組合せ剛性理論に基づく冗長性を考慮したトラス構造物の最適設計法

A DESIGN METHOD FOR OPTIMAL TRUSS STRUCTURES WITH REDUNDANCY BASED ON COMBINATORIAL RIGIDITY THEORY

古田理恵^{*1}, 山川 誠^{*2}, 加藤直樹^{*3}, 荒木慶一^{*4}, 大崎 純^{*5}

*Rie KOHTA, Makoto YAMAKAWA, Naoki KATOH,
Yoshikazu ARAKI and Makoto OHSAKI*

The Truss Topology Design (TTD) problem deals with the selection of optimal configuration for pin-jointed trusses, in particular, optimization of the connectivity of the nodes by the members, in which volume and/or compliance are minimized. In general, it is known that such truss structures are statically determinate and not redundantly rigid, that is, if just one member is damaged or lost, the entire structure cannot support loads. Therefore, it is important to take redundancy of structures into consideration in the TTD. In this paper, we present a new practical design method for finding a redundant TTD based on combinatorial rigidity theory. We define, as redundancy, the margin of the number of members until the collapse of the entire structure when some components are damaged or lost. A truss structure is said to be a “2-edge-rigid truss” if we need to remove at least two members from the truss structure so that the structure becomes non-rigid. We can find a 2-edge-rigid TTD by using a method based on combinatorial rigidity theory. The present method enables us to find an approximately optimal TTD with low computational cost. In the numerical examples, we obtain redundantly rigid truss structures, in which the objective value of the solution is about one percent greater than that of the lower bound solution. Therefore, we can conclude that the method is effective to design an optimal redundant truss structure.

Keywords: *Optimal design, Truss structures, Topology optimization, Redundancy, Combinatorial rigidity theory*
最適設計, トラス構造物, トポロジー最適化, 冗長性, 組合せ剛性理論

1. はじめに

構造物の設計において「想定外」の外乱に対して十分な安全性を確保することは難しい。とりわけ「進行性崩壊」と呼ばれる、ある事象（部材消失等）を起点として部分的な崩壊が引き金となり、構造物全体へと崩壊が広がる現象の危険性が懸念される。このような状況の下、設計者は可能な限り「想定内」の範囲を広げることが求められる。合理的に冗長性を考慮した設計はこのような「想定外」の現象への対策となり得るものである¹⁾。

本論では冗長性を有するトラス構造物を、「対象のトラス構造物に含まれる全部材のうち、いずれかの部材が消失・破断しても不安定構造とならない」ものと定義した上で、冗長性を有するトラス・トポロジーの設計問題を扱う。トラス・トポロジー設計（Truss Topology Design, TTD）問題とは、応力制約、部材総体積制約等の

制約条件の下、総体積あるいはコンプライアンスを最小化するようなトラス構造物の最適形状、とりわけ部材による節点間の最適な接続関係を扱う問題である。TTD問題を扱う手法は複数存在するが、中でもグラッドストラクチャ法と呼ばれる手法が用いられることが多い。この手法ではトラス形状の初期値として、十分な数の部材を有するグラッドストラクチャが与えられる（図1）。その後、各部材の断面積を設計変数とする最適化問題を解くことにより、最適な部材配置（トポロジー）が求められる。なお、このとき部材断面積が0となった部材は取り除かれる。

TTDの手法によって設計されたトラス構造物は一般的には静定構造となることが知られており²⁾、いずれか一本の部材が消失・破断すると荷重支持能力を失う。すなわち得られた解は冗長性を持たない。こうした部材破断に対する冗長性の評価法として、最悪シナリ

^{*1} 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生

^{*2} 東京電機大学未来科学部建築学科 准教授・博士(工学)

^{*3} 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・工博

^{*4} 京都大学大学院工学研究科建築学専攻
准教授・博士(工学)

^{*5} 広島大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・博士(工学)

Graduate Student, Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, School of Science and Technology for Future Life, Tokyo Denki University, Dr. Eng.

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.

Assoc. Prof., Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.

Prof., Dept. of Architecture, Graduate School of Engineering, Hiroshima University, Dr. Eng.

オの概念を導入して定量的に評価する方法が寒野ら¹⁾³⁾によって提案されている。また、高田によって複数の荷重条件を設定することで解として得られるトラス・トポロジーに冗長性を持たせる最適設計法¹⁾⁴⁾⁵⁾や、列挙法を用いた部材破断に対して冗長性を有するトラス・トポロジーの最適設計法⁶⁾がすでに提案されている。また、部材破断の不確定性を考慮し、バックアップ部材の概念を導入した最適設計法が上谷ら⁷⁾によって提案されている。ここで、TTD問題における冗長性は組合せ的な性質を持つ。この性質に着目して問題構造を抽象化・明確化することにより、離散数学の分野での知見・効率的解法が適用可能となる。このようなアプローチはこれまでになされておらず、現実的な大規模問題にも対応可能な冗長性の定量的評価法・設計法の確立に向けて十分な意義を持つ。本論では規模が増加しても計算負荷が指数関数的に増えないような手法として、離散数学の分野で研究のなされている組合せ剛性理論に基づき、冗長性を付与したトラス・トポロジー最適設計法を提案する。

図1 グランドストラクチャ

図2 最適トラス

2. 組合せ剛性理論

本節では、本論で提案する最適設計法の基盤となる組合せ剛性理論について、その概要と、本論で用いる概念やアルゴリズムについて説明する。

2.1 組合せ剛性理論の概要

自由な回転を許すjointおよび伸び縮みしない剛なbarから構成されるbar-joint frameworkは、図3に示すようなグラフと呼ばれる幾何学モデルを用いて表現され、組合せ剛性理論の分野ではそのrigidityについて組合せ的特徴付けが為されてきた⁸⁾。jointを頂点集合 V 、barを辺集合 E とすれば、それらによって構成されるグラフは $G=(V,E)$ と表記される。頂点集合 V はトラス構造物における節点集合に、辺集合 E は部材集合に対応し、本論ではそれぞれを同等とみなす。また、 $V(G)$ 、 $E(G)$ をそれぞれグラフ G に含まれる頂点集合、辺集合とする。

