水平単調載荷を受ける天然ゴム系積層ゴムの Haringx 理論に基づく 非線形力学モデル

NONLINEAR MECHANICAL MODEL FOR LAMINATED RUBBER BEARINGS SUBJECTED TO MONOTONIC LOADING BASED ON HARINGX'S THEORY

高岡 栄治*

Eiji TAKAOKA

In this paper, a nonlinear mechanical model for laminated rubber bearings based on Haringx's theory is proposed. In the model, rubber sheets and steel plates constituting a laminated rubber bearing are modeled as rubber elements and steel elements separately, and the model of laminated rubber bearings is constructed interlaminating the two elements. The lateral force-deformation relationship of the rubber element is represented by the stiffness matrix derived from Haringx's theory. The model can express the nonlinear behavior of laminated rubber bearings in the large deformation range by applying nonlinear characteristics to the bending stiffness and shear stiffness of the rubber element, and address the effect of end rotations on the mechanical characteristics of laminated rubber bearings. To verify the accuracy of the model and the validity of the nonlinear characteristics introduced to the bending stiffness, simulation analysis of loading tests using scale models of laminated rubber bearings are carried out. From results of the analysis, it is confirmed that the model can predict the large deformation behavior of laminated rubber bearings.

Keywords: Laminated rubber bearing, Haringx's theory, Large deformation, Nonlinear characteristics

積層ゴム, Haringx 理論, 大変形, 非線形特性

1. はじめに

地震時における建物の終局挙動を把握することは、設計において建物が有する安全余裕度を定量的に評価する上で重要な課題である。これは、一般の耐震建物と比較して安全性が高いとされる免震建物においても同様である。現在、多くの免震建物では主要な免震部材として積層ゴムが使用されている。免震建物では地震時の挙動が免震部材の力学特性に大きく依存することが特徴であり、免震建物の終局挙動を議論する上では、積層ゴムの終局挙動、すなわち、積層ゴムに座屈や破断などの不安定な現象が生じる大変形挙動を正確に把握することが重要となる。積層ゴムの特性に関する古典的な理論としては、Haringx 理論¹⁾が知られている。この理論は、圧縮荷重と水平変形を受ける部材の水平剛性および座屈荷重について考察したもので、その理論式は積層ゴムの特性評価や設計に広く適用されている(例えば²⁾)。しかし、Haringx 理論は材料の線形性を仮定して定式化されているため、大変形を受ける積層ゴムの非線形挙動の評価にそのまま適用することはできない。西村³⁾、⁴⁾は幾何学的非線形を考慮することで Haringx 理論を大変形域に拡張した力学モデルを提案しており、中空孔を有する積層ゴムの実験結果を模擬できることを確認しているが、円形断面積層ゴムへの適用性については十分な検証がなされていない。Haringx 理論に非線形を導入した研究としては、三山⁵⁾が Haringx 理論に基づく剛性方程式に軸力や変位に対する依

存性を考慮した検討を行っている。しかし、積層ゴム端部の回転の影響を評価することを目的としており、大変形域での挙動を対象としたものではない。一方、積層ゴムの大変形挙動を評価することを目的とした力学モデルも提案されている^{6)~10)}。これらのモデルは、Koh 等¹¹⁾が提示した回転ばね、せん断ばねおよび剛体から構成される力学モデルを基本的な構成としており、材料非線形さらに一部モデルでは幾何学的非線形を考慮することで、積層ゴムの大変形挙動を表現することを可能としており、いずれも実験結果との比較によりその妥当性が検証されている。しかしながら、これらのモデルは、構成式における力や変形の幾何学的な関係が複雑であり、せん断、回転および鉛直の各ばねの非線形特性を表す関数パラメータの設定も含めて、取扱いが煩雑になっていることは否めない。

以上の背景の下、本論では、Haringx 理論に基づく積層ゴムの非線形力学モデルを提案する。ここで対象とするのは、積層ゴムの中でも減衰機能を持たない天然ゴム系の積層ゴムであり、また、その適用範囲として一定圧縮荷重下で水平単調載荷を受ける挙動を想定する。提案モデルは積層ゴスをゴム要素と鋼板要素に分割し、分割されたゴム要素を Haringx 理論に基づく剛性マトリクスで表したモデルである。類似の考え方によるモデルは Chang¹²⁾によって提案されており、ゴム一層の厚さや直径が一様でない積層ゴムに対する有効性が確認されている。しかし、要素の材料特性を線形としている

* 鹿島建築管理本部 課長・博士(工学)

Manager, Building Construction Management Division, Kajima Corporation, Dr. Eng.

ため、要素分割による利点が十分に生かされず、大変形に対する検討も行われていない。これに対して、本モデルでは、要素の曲げ剛性とせん断剛性に材料非線形を導入することで大変形域における非線形挙動を表現できることが特徴である。さらに、積層ゴム端部の回転の影響も考慮できることから、積層ゴムに水平変形と回転角が同時に作用する場合の挙動なども評価可能である。本論では、積層ゴム縮小試験体の加力実験を対象とした数値解析を行い、本モデルの精度を検証するとともに、曲げ剛性の非線形特性と実大サイズの積層ゴムへの適用性について検討を行った。

