (h1: 1次減衰定数, h2: 2次減衰定数, dmaxA: 副系最大応答, dmaxB: 主系最大応答)

(1)主系の最大応答（図中では $d_{\max B}$ ）を最小化する連結ダンパー減衰係数と、副系の最大応答（図中では $d_{\max A}$ ）を最小化する連結ダンパー減衰係数は大きく異なる。

(2)1次または2次の減衰定数が極値となるような連結ダンパー減衰係数と、主系または副系の最大応答を最小化する連結ダンパー減衰係数は一致しない。ただし、減衰定数が極値となるような連結ダンパー減衰係数における主系の最大応答は、最小値とおおむね一致しているといえる。

(3)長周期地震動的な性格が強い Hachinohe に対する主系の最大応答の変化と、パルス性地震動的な性格が強い JMA-Kobe に対する主系の最大応答の変化の傾向には、有意な差がみられる。Hachinohe に対しては、主系と副系の関係によらず、主系の最大応答の最小値はほぼ等しいのに対して、JMA-Kobe に対しては、主系の最大応答の最小値は、主系と副系の関係に大きく依存して変動する。

以上の観察結果より、連結系における減衰定数は、連結ダンパー減衰係数が変化したときの地震時最大応答の変化の特性との間に一定の相関性を有するものの、地震時最大応答は主系と副系の質量比や剛性比、地震動の特性にも大きく影響を受けるため、連結ダンパーの設計においては、これらの影響を総合的に判断できる指標の導入が必要であるといえる。

8. 結論

2棟の建物をともに1質点とした2自由度の平面連結せん断質点系モデルについて以下の結論を得た。

(1) 副系に対する主系の質量比 $\mu = M/m$ (≥ 1)、剛性比 $\kappa = K/k$ を軸とする平面において、連結ダンパーの減衰係数に対する全体系の減衰定数の変動の様相を分類する領域分けが可能であることを示し、その領域は3領域であることを明らかにした。

(2) 上記領域分けのうち、 $\mu > \kappa$ の範囲では、異なる4つの複素固有値の実部および虚部の絶対値、またはそのどちらか一方が等しくなる点（重複点）が存在することを明らかにした。また、その値を陽に誘導した。

(3) 上記領域分けの境界の1つを表す $\mu\kappa = 1$ の関係を満たすモデル（基本モデル）では、重複点まで1次および2次の減衰定数が等しく、重複点を境に減衰定数が異なる2つの値に分岐することを明らかにした。また、1次および2次の異なる固有円振動数は、重複点を境に等しい値になることを明らかにした。過減衰モードを含まない場合および含む場合の両者について、上記2つの性質が存在することを陽に示した。

(4) 上記重複点を特徴付ける条件式を導いた。すなわち、それぞれの建物モデルの質量および剛性と、連結ダンパーの減衰係数、連結モデルの減衰定数および固有円振動数間の関係を示した。

本論文では、地震時応答については限られた数値例のみを示した。応答スペクトル法を用いて地震時最大応答の評価を行う場合には、減衰定数による応答倍率や重複固有振動数は大きな影響を及ぼす。本論文で明らかにした固有振動や減衰定数の特性と、地震時応答の関係については稿を改めて詳細に論じる予定である。

謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金(基盤A(24246095))による。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 井川 望, 山田祐司, 横山浩明, 橘英三郎: 2棟連結による制振システムに関する研究, アクティブ制震(振)シンポジウム論文集, pp.333-340, 1992.3
- 2) Luco, J. Enrique and De Barros, F. C. P.: Optimal Damping Between Two Adjacent Elastic Structures, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, **27**(7), pp.649-659, 1998.7
- 3) 蔭山 満, 安井 譲, 背戸一登: 連結制振の基本モデルにおける連結バネとダンパーの最適解の誘導, 日本建築学会構造系論文集, No.529, pp.97-104, 2000.3
- 4) 蔭山 満, 安井 譲, 背戸一登: 多モード連結制振を対象とした連結バネとダンパーの最適配置に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, No.538, pp.79-86, 2000.12
- 5) 蔭山 満: 定点理論による連結制振を対象としたパッシブ系の多モード最適制振の設計法に関する研究, 日本大学学位論文, 2005
- 6) 諸岡繁洋, 篠原達巳, 御澤昇明, 中島正愛: 遊隙連結系の等価線形化と応答制御への適用, 日本建築学会構造系論文集, No.587, pp.61-68, 2005.1
- 7) 辻 聖晃, 竹脇 出, 高橋宏治, 榎原健一: アウトフレームを用いた連結制震構法による耐震補強(その1: 基本耐震補強特性), 日本地震工学会大会講演梗概集, pp.392-393, 2005.11
- 8) 高橋宏治, 榎原健一, 辻 聖晃, 竹脇 出: アウトフレームを用いた連結制震構法による耐震補強(その2: 試設計例), 日本地震工学会大会講演梗概集, pp.394-395, 2005.11
- 9) 竹脇 出, 辻 聖晃: 連結制震ダンパーを有する構造物群へ入力される地震エネルギーの基本特性, 日本建築学会構造系論文集, No.616, pp.81-87, 2007.6
- 10) 楊 貴君, 岩崎良二, 高田毅士: 連結構造物における定点理論に基づく質量比一周波数比空間の領域分類と最適パラメータの誘導, 日本建築学会構造系論文集, No.617, pp.71-76, 2007.7
- 11) 辻 聖晃, 竹脇 出: 外付けフレームとのダンパー連結による低層既存建物の耐震補強構法, 日本建築学会構造系論文集, No.612, pp.55-62, 2007.2
- 12) 片岡隆広, 山本博之, 黒木安男, 榎原健一: アウトフレーム連結制振構法による耐震補強, その1 構法概要及び試設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集, C-2, pp.615-616, 2006.9
- 13) 高橋宏治, 太田崇士, 太田 寛, 榎原健一: アウトフレーム連結制振構法による耐震補強, その2 基本特性, 日本建築学会大会学術講演梗概集, C-2, pp.617-618, 2006.9
- 14) 岩佐裕一, 藤井 睦, 竹脇 出, 辻 聖晃: アウトフレーム連結制振構法による耐震補強, その3 縮小モデルによる振動実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集, C-2, pp.619-620, 2006.9
- 15) 井川 望, 関谷英一, 竹脇 出, 辻 聖晃: アウトフレーム連結制振構法による耐震補強, その4 振動実験結果の数値シミュレーション, 日本建築学会大会学術講演梗概集, C-2, pp.621-622, 2006.9
- 16) 田原健一, 山崎真司, 見波 進: 履歴ダンパーを用いた連結制振構造の地震応答低減効果, 日本建築学会構造系論文集, No.621, pp.49-56, 2007.11
- 17) 伊藤 幸, 辻 聖晃, 吉富信太, 竹脇 出: アウトフレーム連結制振構法による既存建物耐震補強の逆問題型アプローチ, 日本建築学会構造系論文集, No.627, pp.725-732, 2008.5
- 18) 林 篤, 大迫勝彦, 和田 章, 高梨晃一: 連結制振構造を適用した線路上空建築物のエネルギーによる応答特性評価, 日本建築学会構造系論文集, 第635号, pp.55-63, 2009.1
- 19) 伊藤 幸, 辻 聖晃, 吉富信太, 竹脇 出: アウトフレーム連結制振耐震補強のための連結ダンパーの合理的決定法, 日本建築学会構造系論文集, No.636, pp.273-281, 2009.2
- 20) 林 篤, 大迫勝彦, 和田 章, 高梨晃一, 岩崎和明, 鈴木勇: 連結制振構造を適用した線路上空建築物の設計と実測による性能評価, 日本建築学会構造系論文集, No.648, pp.299-307, 2010.2
- 21) 辻 聖晃, 中川大輔, 吉富信太, 竹脇 出: アウトフレーム型連結制振構法におけるアウトフレーム及び連結ダンパーの応答低減率マップを用いた設計法, 日本建築学会構造系論文集, No.648, pp.337-346, 2010.2
- 22) 半田 潤, 吉富信太, 辻 聖晃, 竹脇 出: 建物の平面配置効果を考慮した2棟連結制振構法の特性解析, 構造工学論文集, Vol.57B, pp.319-327, 2011
- 23) Kobori, T., Yamada, T. and Takenaka, T.: Effect of Dynamic Tuned Connection on Reduction of Seismic Response -Application to Adjacent Office Building-, *Proc. 9WCEE*, Tokyo-Kyoto, Japan, **V**, pp.773-778, 1988
- 24) 連結制振工法を共同住宅の耐震改修工事へ適用, 建築技術, No.682, p.54, 2006.11
- 25) Den Hartog, J. P.: *Mechanical Vibrations*, 4th ed., McGraw-Hill, 1956
- 26) Veletsos, A. S. and Ventura, C. E.: Modal Analysis of Non-Classically Damped Linear Systems, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, **14**, pp.217-243, 1986