(a) rigid グラフ

(b) rigidでないグラフ

図3 組合せ剛性理論におけるグラフ

ある2次元frameworkについてその運動が並進および回転運動のみに限られるとき、このframeworkに対応するグラフは(2次元において) rigidであるという。このrigidという概念はトラス構造物にお

ける安定性に対応する。以降ではrigid graphの集合を $\mathcal{R}$ と表す。

最小辺数のrigidグラフはLaman graphと呼ばれ、トラス構造における静定トラスに相当する。グラフ $G=(V,E)$ がLaman graphであるための必要十分条件は次のように表される⁹⁾。

$$|E|=2|V|-3 \quad (1.a)$$

$$|E(X)| \leq 2|X|-3, \quad \forall X \subseteq V \text{ with } 2 \leq |X| \leq |V| \quad (1.b)$$

ここに $E(X) \subseteq E$ は頂点集合 $X \subseteq V$ によって誘導される部分グラフの辺集合とし、 $|E|$ 、 $|V|$ はそれぞれ辺数、頂点数とする。

例えば図4(a)に示すグラフはLaman graphである。すなわち、 $|E|=5$ 、 $|V|=4$ により式(1.a)を満足し、図4(b)に示す部分グラフ $G(X, E(X))$ について、 $|E(X)|=|X|=3$ となり式(1.b)を満たす。また、詳細は省略するが、同様に他のいかなる部分グラフについても式(1.b)が成り立つことが確認できる。

(a) Laman graph

(b) 部分グラフ $E(X)$

図4 Laman graph とその部分グラフ

以降ではLaman graphの集合を $\mathcal{L}(\subset \mathcal{R})$ と表す。すなわち $G \in \mathcal{L}$ ならば、 G は式(1.a)、式(1.b)を満たす。また、簡潔な表記のため、誤解が生じない限りグラフ $G=(V,E)$ と辺集合 E を同一視して表す。

2.2 2-edge-rigidグラフと冗長性

Yu and Anderson¹⁰⁾は k -edge-rigidグラフを「任意の $(k-1)$ 本の辺を取り除いた後でもrigidであるようなグラフ」と定義している。このような k -edge-rigidグラフの生成手法が加藤ら¹¹⁾¹²⁾によって提案されている。

(a) 1-edge-rigid グラフ

(b) 2-edge-rigid グラフ

図5 k -edge-rigid グラフ ($k=1,2$)

一方、Garcia and Tejel¹³⁾は冗長なrigidグラフ (redundantly rigid graph) を、「あるグラフ G から任意の辺 $e \in E(G)$ を取り除いた部分グラフ $G-e$ がrigidグラフであるとき、グラフ G を冗長なrigidグラフと呼ぶ」と定義している。冗長なrigidグラフとは任意の1本の辺を取り除いた後でもrigidであるようなグラフであるので2-edge-rigid graphである。

例として、頂点数4の場合のrigidグラフを図6に示す。図6(a)に示すグラフ G は任意の1本の辺を取り除いた後でもrigidであるため、

冗長なrigidグラフである。このグラフ G から1辺を除いたグラフ G' を図6(b)に示す。なお、点線は除かれた辺を示しており、グラフ G' はグラフ G の部分グラフである。グラフ G' は任意の1本の辺を取り除くとrigidではなくなるため、冗長なrigidグラフとは言えない。

(a) 冗長な rigid グラフ G (b) rigid グラフ G'
図 6 冗長な rigid グラフ G とその部分グラフ

特に、任意の辺 $e \in E(G)$ に対し $G - e$ がLaman graphとなるグラフ G はgeneric circuitと呼ばれる。すなわち、generic circuitとは

$$G - e \in \mathcal{L}, \forall e \in G \quad (2)$$

となるようなグラフ G のことである。Laman graphは最小辺数のrigidグラフであるので、generic circuitは極小な2-edge-rigidグラフである。Laman graphが与えられたとき、任意の $k \geq 2$ に対して、 k -edge-rigidグラフとなるような辺集合のなかで最小サイズの辺集合を求める多項式時間アルゴリズムは、著者の知る限り提案されていない。ただし、 $k=2$ の場合は、Laman graphから付加すべき最小本数の辺集合を効率的に求める、Garcia and Tejel¹³⁾ による $O(n^2)$ 時間アルゴリズムが知られている。その概要を次節および次々節にまとめる。

2.3 冗長範囲 $L(i, j)$

任意のLamanグラフに新たな辺を加えると、冗長なrigidグラフを部分グラフとして含むことが知られている。つまり、新たな辺の付与により、部分的に冗長性が与えられる。頂点数が4以上の完全グラフは頂点全てを結ぶ2-edge-rigidグラフを部分グラフとして必ず含む（証明はAppendix 1を参照。ここで、完全グラフとは任意の2頂点間に辺が存在するグラフを表す）ことから、頂点数が4以上であれば辺を重複させることなくグラフ全体に冗長性を付与できる。このような辺集合を求めるための準備として、「新たな辺を加えることにより冗長性を得る範囲」、すなわち冗長範囲の概念を本節では導入する。