2. 提案モデル

2.1 モデルの概要

積層ゴムは、薄いゴムシートと鋼板を交互に積み重ねた構造となっている。本モデルでは、これらの構成要素をゴム要素および鋼板要素として個別にモデル化し、さらに、2つの要素を交互に直列につないで積層ゴム全体をモデル化している。ゴム要素の力と変形の関係を Haringx 理論から導かれた剛性マトリクスを介して表す。ここでは、積層ゴム全体の剛性マトリクスを作成することを考慮し、要素両端での水平自由度と回転自由度を考慮した剛性マトリクスとした¹³⁾。また、各ゴム要素について、曲げ剛性とせん断剛性の材料非線形を考慮する。本モデルでは、積層ゴムを回転ばねやせん断ばねのモデルに置換することなく、材料の曲げ剛性やせん断剛性の値を直接用いるため、非線形特性を含めて理解しやすいモデルとなっていることが特徴である。一方、鋼板要素については、力と変形の関係を、一般的な骨組構造解析で用いられる曲げせん断要素の剛性マトリクスで表した。

2.2 ゴム要素の剛性マトリクス

要素両端での水平自由度と回転自由度を考慮し、Haringx 理論に基づくゴム要素の剛性マトリクスを導いた¹³⁾。図1に示すように、厚さ t_r のゴムを想定し、両端の節点 (i, j) に圧縮荷重 P 、水平力 Q_i, Q_j 、曲げモーメント M_i, M_j が作用し、水平変位 δ_i, δ_j 、回転角 θ_i, θ_j が生じている状態を考える。ただし、要素両端の平面保持を仮定する。このとき、ゴム内部では、任意高さ z の位置で水平変位 x が生じ、高さ z における平面 ($a-a'$ 面) は回転角 θ で回転し、せん断変形角 γ_s が生じている。また、 $a-a'$ 面には断面力として、曲げモーメント $M(z)$ および回転した面に沿うせん断力 $Q_s(z)$ が生じている。座標系と荷重、断面力、変位および変形の正方向は図1に示す通りである。回転角を微小とすれば、 $a-a'$ 面におけるせん断力および曲げモーメントのつり合いは次式で表される。

$$Q_s(z) = -Q_j + P\theta \quad (1)$$

$$M(z) = M_j - Q_j \cdot z + P(x - \delta_j) \quad (2)$$

せん断力と変形角の関係および曲げモーメントと曲率 $d\theta/dz$ の関係は次式で表される。

$$Q_s(z) = S_s \gamma_s = S_s \left(\frac{dx}{dz} - \theta \right) \quad (3)$$

$$M(z) = -S_b \frac{d\theta}{dz} \quad (4)$$

ここで、 S_s と S_b はせん断剛性と曲げ剛性であり、それぞれ次式で与えられる。

$$S_s = GA \quad (5)$$

$$S_b = E_b I \quad (6)$$

ここで、 G はゴムのせん断弾性係数、 A はゴムの断面積、 I はゴムの断面 2 次モーメント、 E_b は次式で与えられるゴムの圧縮性を考慮した曲げに関するみかけの縦弾性係数である。

$$E_b = \frac{1}{\frac{1}{E_\infty} + \frac{1}{(1 + 2/3 \cdot \kappa \cdot S_1^2) \cdot E}} \quad (7)$$

ここで、 E はゴムの縦弾性係数、 E_∞ はゴムの体積弾性係数、 κ はゴム硬度によって定められる補正係数、 S_1 はゴムの 1 次形状係数 ($= D/(4t_r)$ 、 D はゴムの直径) である。

(1)~(4)式より、以下の微分方程式が導かれる。

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + q^2 x - \frac{q^2}{P} (-M_j + Q_j \cdot z + P\delta_j) = 0 \quad (8)$$

ここで、

$$q^2 = \frac{P}{S_b} \left(1 + \frac{P}{S_s} \right) \quad (9)$$

(8)式の一般解は次式で与えられる。

$$x(z) = C_1 \sin qz + C_2 \cos qz + \frac{1}{P} (-M_j + Q_j \cdot z) + \delta_j \quad (10)$$

C_1, C_2 は積分定数である。(10)式を微分して(3)式に代入し、(1)式を用いて整理すると、次式が得られる。

$$\theta(z) = \frac{1}{1 + \frac{P}{S_s}} (C_1 q \cos qz - C_2 q \sin qz) + \frac{Q_j}{P} \quad (11)$$

要素両端での水平自由度と回転自由度を考慮した境界条件は以下の通りである。

$$z = 0 \text{ のとき} \quad x(0) = \delta_j, \quad \theta(0) = \theta_j$$

$$z = t_r \text{ のとき} \quad x(t_r) = \delta_i, \quad \theta(t_r) = \theta_i$$

図1 ゴム要素における Haringx 理論

図2 鋼板要素の力と変形の関係

両端に作用する水平力と曲げモーメントは以下の関係を満足する。

$$Q_i + Q_j = 0 \quad (12)$$

$$M_i + M_j - Q_j \cdot l_r + P(\delta_i - \delta_j) = 0 \quad (13)$$

(10)、(11)式に上記の境界条件と(12)、(13)式を適用すると、ゴム要素の剛性マトリクスは次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & -k_1 & k_2 \\ & k_3 & -k_2 & k_4 \\ & & k_1 & -k_2 \\ sym. & & & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここで、

$$k_1 = \frac{P^2}{2S_b q \tan \frac{q l_r}{2} - P l_r} \quad (15)$$

$$k_2 = -k_1 \frac{S_b q}{P} \tan \frac{q l_r}{2} \quad (16)$$

$$k_3 = k_1 \left(\frac{S_b q}{P} \tan \frac{q l_r}{2} \right)^2 + \frac{S_b q}{\tan q l_r} \quad (17)$$

$$k_4 = k_1 \left(\frac{S_b q}{P} \tan \frac{q l_r}{2} \right)^2 - \frac{S_b q}{\sin q l_r} \quad (18)$$

