材の中間にばねが1本付いたH形断面柱の弾性座屈荷重

－両端をピン支持されたH形断面部材の弾性座屈荷重と補剛剛性の関係 その1－

ELASTIC BUCKLING STRENGTH OF H-SHAPED BEAM-COLUMN
WHEN BRACING IS ATTACHED AT MIDSPAN OF THE MEMBERRelation between elastic buckling strength and bracing stiffness of H-Shaped
member simply supported at both ends (Part 1)

劉 懋*, 城戸 將江**

Mao LIU and Masae KIDO

This paper is concerned with the effect of the bracing stiffness on the elastic buckling strength of H-shaped members that are subjected to axial force, end moments and uniformly distributed load. The member is simply supported at both ends and discrete or continuous lateral bracing and torsional bracing are attached. The buckling equation is derived by using the Rayleigh-Ritz method. The relation between elastic buckling strength and bracing stiffness are presented when the member is subjected to axial force and end moments when the bracing is attached at the midspan of the member. The relation between the compressive force and the required bracing stiffness in order that the deflection and the torsional angle at the bracing point are zero and the equation to obtain the required bracing stiffness is presented.

Keywords : Flexural buckling, Lateral buckling, Torsional buckling, Flexural-torsional buckling, Bracing, Rayleigh-Ritz method

曲げ座屈, 横座屈, ねじれ座屈, 曲げねじれ座屈, 補剛, Rayleigh-Ritz 法

1. 序論

鋼構造部材の座屈補剛に関しては, 鋼構造設計規準¹⁾, 鋼構造限界状態設計指針²⁾, 鋼構造塑性設計指針³⁾, 鋼構造座屈設計指針⁴⁾にその考えかたと設計法が示されている。

圧縮力と曲げモーメントを受ける柱材の補剛について, 座屈設計指針においては, 「耐力確保のために補剛することはほとんどないものと思われる」と記されているものの, 工場建築などの外柱が圧縮力と強軸曲げモーメントを受ける場合の補剛に関する数値解析に基づき, 補剛点が部材の中間の場合に, 座屈長さが補剛間隔となるために必要な補剛剛性と作用圧縮力の関係を示している。しかし, 示された図は1つの断面と長さに対してのみとなっており限定されている。

軸力と曲げモーメントを受ける部材の補剛に関する研究には, 次のようなものがある。文献5)では, 胴縁で補剛された一定軸力を受けるH形断面柱の弾性曲げねじれ座屈耐力を伝達マトリクス法を用いて解析を行い, 胴縁による補剛効果について検討を行っている。また, 文献6)では, サンドイッチ断面を持つ部材の中央に補剛材がついた場合の座屈条件式をエネルギー法により導出し, 柱の曲げねじれ座屈荷重に及ぼす荷重状態, 補剛条件, サンプナンのねじれ抵抗の影響について検討を行っている。

H形断面部材については, 梁の補剛に関する研究も数多くある。

文献7)では引張側フランジが補剛された, 等モーメントを受け単純支持されたH形鋼梁の横座屈荷重と補剛剛性の関係を示し, 補剛剛性と補剛材に作用する水平補剛力, 補剛モーメントの関係を示している。また, 鋼構造物の座屈に関する諸問題2013⁸⁾の4章「繰返し塑性変形性能を保証する横座屈補剛条件」においても解析や実験結果が示されている。また, 文献9)では, 梁材を対象としながらも, 軸力と等モーメントを受けるH形鋼梁が上フランジ補剛された場合について, 横座屈荷重や横座屈性状に及ぼす荷重条件, 補剛剛性の影響を示している。

しかしながら, 軸力と曲げモーメントを受けるH形断面部材の座屈荷重と補剛剛性の関係については, 断面寸法, 長さなど曲げねじれ座屈に影響を及ぼす因子に対し幅広く検討を行った研究は極めて少ない。