Appendix 1 基本モデル（ $\mu\kappa=1$ ）における固有円振動数の性質（過減衰モードを含む場合）

全ての固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ のうち、 λ_1, λ_2 が複素数であり、 λ_3, λ_4 が実数の場合を考える。このとき、代数方程式の性質から、 λ_1 と λ_2 は共約なペアとなる。すなわち、 $\lambda_1 = \lambda_2^*$ となる。また、 $\lambda_3 > \lambda_4$ とする。このとき、固有値と固有円振動数、減衰定数の関係を用いると、固有値は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -h^{(1)}\omega^{(1)} + \omega^{(1)}\sqrt{1-(h^{(1)})^2}i, \quad \lambda_2 = -h^{(1)}\omega^{(1)} - \omega^{(1)}\sqrt{1-(h^{(1)})^2}i \\ \lambda_3 &= -h^{(2)}\omega^{(2)} + \omega^{(2)}\sqrt{(h^{(2)})^2-1}, \quad \lambda_4 = -h^{(2)}\omega^{(2)} - \omega^{(2)}\sqrt{(h^{(2)})^2-1}\end{aligned}\quad (\text{A1a-d})$$

実固有値と減衰定数、固有円振動数の関係としては、(A1c, d)式を用いるものとする。(A1a-d)式より次式を得る。

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2 &= (\omega^{(1)})^2, \quad \lambda_3\lambda_4 = (\omega^{(2)})^2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -2h^{(1)}\omega^{(1)}, \\ \lambda_3 + \lambda_4 &= -2h^{(2)}\omega^{(2)}\end{aligned}\quad (\text{A2})$$

この式は、過減衰モードがない場合の(22)式と表現上は全く同じである。したがって、これ以降の式展開は、過減衰モードがない場合と同じとなる。

次に、全ての固有値が実数の場合を考える。ただし $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ とする。このとき、どの固有値をペアとするかには任意性があるため、例えば λ_1 と λ_2 、 λ_3 と λ_4 をそれぞれペアとする。このとき、固有値と固有円振動数、減衰定数の関係を用いると、固有値は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -h^{(1)}\omega^{(1)} + \omega^{(1)}\sqrt{(h^{(1)})^2-1}, \quad \lambda_2 = -h^{(1)}\omega^{(1)} - \omega^{(1)}\sqrt{(h^{(1)})^2-1} \\ \lambda_3 &= -h^{(2)}\omega^{(2)} + \omega^{(2)}\sqrt{(h^{(2)})^2-1}, \quad \lambda_4 = -h^{(2)}\omega^{(2)} - \omega^{(2)}\sqrt{(h^{(2)})^2-1}\end{aligned}\quad (\text{A3a-d})$$

(A3a-d)式より次式を得る。

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2 &= (\omega^{(1)})^2, \quad \lambda_3\lambda_4 = (\omega^{(2)})^2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -2h^{(1)}\omega^{(1)}, \\ \lambda_3 + \lambda_4 &= -2h^{(2)}\omega^{(2)}\end{aligned}\quad (\text{A4a-d})$$

この式も、過減衰モードがない場合の(22)式と表現上は全く同じである。したがって、これ以降の式展開は、過減衰モードがない場合と同じとなる。

結局、過減衰モードがある場合についても、6節と同様の特性1～4が成立する。

なお、 $\mu\kappa=1$ で過減衰モードがある場合の重複点における固有値は、(A3)式で $h^{(1)} = h^{(2)} \equiv h$ 、 $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} \equiv \omega$ とすると、

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -h\omega + \omega\sqrt{h^2-1}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -h\omega - \omega\sqrt{h^2-1} \quad (\text{A5a,b})$$

となり、「2組の重複した実固有値に分けられる」ことがわかる。

Appendix 2 連結ダンパー減衰係数 c が無限大となったときに、減衰定数のうちの1つはゼロに収束すること、および、少なくとも1つの極値をもつことの証明

(6a)式より、連結ダンパー減衰係数 c が無限大のときには、少なくとも一つの固有値 λ は無限大に収束する必要があることがわかる。一方、(6d)式より、4つの固有値の積は必ず有限であるから、 c が無限大のときには、少なくとも一つの固有値はゼロに収束する必要があることもわかる。そこで、 c が無限大のときに、 λ_1 を無限大に収束する固有値、 λ_2 をゼロに収束する固有値であると仮定する。次に(6b)式と上の仮定より、 c が無限大のときには、 $\lambda_3 = -\lambda_4$ となる必要があることとなる。減衰定数と固有値の関係を示した(3b)式に、上記の組

み合わせを代入すると、 λ_1 と λ_2 の組み合わせから計算される減衰定数は無限大に、 λ_3 と λ_4 の組み合わせから計算される減衰定数はゼロに収束することが示される。

また、 λ_3 と λ_4 の組み合わせから計算される減衰定数は、 $c=0$ では明らかにゼロ、 $c>0$ ではある有限値であり、 c が無限大のときにはゼロに収束するため、少なくとも一つの極値を持つことは明らかである。

(2013年4月1日原稿受理、2013年10月23日採用決定)