2.3 鋼板要素の剛性マトリクス

鋼板要素の力と変形の関係を、一般的な骨組構造解析で用いられる曲げせん断要素の剛性マトリクスで表した。図2に鋼板要素の力と変形の関係を示す。厚さ t_s の鋼板を想定し、両端の節点 (k, l) に水平力 Q_k, Q_l 、曲げモーメント M_k, M_l が作用し、水平変位 δ_k, δ_l 、回転角 θ_k, θ_l が生じている状態を考える。なお、圧縮荷重の影響は考慮していない。鋼板の断面積と断面2次モーメントをゴムと同一とすれば、鋼板要素の剛性マトリクスは次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} Q_k \\ M_k \\ Q_l \\ M_l \end{Bmatrix} = \frac{1}{\frac{t_s^3}{12E_s I} + \frac{t_s}{G_s A}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{t_s}{2} & -1 & -\frac{t_s}{2} \\ \frac{t_s^2}{3} + \frac{E_s I}{G_s A} & \frac{t_s}{2} & \frac{t_s^2}{6} - \frac{E_s I}{G_s A} & \frac{t_s}{2} \\ 1 & \frac{t_s}{2} & -1 & -\frac{t_s}{2} \\ sym. & \frac{t_s^2}{3} + \frac{E_s I}{G_s A} & \frac{t_s}{2} & \frac{t_s^2}{6} - \frac{E_s I}{G_s A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_k \\ \theta_k \\ \delta_l \\ \theta_l \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ここで、 E_s と G_s は鋼材のヤング係数およびせん断弾性係数である。

2.4 計算手順

図3に示すように、両端にゴム要素を配置してゴム要素と鋼板要素を交互に連結し、積層ゴム全体のモデルを構成する。連結した節点において、力の釣り合い条件および変位の連続条件を考慮することにより、(14)式および(19)式で与えられるゴム要素と鋼板要素の剛性マトリクスから、積層ゴム両端の節点 A および B の自由度だけに縮約した剛性マトリクスを作成する。これより、両節点の水平変位 δ_A, δ_B および回転角 θ_A, θ_B を与えれば、それらの水平力 Q_A, Q_B および曲げモーメント M_A, M_B が求められる。さらに、積層ゴム内部の全節点の水平変位、回転角、水平力および曲げモーメントが各要素の剛性マトリクスに基づき順次求められる。なお、全体剛性マトリクスでは積層ゴム両端の節点 A および B の回転自由度を考慮できるので、本モデルは積層ゴムの端部に回転を与えた場合の特性を評価できるモデルとなっている。

3. ゴム要素の非線形特性

3.1 曲げ剛性

積層ゴム両端の回転自由度を固定し、一定の圧縮荷重下で水平変形を与えると、積層ゴムには逆対称の曲げモーメントが生じる。この時、各ゴムシートには圧縮方向の荷重と面外方向の曲げが作用している。ゴム1層を想定したゴムディスクに圧縮荷重と面外曲げを与えた実験によれば、ゴムディスクの曲げ特性は回転角が小さい領域では線形特性を示すが、回転角が大きくなると非線形な特性となり、曲げ剛性が大きく低下することが確認されている¹⁴⁾。積層ゴムが大変形を受けると曲げモーメントが大きくなり、ゴムシートの曲げ特性は非線形の領域に入ることが予想されるので、積層ゴムの大変形特性を表現する上では、ゴム要素の曲げ剛性の非線形特性を適切に評価することが重要となる。

曲げ剛性の非線形特性を設定するために、円形断面のゴムシートを対象とした曲げ解析を行った。図4(a)に示すように、直径が D のゴム断面を n 個の要素に分割し、各要素両端の x 座標を DD_m 及び DD_{m+1} 、要素両端と y 軸のなす角を θ_m 及び θ_{m+1} とする。各要素の面積 A_m 及び中心点 x 座標 DA_m は次式で求められる。

$$A_m = \int_{DD_m}^{DD_{m+1}} 2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} dx = \frac{D^2}{2} \int_{\theta_m}^{\theta_{m+1}} \cos^2 \theta \cdot d\theta = \frac{D^2}{2} \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{1}{2} \theta \right]_{\theta_m}^{\theta_{m+1}} \quad (20)$$

$$DA_m = \frac{DD_m + DD_{m+1}}{2} \quad (21)$$

各要素について断面に直交する方向の応力 σ_m とひずみ ε_m の関係

図3 積層ゴム全体のモデル化

図4 ゴムシートの曲げ解析

を、図 4(b)のように、圧縮側（正側）で線形、引張り側（負側）で完全弾塑性を仮定する。ここで、 σ_y はゴムの引張り降伏応力であり、積層ゴムの引張り特性を考慮し $\sigma_y = -1.0 \text{ MPa}$ とする。ゴムシート断面に一定の圧縮荷重を与えた状態で y 軸周りの回転を与える。平面保持を仮定すれば、 m 番目の要素におけるひずみ ε_m は次式で求められる。

$$\varepsilon_m = \varepsilon_0 + DA_m \cdot \phi \quad (22)$$

ここで、 ε_0 は断面の平均ひずみ、 ϕ は曲率である。 ε_m に対する σ_m を図 4(b)に基づき求め、さらに、圧縮荷重が一定となるように収束計算を行うと、曲げモーメント M が次式によって与えられる。