以下では点 i と点 j を結ぶ辺を $e = (i, j)$ と表す。Laman graph L に対して新たに辺 $e = (i, j) \notin E(L)$ を加えたとき、 $L \cup (i, j)$ は唯一のgeneric circuitを含む。このgeneric circuitを $C(i, j)$ あるいは $C(e)$ と表す。 $C(i, j)$ は辺 $e = (i, j)$ を含み、 $C(i, j) - (i, j)$ は定義よりLaman graphである。以降では、 $C(i, j) - (i, j)$ を $L(i, j)$ と表し、冗長範囲と呼ぶ。なお、この冗長範囲 $L(i, j)$ はPebble game algorithm¹⁴⁾ を用いて計算可能である。前述のように、 $L(i, j)$ とは新たな辺 (i, j) を加えた際に冗長性を得る範囲と理解すればよい。すなわち $L(i, j) \subseteq L$ に対し、

$$\forall e' \in L(i, j) \cup (i, j), L(i, j) \cup (i, j) - e' \in \mathcal{L}$$

が成立する。ここで、 $L(i, j) = L$ とは限らないことに注意が必要で

ある。同様に、辺 $e_1, e_2, \dots, e_k$ を加えたときに冗長となる L の部分集合を冗長範囲 $L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ と表す。すなわち $L(e_1, e_2, \dots, e_k) \subseteq L$ に対し、

$$\forall e' \in L(e_1, e_2, \dots, e_k) \cup \{e_1, e_2, \dots, e_k\}, \exists L_{e'} \in \mathcal{L} \text{ such that} \\ L_{e'} \subseteq L(e_1, e_2, \dots, e_k) \cup \{e_1, e_2, \dots, e_k\} - e', V(L_{e'}) = V(L(e_1, e_2, \dots, e_k))$$

が成立する。グラフ全体の冗長性を保証するためには $L(e_1, e_2, \dots, e_k) = L$ となるような辺集合 $E' = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 、すなわち

$$\forall e' \in L \cup E', \exists L_{e'} \in \mathcal{L} \text{ such that } L_{e'} \subseteq L \cup E' - e', V(L_{e'}) = V(L) \quad (3)$$

となる辺集合を求める必要がある。Garcia and Tejel¹³⁾ は次の補題を証明している（証明についてはAppendix 2を参照）。

補題[1] L がLaman graphであるとき、次の関係が成り立つ。
 $L(e_1, e_2, \dots, e_k) = L(e_1) \cup L(e_2) \cup \dots \cup L(e_k)$ (4)

補題[1]より、 $L(e_1) \cup L(e_2) \cup \dots \cup L(e_k) = L$ となる $E' = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ を求められれば、本論での目的の一つが達せられることになる。

例1 以下に具体例を用いて説明する。図7に示すようなLaman graph L を考える。図中の番号は各頂点の番号とする。図7(b)において太線で示された辺は冗長範囲 $L(2, 4)$ に含まれる辺を表す。つまり、Laman graph L に新たに辺 $(2, 4)$ を加えると、 $L(2, 4)$ の範囲が冗長となる。同様に、辺 $(2, 5)$ を加えたときに冗長となる範囲 $L(2, 5)$ を図7(c)に示す。図7(b), (c)、および(4)式から、 L に新たに2辺 $(2, 4)$, $(2, 5)$ を付加すると、

$$L((2, 4), (2, 5)) = L(2, 4) \cup L(2, 5) = L$$

が成立し、 L に含まれる全ての辺が冗長となる。このように、任意のLaman graphに対して適切な辺集合 E' を付加することによって、2-edge-rigidグラフを生成することが可能である。

図 7 冗長範囲 $L(i, j)$

2.4 アルゴリズム Find a minimal covering

頂点数が4以上のある任意のLaman graph L に対し、式(3)を満たすような辺集合 $E' = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ のうち、その要素数 $|E'|$ が最小となるような集合を求めるアルゴリズムFind a minimal coveringが提案されている¹³⁾。Find a minimal coveringの手順を図8に示す。 L が頂点数4以上のLaman graphであるとき、辺 $e = (i, j)$ 、 $i, j \in V(L)$ について、 $L(e) \subset L(e')$ （つまり $L(e)$ は $L(e')$ の真部分集合）となるような辺 $e' \neq e$ 、 $e' = (i', j')$ 、 $i', j' \in V(L)$ が存在しなければ、点 i, j を L のextreme vertexと呼ぶ。このアルゴリズムでは、extreme vertexと

呼ばれる点 i_1 を L から一つ選んだ上で、図9に示すアルゴリズムFind a covering rooted in i_1 を実行している。なお、点 i_1 は extreme vertex でなければならず、そのような点 i_1 を選択するために、上記アルゴリズムFind a minimal covering ではStep1で分岐が行われるが、その詳細についてはAppendix 3および文献13)を参照されたい。

図8 アルゴリズム Find a minimal covering

図9 アルゴリズム Find a covering rooted in i_1

Find a covering rooted in i_1 では、Laman graph L に対して

$$L(i_1, j_2) \cup L(i_1, j_3) \cup \dots \cup L(i_1, j_h) = L \quad (5)$$

を満たすような点集合 $\{j_2, j_3, \dots, j_h\} \subset V(L)$ を求めている。ここで、 $V(L)$ はグラフ L に含まれる頂点の集合とする。補題[1]より、辺集合 $\{(i_1, j_2), (i_1, j_3), \dots, (i_1, j_h)\}$ が式(3)を満たすことは明らかである。以降ではこのような点集合 $\{j_2, j_3, \dots, j_h\}$ を $\text{Extr}(L)$ と表す。

Find a covering rooted in i_1 の実行を終えた時点で、付加すべき辺の数は $(h-1)$ 本である。ただし付加辺数 $h-1$ は以下の補題を用いてさらに小さくできる。Garcia and Tejel¹³⁾ は以下を証明している。

補題[2] $L(i_1, j_l) \cap L(j_{l+1}, j_{l+2}) \neq \emptyset$ であれば $L(i_1, j_l) \cup L(j_{l+1}, j_{l+2}) = L(i_1, j_l) \cup L(i_1, j_{l+1}) \cup L(i_1, j_{l+2})$ が成立し、そうでなければ $L(i_1, j_{l+1}) \cup L(j_l, j_{l+2}) = L(i_1, j_l) \cup L(i_1, j_{l+1}) \cup L(i_1, j_{l+2})$ が成り立つ。