本研究は, 軸力, 端モーメント, 等分布荷重を受ける両端をピン支持されたH形断面部材に離散ばね, 連続ばねが付いた場合の, 一般的な座屈条件式を提示し, 本論文ではその1として, 材の中間に水平拘束ばねあるいは回転拘束ばねが1本付いた場合の, 弾性座屈荷重に関する曲げモーメント－軸力相関関係と, ばね剛性の関係について示すことを目的とする。さらに, 材の中間でのたわみおよびねじれ角を0とするために必要なばね剛性と軸力の関係を示し, 簡便な必要ばね剛性評価式を示す。

* 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科
大学院生・工修

** 北九州市立大学国際環境工学部 准教授・工博

Graduate Student, Graduate School of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, M.Eng.
Associate Professor, Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

2. 解析

2.1 問題の設定と解析モデル

軸力、強軸回りの曲げモーメントを受ける、水平変位あるいは回転を拘束するばねの取付いた H 形断面部材の曲げねじれ座屈荷重を算定する。荷重条件と境界条件を Fig.1(a) に示す。部材の両端はピン支持され、部材の左端には、曲げモーメント M_1 が、右端には $M_2 = \kappa M_1$ (κ は端モーメント比、 $|\kappa| \leq 1$) が作用している。また、軸力（圧縮力のみ）は一定 N で、等分布荷重は w である。ばねは 4 種類で、離散水平拘束ばね、連続水平拘束ばね、離散回転拘束ばね、連続回転拘束ばねで、それぞれの剛性は、 K_{ivd} , K_{vc} , $K_{i\phi d}$, $K_{\phi c}$ である（添え字の i は、ばねの本数）。ここで、離散ばねは 1 本 ($i=1$) あるいは 2 本 ($i=2$) とし、1 本の場合は材の中間に、2 本の場合は 3 分点に取付いている。本研究は、両端ピン支持された場合について検討を行うが、一般的な柱材とは境界条件が異なる。これは最も基本的な境界条件であることと、安全側の評価を得ることができると考えたためである。

Fig.1(b) に、断面図心位置での水平方向のたわみ $v(x)$ とねじれ角 $\phi(x)$ を示す。座標軸は、Fig.1(a) の左端を原点とし材長方向に x 軸をとっている。幾何学的境界条件は、 $v(0) = v(l) = \phi(0) = \phi(l) = 0$ で、力学的境界条件は $v''(0) = v''(l) = \phi''(0) = \phi''(l) = 0$ である。Fig.1(c) において、 h_{0d} と h_{0c} は、断面図心から離散水平拘束ばねあるいは連続水平拘束ばねの取付く位置で、 h_w は等分布荷重の作用位置である。回転拘束ばねは断面図心に描いているが、本研究では、座屈後も断面形状が変わらないと仮定しているため、水平拘束ばねとは異なり断面内での取付く位置は解析結果に影響しない。また、水平拘束ばねと回転拘束ばねはそれぞれ独立している。

本研究では、座屈荷重の正解は得られないため、Rayleigh-Ritz 法を用いて座屈条件式を計算した。

2.2 全ポテンシャルエネルギー

本モデルの全ポテンシャルエネルギーは式(1)で表される。式(1)中の記号 v' , ϕ' , v'' , ϕ'' はそれぞれ $v(x)$ あるいは $\phi(x)$ の x に関する 1 階微分, 2 階微分を表す。

$$\begin{aligned} \Pi[v, \phi] = & \int_0^l \frac{EI_y v''^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(GJ - N \frac{I_y + I_z}{A} \right) \phi'^2 dx + \int_0^l \frac{EI_w \phi''^2}{2} dx \\ & + \int_0^l M v'' \phi dx - \frac{1}{2} \int_0^l N v'^2 dx + \int_0^l \frac{w h_w \phi^2}{2} dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K_{ivd} \{v(x_i) - h_{0d} \phi(x_i)\}^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l K_{vc} (v - h_{0c} \phi)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K_{i\phi d} \phi^2(x_i) + \frac{1}{2} \int_0^l K_{\phi c} \phi^2 dx \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)において、第 1 項は曲げによるひずみエネルギー、第 2 項は軸力の影響を考慮して低減されたサンプナンのねじれによるひずみエネルギー¹⁰⁾、第 3 項は反りによるひずみエネルギー、第 4～6 項は外力によるポテンシャルエネルギーで、外力はそれぞれ曲げモーメント M 、軸力 N 、等分布荷重 w である。残りの 4 項は、離散水平拘束ばね、連続水平拘束ばね、離散回転拘束ばね、連続回転拘束ばねのひずみエネルギーである。式(1)中の諸量は次のとおりである。 l : 材長、 A : 断面積、 I_y および I_z : y 軸および z 軸に関する断面 2 次モーメント、 J : サンプナンのねじり定数、 I_w : 反り定数（鋼構造設計標準では曲げねじり定数）、 E : ヤング係数、 G : セン断弾性係数。また、本論