$$M = \sum_{m=1}^n \sigma_m \cdot A_m \cdot DA_m \quad (23)$$

解析に用いたゴムシートの形状と材料定数を表 1 に示す。形状と材料定数については、後述する数値解析で用いる積層ゴムと同一の値としている。断面の分割数 n は 100 とした。解析では圧縮荷重を一定として曲率を単調に増加させた。圧縮荷重は面圧（＝圧縮荷重／ゴム断面積）として与え、10、20、30 MPa の 3 水準とした。図 5 に解析結果から得られた曲げモーメント M と曲率 ϕ の関係を示す。なお、図中の(24)、(25)式については後述する。これより、 ϕ が小さい領域では、 M は線形的に増加するが、 ϕ が大きくなると、断面端部の要素から順次引張り降伏の領域に入するため、 M の増加が小さくなり非線形な特性となる。ここで得られた曲線形状は、前述したゴムディスクの曲げ特性¹⁴⁾の傾向に概ね対応する。このようなゴムシートの曲げ特性を表現できる曲線式を考慮し、ゴム要素の曲げ剛性の非線形特性として次式を用いることとした⁷⁾。

$$M = \frac{M_y}{\phi_y} \phi \quad (\phi \leq \phi_y) \quad (24)$$

$$M = \left[4 - 3 \left/ \left\{ 1 + \frac{r}{3} \left(\frac{\phi}{\phi_y} - 1 \right) \right\} \right]^{\frac{1}{r}} \cdot M_y \quad (\phi > \phi_y) \quad (25)$$

ここで、 M_y は降伏曲げモーメント、 ϕ_y は降伏曲率であり、それぞれ次式で与えられる。

$$M_y = \frac{\pi D^3}{32} \left(\frac{P}{A} - \sigma_y \right) \quad (26)$$

$$\phi_y = \frac{M_y}{S_b} \quad (27)$$

ここで、 r は曲線形状を規定する関数パラメータである。先に示した図 5 では、 r を 2.3 として場合について、(24)、(25)式を解析結果と比較している。これより、(24)、(25)式は解析結果とよく一致しており、関数パラメータを適切に選定することにより、曲げ剛性の非線形特性を表現し得ることが分かる。なお、以上の関係については、ゴムシートの直径や厚さによらず成立することも確認している。

実際の計算においては、曲げ剛性の非線形特性は各ゴム要素について算定することとし、要素両端の回転角からその要素の曲率を求め、(24)、(25)式より要素の曲げモーメントを計算し、得られた曲げモーメントを曲率で除した割線剛性で与えた。

3.2 セン断剛性

せん断剛性の非線形特性は、圧縮荷重が作用していない場合の積

層ゴム水平特性に基づき設定した。この場合、積層ゴムの水平力 Q_h と水平変形 δ_h の関係は、せん断ひずみ γ （ $=\delta_h/h$ 、 h はゴム総厚）が 250%程度に相当する変形までは概ね線形で、それを超えると水平力のハードニングが生じることが一般的な特徴である。このような性状を次式によって表現することができる⁷⁾。

$$Q_h = GA \left(1 + s_1 \cdot \gamma^{s_2} \right) \gamma \quad (28)$$

ここで、 s_1 と s_2 はハードニングの開始位置と強さを規定する関数パラメータである。せん断剛性の非線形特性は各ゴム要素について同一とし、(28)式より積層ゴム全体の Q_h を求め、これを γ で除した割線剛性で与えることとした。

4. 実験結果の数値解析

4.1 実験概要

提案した力学モデルの妥当性を検証するため、積層ゴム縮小試験体の加力実験¹⁰⁾を対象とした数値解析を実施した。試験体の形状を表 2 に示す。試験体は直径 200mm、せん断弾性係数 G が 0.392MPa

表 1 ゴムシートの形状と材料定数

直径 (mm)	厚さ (mm)	G (MPa)	E (MPa)	E_s (MPa)	κ
200	1.4	0.392	2.2	1200	0.85

図 5 曲げモーメント M と曲率 ϕ の関係

表 2 試験体の形状

試験体 名称	直径 (mm)	ゴム 1 層厚×層数 =ゴム総厚(mm)	内部鋼板厚 (mm)	全高さ (mm)	S_1	S_2
$S_2=5$	200	$1.4 \times 28 = 39.2$	1.0	66.2	35.7	5.10
$S_2=4$	200	$1.4 \times 35 = 49$	1.0	83.0	35.7	4.08

表 3 実験パラメータの水準と試験体

実験種類	せん断ひずみ γ (%)	回転角 Θ (rad)	面圧 σ ($\times \sigma_{cr}$)	試験 体数	σ_{cr} (MPa)
回転角 一定	200	0 0.01 0.02	0 0.25 0.5	$S_2=5$ 1 体	60.1
回転角 連動	200	0 0.01 0.02	0 0.25 0.5	$S_2=5$ 1 体	61.8
限界特性	破断まで	0 0.02 0.05	0 0.25 0.5	$S_2=4$ 9 体	46.6

の天然ゴム系積層ゴムである。1 次形状係数 S_1 は 35.7、2 次形状係数 S_2 ($=D/h$) は 4.08 と 5.10 の 2 ケースとした。面圧 σ 、せん断ひずみ γ 、積層ゴム端部の回転角 Θ を実験パラメータとし、以下の 3 種類の実験を実施した。

回転角一定：面圧と回転角を一定とした状態で繰り返し回数 3 サイクルの正弦波（周期 100s）で水平加力。

回転角運動：面圧一定下において、せん断ひずみ最大時に回転角が最大となるように、回転角をせん断ひずみに対して比例的に変化させた状態で、繰り返し回数 3 サイクルの正弦波（周期 100s）で水平加力。