補題[2]に基づき、 $(i_1, j_l), (i_1, j_{l+1}), (i_1, j_{l+2})$ の3辺を、 $(i_1, j_l), (j_{l+1}, j_{l+2})$ または $(i_1, j_{l+1}), (j_l, j_{l+2})$ の2辺に順次置き換えることが可能である。Find a minimal covering ではReduce a covering と呼んでおり、この操作により付加すべき辺集合の要素数を $h-1$ から $\lceil h/2 \rceil$ まで減らすことができ、また、 $\lceil h/2 \rceil$ が最小の要素数となる¹³⁾。ただし、 $\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数を表す。

例2 例として、図10に示したLaman graph L と3辺 $(1,2), (1,3), (1,4)$ の追加を考える。図10(b), (c), (d) に示すように、 $L(1,2) \cup L(1,3) \cup L(1,4)$ はLaman graph L に一致する。すなわち $\text{Extr}(L) = \{1,2,3,4\}$ となる。ここでReduce a covering で行われる手順としては、まず $L(1,2)$ と $L(3,4)$ の計算を行う(図10(b), (e) 参照)。この場合、 $L(1,2) \cap L(3,4)$ は空集合ではないので、補題[2]より $L(1,2) \cup L(3,4)$ は $L(1,2) \cup L(1,3) \cup L(1,4)$ と一致する。すなわち3辺 $(1,2), (1,3), (1,4)$ は2辺 $(1,2), (3,4)$ に置換えることができる。以上より、付加すべき辺集合 $E' = \{(1,2), (3,4)\}$ が出力される。

図10 Laman graph L と $L(i, j)$ の例

3. 問題の定式化

3.1 2-edge-rigid制約

トラス構造物をグラフとして扱うことにより、前節で述べた組合せ剛性理論を用いて、トラス構造物の安定性 (rigidity) を調べることができる。本論ではグラフに置換えたときにそのグラフが2-edge-rigidグラフとなるような、冗長なトラスを得ることを目的とする。このような制約を2-edge-rigid制約と呼ぶ。トラス構造物が静定トラス、すなわちLaman graphであれば、前節の手法により2-edge-rigid制約を満たすグラフを容易に得られる。

3.2 元問題の定式化

ここでは、本論で対象とする問題（以下、元問題と呼ぶ）とその定式化について説明する。はじめに、図1に示すような総頂点数 n 、総部材数 $m = {}_nC_2$ であるようなグラウンドストラクチャを与える。最小化する目的関数は、外力の仕事量に相当する量であるコンプライアンスとする。また、制約条件は(1)力の釣合式、(2)総体積上限値、(3)各部材の断面積下限値、(4)2-edge-rigid制約の4条件とする。なお、本論では部材の交差に関する制約は考慮しない。問題を以下のように定式化する。

$$\text{Minimize} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{U} \quad (6. a)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i \in I} A_i \mathbf{K}_i \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (6. b)$$

$$\sum_{i \in I} A_i L_i \leq V^U \quad (6. c)$$

$$A_i \geq A^L \quad (i \in I) \quad (6. d)$$

$$I - e \in \mathcal{R}, \forall e \in I \quad (6. e)$$

ここに $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{U}$ はそれぞれ各頂点に作用する外力ベクトル、各頂点の変位とし、 A_i 、 L_i はそれぞれ部材 i の断面積、部材長とし、 $A_i \mathbf{K}_i$ は部材 i の剛性マトリクスとする。また A^L は各部材断面積の下限値、 V^U は総体積の上限値、 I はトポロジーに含まれる部材の集合とする。 I は本来部材集合を表す記号であるが、以下ではトポロジー自体を表す記号としても扱う。問題(6)における設計変数はトポロジー I と、そのトポロジーにおける各部材断面積 $A_i, i \in I$ である。また、 $\mathcal{R}$ はrigid graphの集合を表す。

一般的には、2-edge-rigid制約を満足するような問題(6)の最適解を求めることは困難である。なぜならば、2-edge-rigid制約は組合せ的な性質を持つので、問題(6)の厳密な最適解を計算するためには適切な手法に基づいた、トポロジーの総列挙が必要になるからである⁶⁾。総列挙法に要する計算負荷は問題サイズの指数関数で増大するため、規模の大きな問題を解くことは困難となる。

3.3 2-edge-rigid制約を含むTTD問題の近似解法

前述のように、2-edge-rigid制約を含むTTD問題において厳密な解を求めることは困難である。しかしながら、元問題の厳密な最適解を求めることは実用上あまり重要ではない。そこで、組合せ剛性理論に基づく手法を用いて、2-edge-rigid制約を含むTTD問題の近似最適解を得るための手法（以下、提案手法）を提案する。提案手法は次の3つのステップから構成される。

Step1: 2-edge-rigid制約と断面積下限制約を緩和した問題を解く。

Step2: Step1で得られたトポロジーの解に最小本数の部材を付加することで2-edge-rigid制約を満たすトポロジーを求める。

Step3: Step2で得られたトポロジーに対して、各部材の断面積を設計変数とした最適化問題を解くことにより、各部材の最適な断面積を得る。

Step1の最適解における目的関数値は、元問題の大域的最適解における目的関数値の下界であり、Step3の最適解における目的関数値はその上界を与える。よって、これらの目的関数値の比 (= 上界/下界) によって近似解の精度を見積ることが可能である。

なお、本報では以下の2点に注意が必要である。

- 1) グラフとしてみたときに辺の重複は許容しない。
- 2) Step2以降では、Step1で得られた最適トポロジーに含まれる頂点集合のみを対象とする。

これらの条件から、Step1の最適解として2部材のみからなるトポロジーが得られた場合は、本手法で冗長性を有する近似最適解を求めることはできない。例を図11に示す。図中の番号は頂点番号を表す。図11(a)に冗長性を付与するためには、図11(b)または図11(c)の点線で示すように、部材を付加したトポロジーが考えられる。しかし条件1)より、図11(b)のようなトポロジーは除外される。また、2)の条件を考慮すると、図11(a)に含まれる頂点集合は $V_1 = \{1, 2, 3\}$ であるのに対し、図11(c)では V_1 に含まれない頂点4を含むことになるため、これも解から除外される。以上より、Step1の最適解として2部材のみからトポロジーが得られた場合には、本手法で冗長性を有する近似最適解を求めることはできない。ただし、これは特殊な場合であり、頂点数が4以上であればこのような現象は生じないため、本報では対象外とする。