限界特性：面圧と回転角を一定とした状態で、積層ゴムが破断するまで静的に単調水平加力。

表 3 に実験パラメータの水準と用いた試験体を示す。面圧は積層ゴムの座屈面圧 σ_{cr} に対する倍率で表した。 σ_{cr} は、各試験体について事前に行ったせん断ひずみ 100%の正弦波加力実験に基づき、水平力－水平変形曲線の最大点と最小点を結んだ割線剛性が 0 となる面圧で定義した。求められた σ_{cr} は、 $S_2=5$ 試験体が 60.1MPa および 61.8MPa、 $S_2=4$ 試験体が 46.6MPa（9 体の平均値）である。

4.2 大変形挙動の解析結果

限界特性実験のうち積層ゴム端部の回転角 Θ が 0 のケースについて数値解析を行った。解析に用いた積層ゴムの形状は表 2 に示す通りとし、材料定数は前述した表 1 の値を用いる。せん断剛性の非線形特性を表す関数パラメータ s_1 と s_2 については、面圧が 0 の実験結果における水平力のハードニング性状とよく一致するように定め、それぞれ 0.0014 と 4.5 を与えた。曲げ剛性の非線形特性を表す関数パラメータ r は、前述の検討結果に基づき、2.3 とした。解析では、面圧を一定とした状態でせん断ひずみを 0 から 400%まで増加させた。図 6 に、解析から得られたせん断応力 τ （水平力／ゴム断面積）とせん断ひずみ γ の関係（ $\tau - \gamma$ 曲線）を実験結果と比較して示す。これより、面圧 $0.25 \times \sigma_{cr}$ と面圧 $0.5 \times \sigma_{cr}$ の解析結果は、 γ が大きくなるほど実験結果との乖離が大きくなり、 γ の増加に伴う τ の低下を正確に表現できないことが分かる。そこで、解析結果と実験結果がよく一致するように r を修正し 3.5 とした場合の $\tau - \gamma$ 曲線を図 7 に示す。これより、いずれの面圧についても、実験において見られる負勾配の発生およびその後の γ の増大に伴う τ の低下が、解析によって表現されている。なお、面圧 $0.5 \times \sigma_{cr}$ では、 r が 339%で解析を終了させている。一方、前掲の図 5 では r を 3.5 とした場合の(24)、(25)式を示しているが、いずれの面圧についても、 r が 2.3 の場合と比較して降伏後の曲げモーメントが小さくなっている。これは、積層ゴムのゴム 1 層を拘束する内部鋼板の厚さはゴム 1 層に比較して薄いため、積層ゴムを対象とした解析では、曲げ剛性をゴムシートの曲げ解析から得られる値よりも小さく評価する必要があることを示している。

次に、解析から得られた積層ゴムの変形状態について考察した。図 8、9 に、積層ゴムの水平変位 x と回転角 θ の高さ方向分布を示す。積層ゴム高さは全高さ l で、水平変位はゴム総厚 h でそれぞれ基準化しており、せん断ひずみ 300%と解析終了時（せん断ひずみ 400% および 339%）における結果を示した。図 8 より、解析終了時における水平変位の分布は、せん断ひずみ 300%の分布と比較して逆 S 字型となり、曲げ変形の成分が表れている。この傾向は面圧の大き

図 6 限界特性実験の解析結果（ $\tau - \gamma$ 曲線、 $r=2.3$ 、 $\Theta=0$ ）

図 7 限界特性実験の解析結果（ $\tau - \gamma$ 曲線、 $r=3.5$ 、 $\Theta=0$ ）

図 8 積層ゴムの水平変位分布

図 9 積層ゴムの回転角分布

い $0.5 \times \sigma_{cr}$ においてより明瞭であり、上下端近傍では変形方向にはらみ出すような成分が認められる。また、図 9 より、せん断ひずみ 300% における回転角はいずれの面圧についても 0.05rad 以下であるが、解析終了時には、中央高さにおける最大値が 0.15rad 以上となり、回転角が急増している。すなわち、積層ゴムの水平変形や面圧が大きくなると、図 6 に示したような負勾配や荷重低下などの非線形挙動が生じるとともに、積層ゴムの変形には曲げ変形成分が顕著になることが分かる。なお、ここで示した積層ゴムの変形状態は FEM 解析から得られた結果の傾向とも一致している¹⁵⁾。

Haringx 理論では、微小変形の仮定に基づき回転角を微小として理論解が導かれているが、本モデルでは曲げ剛性に非線形特性を導入しているため、大変形域では回転角が大きくなり回転角を微小と扱えない可能性がある。一方、図 9 によると、解析から得られた回転角は最大でも 0.21rad である。この場合の三角関数の近似による誤差は 2.2% 以下と小さく、本解析の範囲では回転角を微小としても

図 10 ゴム要素番号の定義

図 11 ゴム要素の曲げモーメントと曲率の関係

図 12 ゴム要素の曲率とせん断ひずみの関係

解析結果に与える影響は小さいと推察される。積層ゴムの形状や面圧の違いにより回転角は異なるので、解析の適用範囲を定量的に評価するのは難しいが、回転角が急増するのは、水平力が低下し 0 となる前後であることから、実用上は、本モデルを積層ゴムの大変形挙動の解析に適用しても問題ないと考えられる。

4.3 ゴム要素の非線形特性

前項で実施した限界特性実験の解析結果に基づき、ゴム要素の非線形特性について考察した。図 10 に示すように、ゴム要素の要素番号を積層ゴム端部から数えた順で定義する。図 11 に、要素番号が 1、3、5、7 のゴム要素について曲げモーメント M と曲率 ϕ の関係を示す。図では、各要素の曲線が重複しないように横軸方向に移動させて描いている。また、両面圧について(26)式から計算される降伏曲げモーメント M_y を示している。これより、 ϕ の増加に伴い M は増加しており、いずれの要素についても M が M_y を超え非線形な特性を示すことが分かる。また、要素番号が小さいほど、すなわち、端部に近い要素ほど M が大きくなる傾向が認められる。図 12 に、図 11 のゴム要素にさらに要素番号 9、11、13 を加えたゴム要素について曲率 ϕ とせん断ひずみ γ の関係を示す。図中には、(27)式から計算される降伏曲率 ϕ_y を示している。これより、 γ が大きくなると、各要素の ϕ が大きくなり、最端部のゴム要素(要素番号 1)から順次非線形領域に入っていくことが分かる。また、端部に近い要素ほど γ の増加に対して ϕ は大きく増加しており、同一 γ で比較すると、面圧が大きい $0.5 \times \sigma_{cr}$ の方が ϕ が大きい。いずれの面圧についても、 γ が 100% 付近では要素番号 1 において、 γ が 250% 付近では要素番号 1～11 において ϕ が ϕ_y を超えており、ゴム要素断面に引張り降伏が生じている。すなわち、積層ゴムが水平変形を受けることにより、比較的小さいせん断ひずみ (100%) において最端部のゴム要素で引張り降伏が生じること、また、水平特性が線形特性を示すせん断ひずみ (250%) の範囲においては、最端部から約 30% の厚さに相当するゴム要素で引張り降伏が生じることが指摘できる。なお、引張り変形の生起は積層ゴムの FEM 解析からも知られている現象である^{15), 16)}。積層ゴムに生じる引張り降伏が水平特性に及ぼす影響については、既往実験より、積層ゴムに引張り履歴を与えても、その後の水平剛性はほとんど変化しないことが確認されている¹⁷⁾。よって、ゴム要素の一部に引張り降伏が生じても、積層ゴムの水平剛性が直ちに低下することはないと考えられる。一方、限界性能の把握を目的とした積層ゴムの水平方向多数回繰り返し载荷実験によれば、面圧 15MPa、せん断ひずみ 200% の条件で水平剛性が 8% 低下した結果が得られている¹⁸⁾。このような水平剛性低下のメカニズムは明らかにされていないが、本モデルに当てはめて考えると、ゴム要素が繰り返しの引張り降伏を受けて疲労し、要素の曲げ剛性が低下したという説明も可能である。同様の考え方によれば、積層ゴムが大変形や高面圧を受けると、ゴム要素の曲率が大きくなるので疲労による曲げ剛性の低下が生じやすく、水平剛性の低下が大きくなると予想される。一般的な積層ゴムの設計範囲においては、繰り返しの変形を受けても水平剛性の低下は小さくほとんど問題とならないが、大変形あるいは高面圧の条件については水平剛性に与える影響に留意する必要がある。

4.4 回転角を与えた場合の解析結果

回転角一定実験と回転角連動実験の数値解析を行った。これらの

実験では、せん断ひずみが 200%であり、水平力のハードニングが生じていないことから、せん断剛性の非線形特性は考慮せず線形とした。せん断弾性係数 G については、各実験について、面圧 σ を 0、回転角 Θ を 0 として実施した実験結果と合致するように修正し、それぞれ、0.365MPa および 0.353MPa とした。曲げ剛性の関数パラメータ r は前述した限界特性実験と同じく 3.5 とした。解析は実験の片振幅の範囲についてのみ実施した。図 13、14 に、面圧 $0.25 \times \sigma_{cr}$ について解析と実験の $\tau - \gamma$ 曲線を比較して示す。これより、 Θ が大きくなると、回転角一定実験では曲線全体が τ 軸の負側へ移動しつつその傾きが僅かに小さくなり、回転角運動実験では曲線の傾きが小さくなる。一方、解析結果は実験結果によく一致しており、本モデルによって、回転角を与えた場合の積層ゴムの水平特性を表現し得ることが分かる。回転角一定実験から得られた $\tau - \gamma$ 曲線より、原点と γ が 200%の最大点を結んだ割線剛性で評価した等価せん断弾性係数 G_{eq} を求めた。図 15 に、 G_{eq} と面圧 σ の関係について、解析結果と実験結果を比較して示す。図中には、両端での水平自由度

図 13 回転角一定実験の解析結果 ($\tau - \gamma$ 曲線)

図 14 回転角運動実験の解析結果 ($\tau - \gamma$ 曲線)

図 15 等価せん断弾性係数と面圧の関係 ($\gamma=200\%$)

と回転自由度を考慮した Haringx 理論¹³⁾に基づき評価した結果も併せて示している。これより、実験では Θ が大きくなると σ に対する G_{eq} の低下が大きくなるが、これらの現象が本モデルによって概ね表現されている。Haringx 理論による評価でも Θ が 0 の場合は実験結果とよく一致しているが、 Θ が大きくなると両者の差異が大きくなる傾向が見られる。既往研究では、線形理論に基づく Haringx 理論の適用範囲として積層ゴム端部の回転角 0.01rad かつせん断ひずみ 100%が妥当としている¹⁹⁾。一方、ここで示した結果によれば、Haringx 理論に非線形特性を導入したモデルを用いることで、それらを超える範囲に対しても適用可能であることが分かる。

限界特性実験のうち回転角 Θ として 0.02rad および 0.05rad を与えたケースについても数値解析を行った。関数パラメータは Θ が 0 の場合と同一とした。解析では、せん断ひずみが 0 の状態で所定の回転角を与えた後、せん断ひずみを増加させた。図 16 に、解析結果と実験結果の $\tau - \gamma$ 曲線を比較して示す。これより、両者は非常によく一致しており、本モデルによって、積層ゴム端部に回転角を与えた場合についても、大変形挙動を精度よく表現できることが分かる。