図 11 2 部材トラスに対する冗長解の例

以下では各ステップについて詳細を説明する。

3.3.1 Step1（元問題の目的関数値の下界計算）

このステップでは問題(6)に対して、1) 2-edge-rigid制約を考慮しない、2) 各部材断面積の下限制約を非負制約に置換える、という2つの制約条件を緩和した緩和問題

$$\text{Minimize} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{U} \quad (7. a)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i \in I_g} A_i \mathbf{K}_i \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (7. b)$$

$$\sum_{i \in I_g} A_i L_i \leq V^U \quad (7. c)$$

$$A_i \geq 0 \quad (i \in I_g) \quad (7. d)$$

を解く。ここに、 I_g はグラウンドストラクチャに含まれる全部材の集合とする。 I_g の要素数は問題の規模によっては膨大になる。問題(7)は凸計画問題であり、適切な手法 (Appendix 4参照) により線形計画問題として扱うことができるため、大域的最適解を求めることが可能である。単一荷重ケース載荷の場合に、問題(7)の最適解は静定トラス、すなわちLaman graphになることが知られている²⁾。よって、第2節のアルゴリズムを適用可能である。

3.3.2 Step2 (冗長性の付与)

Step1で得られた最適トラス構造は静定構造であるため、冗長性を持たない。このStep2ではStep1で得られた最適トポロジーに対して、前節に示した多項式時間 $O(n^2)$ アルゴリズムFind a minimal coveringを用いて2-edge-rigid制約を満たすトポロジーを生成する。ここで、元のアルゴリズムにおける問題点の指摘と修正法をあわせて提案する (以下、修正Find a minimal coveringと呼ぶ)。

元のアルゴリズムでは辺の長さが考慮されていないため、新たな付加辺として辺長の長い辺が選ばれる可能性がある。これは新しく部材を加えたことによる総体積の増加の面から望ましいとは言えない。このような問題点を回避するために、以下の修正を行う。

アルゴリズムFind a covering rooted in i_1 において出力される頂点集合 $\text{Extr}(L)$ は頂点 $j \in V(L)$ の探索順序に依存する¹³⁾。そこで本報ではアルゴリズムFind a covering rooted in i_1 に対し、頂点 $j \in V(L)$ の探索順序を辺 (i_1, j) の辺長が短い順序とする。この修正により、解として得られる付加辺は辺長の短いものから優先して付加辺集合 E' に選択される。

例3 探索順序と辺長の関係について例を用いて以下に説明する。図12(a)に示すLaman graph L を考える。図中に示すように点 i_1 をとり、アルゴリズムFind a covering rooted in i_1 をグラフ L に適用すると、付加辺の候補として i_1 から j_s と j_t を結ぶ2つの辺が候補となる。これらを図示すると図12(b), (c)のようになり、 $L(i_1, j)$ の範囲が共通する組合せが複数存在することになる。 $L(i_1, j_s) = L(i_1, j_t)$ を満たすような2辺 (i_1, j_s) , (i_1, j_t) が存在する場合、点 i_1 との距離が短いものから順に点 j として探索する。図12の例では (i_1, j_s) は (i_1, j_t) よりも短い辺であるため、点 j_s が先に探索される。このような探索順序でアルゴリズムFind a covering rooted in i_1 を実行すると、点 j_t を探索する際に、冗長範囲 $L(i_1, j_t)$ がすでに候補となっている点 j_s に対する冗長範囲 $L(i_1, j_s)$ に含まれる ($L(i_1, j_t) \subseteq L(i_1, j_s)$) ため、点 j_t は出力点集合の候補から除外され、 $\text{Extr}(L)$ に含まれない。従って、解として得られる付加辺は、辺長の短い辺 (i_1, j_s) が優先して付加辺集合 E' に選択される。

以上の修正により、 $|E'|=1$ の場合は最短辺が選択され、 $|E'| \geq 2$ の場合にも辺長が短いものから順に選ばれる。ただし、辺長の総和が最短とは限らず、そのような辺集合を求めるには吉仲・加藤¹¹⁾によって導入されたtight vertexを用いたアルゴリズムが別途必要である。

図12 $L(i, j)$ の範囲が共通する組合せが複数存在する場合

3.3.3 Step3 (元問題の目的関数値の上界を計算する)

本ステップでは、Step2で得られた3つの制約条件 (1) 力の釣合式、(2) 総体積上限値、(4) 2-edge-rigid制約) を満たす許容解に対し、Step1で緩和を行った (3) 各部材の断面積下限値に関する制約条件を再び与え、元問題の4制約を全て満たす許容解を探索する。すなわち、Step1において緩和した2条件を元問題の制約へと緩和を解除した上で、Step2で得られたトラス・トポロジーの下でトラス構造の各部材の最適断面積を決定することを目的とする。最適化問題としては次のように定式化する。

$$\text{Minimize} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{U} \quad (8. a)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i \in I_2} A_i \mathbf{K}_i \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (8. b)$$

$$\sum_{i \in I_2} A_i L_i \leq V^U \quad (8. c)$$

$$A_i \geq A^L \quad (i \in I_2) \quad (8. d)$$

ここに $I_2 \subseteq I_g$ はStep2で得られたトラス・トポロジーに含まれる部材の集合とする。問題(8)は凸計画問題であり、その最適解は元問題の4制約条件 (力の釣合式、総体積上限、各部材の断面積下限値、2-edge-rigid制約) 全てを満たす許容解である。よって、問題(8)の最適解における目的関数値は元問題の目的関数値の上界を与える。