5. 実大積層ゴムへの適用

実大積層ゴムに対する本モデルの適用性を検証するため、実大サイズの積層ゴムを想定した数値解析を実施した。表 4 に解析の対象とした積層ゴムの形状を示す²⁰⁾。直径は 800mm、1000mm、1200mm の 3 ケースで、ゴム総厚を約 200mm で同程度とする。2 次形状係数

図 16 回転角を与えた限界特性実験の解析結果 ($\tau - \gamma$ 曲線)

表 4 解析対象の積層ゴム形状

直径 (mm)	ゴム 1 層厚 (mm)	ゴム 層数	ゴム総厚 (mm)	内部鋼板厚 (mm)	S_1	S_2
800	5.4	37	200	4.4	37.0	4.0
1000	6.7	30	201	4.4	37.3	5.0
1200	8.0	25	200	4.4	37.5	6.0

図 17 実大積層ゴムの解析結果 ($\tau - \gamma$ 曲線)

S_2 はそれぞれ 4.0、5.0、6.0 である。ゴムの材料定数は表 1 の値を用いる。せん断剛性の関数パラメータ s_1 と s_2 については、前述した縮小試験体とせん断弾性係数が等しく、1 次形状係数と 2 次形状係数が同程度であることから水平力のハードニング性状は大きくは変わらないと考え、0.0014 と 4.5 を与えた。曲げ剛性の関数パラメータ r についても縮小試験体の解析結果に基づき 2.3 および 3.5 とした。解析では、面圧 σ を 10、20、30MPa の 3 ケースで一定とした状態で、せん断ひずみを 0 から 400% まで増加させた。図 17 に、解析から得られた $\tau - \gamma$ 曲線を示す。これより、いずれのケースについても σ が大きくなると曲線の傾きが小さくなり、同一 γ における τ が低下する。 S_2 が 6.0 の直径 1200mm では σ の違いによる τ の差は小さいが、直径が小さくなると、すなわち S_2 が小さくなると σ の増加による τ の低下が大きくなり、 S_2 が 4.0 の直径 800mm では 0MPa を除く全ての σ で負勾配が生じている。また、直径が等しいケースを比較すると、 r が大きい 3.5 の方が、 σ の増加に対する τ の低下が大きくなる。面圧の増加に伴い水平剛性が低下すること、また、 S_2 を低減させると変形能力が小さくなることは、積層ゴムの特徴的な復元力特性であり²⁾、本モデルによってそれらの非線形挙動を定性的に表現できることが分かる。ただし、解析結果の精度を評価するためには、実験結果との比較により検証することが望ましい。しかし、実大積層ゴムに大変形を与えた実験例が非常に少なく、検証を行うための実験データが十分に蓄積されていないのが現状である。実大実験結果との比較に基づく解析結果の定量的な評価は今後の課題である。

実大積層ゴムに対する数値解析では、解析精度を高めるために関数パラメータ s_1 と s_2 および r を適切に選定する必要がある。 s_1 と s_2 については、面圧 0 における水平力のハードニング性状と合致するように定めればよい。この種の実験は多くの実績があるので、任意形状の積層ゴムについてハードニング性状を推定することは比較的容易と考えられる。 r は大変形時における τ の低下を表現するパラメータであり、図 17 から分かるように r の値を変化させること

で大変形時における挙動が大きく変動する。解析では r の値として、平面保持を仮定した解析から求めた 2.3 と縮小試験体の実験結果に合致するように曲げ剛性を低下させた 3.5 を用いた。前者は曲げ剛性が最も剛な状態と考えられるので、 r の値としては、2.3 以上の値を実際の曲げ剛性を考慮して適切に設定することになる。 r は積層ゴムの形状や寸法に依存すると推察されるが、様々なサイズの積層ゴムの実験に対する数値解析を繰り返し行い、その範囲を絞り込むことで、さらに解析の信頼性は高まると考えられる。

6. まとめ

積層ゴムの大変形挙動を評価することを目的として、Haringx 理論に基づく積層ゴムの非線形力学モデルを考案した。本モデルの適用対象と適用範囲として、減衰機能を持たない天然ゴム系の積層ゴムが一定圧縮荷重下で水平単調荷重を受けることを想定した。モデルの精度や特性について考察し、以下に示す知見を得た。

- (1) 提案したモデルは、積層ゴムの構成要素であるゴム要素と鋼板要素を個別にモデル化し、2 つの要素を交互に直列につないで積層ゴム全体を構成したモデルである。ゴム要素の力と変形の関係を Haringx 理論から導かれた剛性マトリクスを介して表した。ゴム要素の曲げ剛性とせん断剛性に非線形特性を導入することで大変形域における非線形挙動を表現できること、積層ゴム端部の回転の影響を考慮できること、また、要素分割したことにより、積層ゴムの変形状態や荷重分布を詳細に把握できることが特徴である。
- (2) 提案モデルの妥当性を検証するため、直径 200mm の積層ゴム縮小試験体の水平加力実験を対象とした数値解析を実施した。これより、曲げ剛性の非線形特性をゴムシートの曲げ解析に基づき設定することで、大変形時における負勾配の発生や水平力低下等の挙動を表現できる。また、積層ゴム端部に回転角を与えた場合についても、解析と実験はよく一致しており、大変形挙動を含めた非線形挙動を表現し得ることが分かった。