なお、rigidグラフと安定トラスの関係については以下の注意が必要である。グラフとは特定の座標が与えられていない節点と辺の接続関係をモデル化したものであるのに対し、トラスはグラフの概念に節点座標を導入したものである。節点配置がgenericであるとは、各節点座標が代数的に独立であることを指すが、「グラフ G がrigidグラフである」とは、「genericな節点配置に対してはグラフ G に対応するフレームワークがrigidである」ことが知られている¹⁸⁾。

本報では部材破断後のトラスが、グラフとしてみたときにrigidグラフとなることを冗長性の定義としているため、部材破断後に形成されるトラスが荷重を支持できるとは限らない。すなわち、rigidグラフであることは保証されるが、安定トラスであることは保証されない。しかしながら、部材破断後に形成されるトラスにおいて、任意の荷重条件に対して荷重支持能力を保持しなければならないという制約条件を考慮することは可能であり、今後の課題である。

4. 数値解析例

前節において示したアルゴリズムをMATLAB version 8.0 (R2012b)¹⁹⁾により実装し、数値解析を行った。なお、Step1ではCPLEX for MATLAB²⁰⁾をソルバーとしてsimplex法を、Step3ではKNITRO²¹⁾をソルバーとして内点法を用いた。その結果を以下に示す。

4.1 case 1

図13に示すような片持ち梁を考える。左端において2点がピン支承により固定されており、図中の矢印で示した点に対して10kNの鉛直荷重を与える。この設計領域を 10×20 頂点で分割する頂点集合と、それら頂点の全組合せを結ぶ部材集合（部材数19,900）をグラッドストラクチャとして与える（図14）。総体積上限値 V^U を 1.0m^3 、Step3における各部材の断面積の下限值 A^L を 25cm^2 とする。各ステップの解を図15から図17に示す。

図 13 設計領域 (case 1)

図 14 グラッドストラクチャ (case 1)

図 15 Step1 の最適解 (case 1)

図 16 Step2 の解 (case 1)

図 17 Step3 の最適解 (case 1)

Step2で付加された部材を図16において点線で示す。この部材を新たに加えることでトポロジーが2-edge-rigid制約を満たすものとなる。即ち、任意の部材一本を取り除いたとしても安定 (rigid) である。また、図17において各部材の線幅は部材の断面積に比例している。この例ではStep1における最小断面積は $7.57 \times 10^{-1}\text{cm}^2$ 、最大断面積は $4.34 \times 10^2\text{cm}^2$ 、Step3における最小断面積は 25cm^2 、最大断面積は $7.04 \times 10^2\text{cm}^2$ であった。

Step1、Step3それぞれの目的関数値を f_1 , f_3 と表す。それらは3節で述べたように、元問題の最適値の下界と上界に対応する。この例では下界に対する上界の比、すなわち f_3/f_1 の値が1.0108となった。この結果はStep3で得られた最適トラスの鋼材量が、元問題の最適解の鋼材量と高々1%程度しか変わらないことを示す。

上記の数値例において、下界と上界の差は約1%となった。しかしながら、この値は緩和の強さ、すなわち断面積下限制約(7.d)の下限値の値に依存する。図18に A^L をパラメトリックに変化させたときの f_3/f_1 の値を示す。

図 18 目的関数値比 f_3/f_1 と断面積下限値 A^L の関係性

本来は全部材の応力値がある適切な値以下となるように下限値 A^L の値を定めるのが望ましい。応力制約を考慮することにより A^L の値を決定することも可能と考えられ、今後の課題である。

4.2 case 2, case 3 (複数荷重)

図19、図20に示すような複数荷重を与えた場合について検討する。case 1と同様に左端においてピン支持された片持ち梁を考える。矢印で示された載荷点にはそれぞれ10kNの鉛直荷重を与えた。この設計領域を 5×7 頂点で分割する頂点集合と、それら頂点の全組合せを結ぶ部材集合（部材数595）をグラッドストラクチャとして与える。総体積上限値 V^U を $6.7 \times 10^{-1}\text{m}^3$ 、Step3における各部材の断面積の下限值 A^L を 25cm^2 とする。

図 19 グラッドストラクチャと載荷点 (case 2)

図 20 グランドストラクチャと載荷点 (case 3)

それぞれのcaseについて、各ステップの解を下图に示す。

図 21 各ステップにおける解 (case 2)

図 22 各ステップにおける解 (case 3)

図21(b)、図22(b)に示すように、Step2において2-edge-rigidトポロジーの生成のために付加すべき部材の本数はそれぞれ、case 2では2本、case3では3本であった。各caseにおける部材断面積の最小値、最大値を表1に示す。目的関数値については、 f_3/f_1 の値がcase 2では1.0045、case 3では1.0088であり、前節と同様に高々1%程度の差となった。

表 1 部材断面積の最小値、最大値 (cm²)

	case 2		case 3	
	最小値	最大値	最小値	最大値
Step1	1.55×10	8.11×10^2	9.62	4.59×10^2
Step3	2.50×10	6.61×10^2	2.50×10	4.94×10^2

5. 結論

本研究における結論を以下に示す。

1. どの一本の部材を除いてもトラスが不安定構造とならないという2-edge-rigid制約を考慮した、組合せ剛性理論を部分的に用いたトラス・トポロジー最適化の手法を提案した。
2. 上記手法では真の最適解における目的関数値の下界・上界となる近似解が得られる。提案アルゴリズムは、Step1では線形計画問題、Step2では多項式時間 $O(n^2)$ アルゴリズムで許容解の探索、Step3では凸計画問題により解を求めるため、単純な列挙法での計算時間 $O(2^n)$ よりも少ない計算時間で解を求めることができる。

3. 節点数200、部材数19,900のグランドストラクチャを初期値とする解析例においては、下界・上界の差が1%程度となった。ただし、緩和の強さは断面積の下限値の与え方に影響を受ける。