- (3) 解析結果に基づき、ゴム要素の非線形特性を考察した。積層ゴムの水平変形が大きくなると、曲率が大きくなり、端部に近いゴム要素から順次引張り降伏が生じる。引張り降伏はせん断ひずみ 100%から生じ、250%では端部から厚さで約 30%に相当するゴム要素で引張り降伏が生じた。ただし、積層ゴムに引張り履歴を与えた既往実験によれば、引張り降伏の生起により積層ゴムの水平剛性が直ちに低下することはないと考えられる。一方、水平方向の多数回繰り返し载荷により水平剛性が低下した既往実験例もあり、本モデルによれば、そのメカニズムは引張り履歴に伴うゴム要素の疲労が生じたためと説明できる。同様に考えると、大変形や高面圧の条件下では、ゴム要素の曲率が大きくなるので疲労による曲げ剛性の低下が生じやすく、水平剛性の低下が大きくなると予想される。
- (4) 3 種類の実大サイズの積層ゴムを想定した数値解析を行い、本モデルによって実大積層ゴムについても大変形挙動を定性的に表現できることを確認した。ただし、実大実験との比較による結果の定量的な検証は今後の課題である。実大積層ゴムに対する数値解析の精度は曲げ剛性とせん断剛性の非線形特性の設定に依存する。特に前者については、大変形時の水平力低下を表現できるように、(25)式における関数パラメータ r を選定する必要がある。本論では r の値として、平面保持に基づく 2.3 と実験結果に合致するように曲げ剛性を低下させた 3.5 を用いた。前者は曲げ剛性が最も剛な状態と考えられるので、 r の値としては、2.3 以上の値を実際の曲げ剛性を考慮して適切に設定することになる。 r は積層ゴムの形状や寸法に依存すると推察されるが、様々なサイズの積層ゴムの実験に対する数値解析を繰り返し行い、その範囲を絞り込むことで、解析の信頼性はさらに高まると考えられる。

参考文献

- 1) Haringx, J. A.: On highly compressible helical springs and rubber rods, and their application for vibration-free mountings, Philips Research Reports 3, pp. 401-449, 1948, Philips Research Reports 4, pp. 49-80, pp. 206-220, 1949
- 2) 日本建築学会：免震構造設計指針, pp. 27-37, 2013
- 3) 西村功：幾何学的非線形を考慮した曲げ-せん断部材の座屈後挙動、免震構造用積層ゴム支承の座屈安定性問題への適用、日本建築学会構造系論文、No. 593, pp. 65-72, 2005.7
- 4) 西村功：積層ゴム支承の座屈荷重に与える幾何学的非線形の影響、日本建築学会構造系論文、No. 599, pp. 79-86, 2006.1
- 5) 三山剛史：積層ゴムの上下面に回転角を与えた場合の力学性状に関する研究、日本建築学会構造系論文、No. 556, pp. 43-50, 2002.6
- 6) Nagarajaiah, S. and Ferrell, K.: Stability of elastomeric seismic isolation bearings, Journal of Structural Engineering, Vol. 125, No. 9, pp.946-954, 1999.9
- 7) 飯塚真巨：積層ゴムの大変形挙動をシミュレートする巨視的力学モデル、日本建築学会構造系論文、No. 568, pp. 83-90, 2003.6
- 8) 高岡栄治：積層ゴムの座屈破壊を対象とした免震建物振動台実験のシミュレーション解析、日本建築学会構造系論文、No. 613, pp. 51-57, 2007.3
- 9) 山本祥江、菊地優、越川武晃、上田正生：並列多軸ばねを用いた積層ゴムの大変形挙動解析、日本建築学会構造系論文、No. 618, pp. 81-88, 2007.8
- 10) 高岡栄治、引田真規子、竹中康雄：端部回転を受ける積層ゴムの力学特性、日本建築学会構造系論文、Vol. 75, No. 651, pp. 905-912, 2010.5
- 11) Koh, C. G. and Kelly J. M.: A simple mechanical model for elastomeric bearings used in base isolation, International Journal of Mechanical Science, Vol. 30, No. 12, pp. 933-943, 1988
- 12) Chang, C. H.: Modeling of laminated rubber bearings using an analytical stiffness matrix, International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, Issue 24, pp. 6055-6078, 2002.12
- 13) 飯塚真巨：積層ゴムの剛性マトリクス、Haringx 理論による定式化、日本建築学会大会学術講演梗概集 B-2, pp. 619-620, 1995.8
- 14) 鈴木重信、正木信男、大島靖樹：積層ゴムの曲げ剛性に関する研究 ゴムディスクの曲げ試験、日本建築学会大会学術講演梗概集 B-2, pp. 539-540, 1998.9
- 15) 笠原康宏、関互、深堀美英：免震用積層ゴムの大変形 FEM 解析、その 3 モデル積層ゴムの 3 次元解析と構造設計因子、日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp. 585-586, 1991.9
- 16) 高山峯夫、多田英之：ISOLATOR の有限要素解析、その 3 実大積層ゴムを対象とした解析、日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp. 665-666, 1990.10
- 17) 菊地隆志、芳沢利和、鈴木重信、飯塚真巨、高岡栄治、小椋山雅之：引き抜きを受けた積層ゴムの特性変化について、日本建築学会大会学術講演梗概集 B-2, pp. 539-540, 1997.9
- 18) 日比野浩、高山峯夫、菊地優、飯場正紀：長周期地震動に対する免震部材の多数回繰り返し実験、その 4 天然ゴム系積層ゴムおよび弾性すべり支承（高摩擦）、日本建築学会大会学術講演梗概集 B-2, pp. 661-662, 2011.8
- 19) 高岡栄治、宮田章：杭基礎の柔性を考慮した積層ゴム力学特性の解析的評価、日本建築学会構造系論文、Vol. 77, No. 678, pp. 1219-1226, 2012.8
- 20) 日本免震構造協会：免震部材標準品リスト 2009, 2009.11

(2013年12月9日原稿受理, 2014年4月3日採用決定)