謝辞

本研究はJSPS科研費25240004（研究課題名：建築・都市分野における離散数理基盤の構築と大規模最適化への展開、研究代表者：加藤直樹）の助成を受けて行われた。

参考文献

- 1) 日本建築学会：応用力学シリーズ12 建築構造設計における冗長性とロバスト性、日本建築学会、2013.6
- 2) M. Ohsaki: Optimization of Finite Dimensional Structures, CRC Press, 2010
- 3) Y. Kanno, Y. Ben-Haim: Redundancy and Robustness, or When Is Redundancy Redundant?, Journal of Structural Engineering, Vol. 137, pp.935-945, 2011
- 4) 高田豊文：複数の荷重条件を考慮したトラス・トポロジーの多目的最適化、構造力学講究録、第47号、pp.23-34、日本建築学会近畿支部、2009.2
- 5) 高田豊文：トラス・トポロジー最適化の理論と応用、建築構造力学における最近の発展と展望（その2）、シンポジウム資料、pp.17-28、日本建築学会、2010.1
- 6) 高田豊文：部材破断に対して冗長性を有するトラス構造の最小体積設計に関する研究、日本建築学会大会学術講演梗概集、構造I、pp.305-306、2012.9
- 7) 家永尚明、北川裕馬、荒木慶一、上谷宏二：部材破断の不確定性を考慮したトラス構造物のロバスト最適設計法、日本建築学会大会学術講演梗概集、構造I、pp.843-846、2010.9
- 8) 吉仲祐史、加藤直樹、神山直之：組合せ剛性理論に基づく冗長性を有する剛堅な2次元フレームワークの生成手法、電子情報通信学会総合大会講演論文集 2012_情報・システム(1)、岡山、DS-1.COMP学生シンポジウム、pp.“S-23”-“S-24”、2012.3
- 9) G. Laman: On Graphs and Rigidity of Plane Skeletal Structures, Journal of Engineering Mathematics, Vol.4(4), pp.331-340, 1970
- 10) C. Yu and B. D. O. Anderson, Agent and Link Redundancy for Autonomous Formations, 17th IFAC World Congress, Korea, pp.6584-6589, 2008
- 11) 吉仲祐史、加藤直樹：組合せ剛性理論に基づいた冗長性を有する剛堅な2次元フレームワークの生成手法に関する研究、京都大学修士論文、2012
- 12) Y. Yoshinaka, N. Katoh and N. Kamiyama, Generating Redundantly Rigid Frameworks in 2-dimension, Asian Association for Algorithms and Computation, Shanghai, Computational Geometry, 2012
- 13) A. Garcia and J. Tejel: Augmenting the Rigidity of a Graph in $\mathbb{R}^d$, Algorithmica, Vol.59, pp.145-168, 2011
- 14) A. Lee and I. Streinu: Pebble game algorithms and sparse graphs, Discrete Mathematics, Vol.308, pp.1425-1437, 2008
- 15) Aharon Ben-Tal, Arkadi Nemirovski: Lectures on Modern Convex Optimization, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.1
- 16) M. Ohsaki and N. Katoh: Topology optimization of trusses with stress and local constraints on nodal stability and member intersection, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.29, No.3, pp.190-197, 2005
- 17) M. Ohsaki, N. Katoh, T. Kinoshita, S. Tanigawa, D. Avis and I. Streinu, Enumeration of optimal pin-jointed bistable compliant mechanisms with non-crossing members, Structural and Multidisciplinary Optimization, 37, pp.645-651, 2009
- 18) J. Graver, B. Servatius and H. Servatius, Combinatorial rigidity, Graduate Studies in Mathematics, Vol 2, American Mathematical Society, 1993
- 19) MathWorks: ドキュメンテーション センター
(<http://www.mathworks.co.jp/jp/help/matlab/index.html>) , 2013.8.28参照

- 20) IBM : IBM Support Portal (<http://www-947.ibm.com/support/entry/portal/documentation>), 2013.8.21参照
 21) KNITRO 7.0 User's Manual (http://www.ziena.com/docs/Knitro70_UserManual.pdf), 2013.8.21参照

Appendix 1

頂点数が4以上の完全グラフは、頂点全てを結ぶ2-edge-rigid グラフを部分グラフとして必ず含むことを説明する。以下では n 頂点からなる完全グラフを K_n と表す。完全グラフとは任意の2頂点間に辺が存在するグラフであるため、次式を満たす Laman グラフ L が存在する。

$$V(L) = V(K_n)$$

$$E(L) \subseteq E(K_n)$$

以下での説明のため、いくつか言葉の定義を示す。 $L(i, j) = L(i, j')$ となる extreme vertex j, j' は「等価である」といい、等価な extreme vertex の集合をクラスと呼ぶ。また、Laman グラフ L の部分グラフ L' が $L' = L(i, j)$ を満たす場合、部分グラフ L' は basic であるという。

さて、完全グラフ K_n の Laman 部分グラフ L は、以下の2つの場合に限られる。

1) Laman グラフ L が basic である場合

2) Laman グラフ L が basic でない場合

1) については、上記 basic の定義から、2つの異なるクラスの extreme vertex を結ぶ辺を新たに付加することにより、2-edge-rigid グラフが作成される。また2) について、Garcia and Tejel は、頂点数が4以上の Laman グラフ L が basic でない場合少なくとも3つの（等価でない）extreme vertex クラスを含むことを示しており¹³⁾、さらに L が3つ以上のクラスの extreme vertices を含む basic でない Laman グラフのとき、それらの extreme vertices を結ぶ辺を新たに付加することにより、Laman グラフ L の頂点全てを結ぶ2-edge-rigid グラフを作成できることを証明している（文献13）Lemma 10 参照）。

以上より、頂点数が4以上の完全グラフは、頂点全てを結ぶ2-edge-rigid グラフを部分グラフとして必ず含む。

Appendix 2

補題[1]の証明を以下に示す。

補題[1] L が Laman graph であるとき、次の関係が成り立つ。

$$L(e_1, e_2, \dots, e_k) = L(e_1) \cup L(e_2) \cup \dots \cup L(e_k) \quad (4)$$

（証明）

まず、ある $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ について $e \in L(e_i)$ が成り立つならば、 $e \in L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ が成り立つことを示す。ここで、定義より

$$L(e_i) = \{e \in L \mid \exists L_e \in \mathcal{L} \text{ such that } L_e \subseteq L \cup \{e_i\} - e, V(L_e) = V(L(e_i))\} \quad (A1)$$

$$L(e_1, e_2, \dots, e_k) = \{e \in L \mid \exists L_e \in \mathcal{L} \text{ such that } L_e \subseteq L \cup \{e_1, e_2, \dots, e_k\} - e, V(L_e) = V(L(e_1, e_2, \dots, e_k))\} \quad (A2)$$

と表せることに注意し、 $e \in L(e_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ であれば、 $L \cup \{e_i\} - e$

$\subseteq L \cup \{e_1, e_2, \dots, e_k\} - e$ より $e \in L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ が成り立つ。

次に、 $e \in L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ が成り立つならば、ある $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ について $e \in L(e_i)$ が成り立つことを示す。 $e \in L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ が成り立つとき式 (A2) より $L_e \subseteq L \cup \{e_1, e_2, \dots, e_k\} - e$, $V(L_e) = V(L(e_1, e_2, \dots, e_k))$ を満たす Laman graph L_e が存在する。 L_e には辺集合 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ の中から最小本数 (h とする) の辺が含まれているものとする。

$h=1$ のとき、 L_e には辺集合 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ のうちある1辺 (e_i とする) のみが含まれ、 $L_e \subseteq L \cup \{e_i\} - e$ が成り立つ。よって $e \in L(e_i)$ が成立し、題意は示される。

$h \geq 2$ のとき、 $e' \neq e$ かつ $e' \notin L_e$ を満たす辺 $e' \in L$ が存在する（これは、Laman graph L に辺を t 本加えて冗長性を付与した場合、グラフの安定性を保った状態で付与辺と別の辺を t 本取り除くことができることに起因する）。このとき $L_e \cup \{e'\}$ は唯一の generic circuit $C(e')$ を含む。 L は Laman graph であるため generic circuit を含まないので、辺集合 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ のうち少なくとも1辺 (e_i とする) は $C(e')$ に含まれる。ゆえに $L_e \cup \{e' - e_i$ は e を含まず、かつ辺集合 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ のうち h より少ない本数の辺のみが含まれるような Laman graph となる。しかしこれは h が最小本数であることに反する。よって $h=1$ のみに限られ、 $e \in L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ が成り立つならば、ある $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ について $e \in L(e_i)$ が成り立つ。

以上より、ある $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ について $e \in L(e_i)$ が成り立つならば、 $e \in L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ が成り立ち、その逆も成り立つため、補題[1]は示された。

Appendix 3

Find a minimal coveringを適用するにあたり、 i_1 は extreme vertex でなければならない。このことについて説明する。点 i, j が extreme vertex であれば、冗長範囲 $L(i, j)$ を真に含むような冗長範囲は存在しない。このような $L(i, j)$ を極大な冗長範囲と呼ぶ。Find a covering rooted in i_1 では、Laman graph L に対して $L(i_1, j_2) \cup L(i_1, j_3) \cup \dots \cup L(i_1, j_h) = L$ を満たすような点集合 $\{j_2, j_3, \dots, j_h\} \subset V(L)$ を求めている。もし i_1 は extreme vertex でないとすると、 $L(i_1, j_k)$, $k=2, \dots, h$ は極大な冗長範囲とならないため、より少ない数の冗長範囲の和集合で置き換えられ、最小付加辺数が保証されない。よって i_1 は extreme vertex でなくてはならない。

次に、extreme vertex であるような i_1 を選択するためのアルゴリズムを説明する。点の次数とはその点に接続している辺の本数である。Laman graph L は次数が2または3の点を必ず含む¹³⁾。 L に次数2の点が含まれていれば、その点は必ず extreme vertex になる¹³⁾。よって次数2の点が含まれていればその点を i_1 に選べばよい。次数2の点が存在しない場合は、適当な次数3の点 k を i_1 に選び、Find a covering rooted in i_1 を適用する。得られた $\text{Extr}(L)$ に対し、点 $j_2 \in \text{Extr}(L)$ を新たな i_1 に設定し、Find a minimal coveringを適用すればよい。なぜなら $\text{Extr}(L)$ に含まれる点は必ず extreme vertex になるからである¹³⁾。Find a covering rooted in i_1 とは $L(i, j)$ の和集合がグラフ L 全体を覆うような、extreme vertex の集合を求めるアルゴリズムである。

Appendix 4

問題 (8) は凸計画問題であり、設計変数は各部材断面積 A_i , $i \in I_g$

と節点変位 $\mathbf{U}$ である。この問題は線形計画問題

$$\text{Minimize} \quad -\mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{U}} \quad (\text{A3. a})$$

$$\text{subject to} \quad -1 \leq \sqrt{\frac{\nu^U E}{2}} \frac{\mathbf{b}_i \tilde{\mathbf{U}}}{L_i} \leq 1 \quad (\text{A3. b})$$

に置換えることができる²⁾¹⁵⁾。ここに L_i は部材 i の部材長、 $\mathbf{b}_i$ は部材 i の両端点を結ぶベクトルを部材 i の部材長で除した単位方向ベクトル、 E はヤング係数、 $\tilde{\mathbf{U}}$ は関係式

$$\tilde{\mathbf{U}} = -\frac{f^*}{2} \mathbf{U} \quad (\text{A4})$$

によって $\mathbf{U}$ を基準化したベクトルとする。ただし、 f^* は問題 (A3) の最適解における目的関数値を表す。

(2013年9月10日原稿受理, 2014年1月24日採用決定)