Fig. 1 Analytical model

文では次の定義を用いている。

$$\begin{aligned} M_e &= \frac{1}{2} N_e d \sqrt{1+R}, N_e = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}, i_0 = \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A}}, m = \frac{M_1}{M_e}, n = \frac{N}{N_e}, \beta = \frac{w l^2}{8 M_1}, \\ \kappa &= \frac{M_2}{M_1}, \eta_{0c} = \frac{h_{0c}}{d}, \eta_{0d} = \frac{h_{0d}}{d}, \eta_w = \frac{h_w}{d}, R = \frac{GJ l^2}{\pi^2 EI_w}, r = \frac{1}{\sqrt{1+R}}, d_{i0} = \frac{i_0}{d}, \\ d_i &= \frac{l}{d} \end{aligned}$$

M_e は、等モーメントを受ける場合の弾性横座屈荷重、 N_e は弱軸回りのオイラーの座屈荷重、 i_0 は断面極 2 次半径、 d は H 形断面のフランジの重心間距離、 m は無次元化座屈モーメント、 n は無次元化座屈軸力、 β は等分布荷重比、 κ は端モーメント比である。

無次元化ばね剛性を下記の通り定義した。

$$1 \text{ 本の離散水平拘束ばね剛性: } k_{1vd} = \frac{K_{1vd} l^3}{16 \pi^2 EI_y} \quad (2)$$

$$2 \text{ 本の離散水平拘束ばね剛性: } k_{2vd} = \frac{2 K_{2vd} l^3}{16 \pi^2 EI_y} \quad (3)$$

$$\text{連続水平拘束ばね剛性: } k_{vc} = \frac{K_{vc} l^4}{16 \pi^2 EI_y} \quad (4)$$

$$1 \text{ 本の離散回転拘束ばね剛性: } k_{1\phi d} = \frac{K_{1\phi d} l}{\pi^2 EI_y} \quad (5)$$

$$2 \text{ 本の離散回転拘束ばね剛性: } k_{2\phi d} = \frac{2 K_{2\phi d} l}{\pi^2 EI_y} \quad (6)$$

$$\text{連続回転拘束ばね剛性: } k_{\phi c} = \frac{K_{\phi c} l^2}{\pi^2 EI_y} \quad (7)$$

水平拘束ばねの無次元化は文献 11) にならった。

2.3 座屈モードの仮定と座屈条件式

幾何学的境界条件ならびに力学的境界条件を満足する座屈モードを次のように仮定した。

$$v(x) = \sum_{i=1}^{m^*} a_i \cdot d \cdot \sin i \pi \xi = d \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \pi \xi \\ \sin 2\pi \xi \\ \vdots \\ \sin m^* \pi \xi \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m^*} b_i \cdot \sin i \pi \xi = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{m^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \pi \xi \\ \sin 2\pi \xi \\ \vdots \\ \sin m^* \pi \xi \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここで、 $\xi \equiv x/l$ である。式(8)および(9)を式(1)に代入すると式(10)が得られる。

$$\Pi(a_1, a_2, \dots, a_{m^*}, b_1, b_2, \dots, b_{m^*}) = \frac{M_e d}{2l} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_{m^*}, b_1, b_2, \dots, b_{m^*})$ である。Rayleigh-Ritz 法に基づき、式(10)を $a_i, b_i (i=1, 2, \dots, m^*)$ で偏微分し、0 とおくと式(11)が得られる。

$$\frac{M_e d}{2l} \times \mathbf{K} \mathbf{a} = \frac{M_e d}{2l} \times \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \mathbf{a} = 0 \quad (11)$$

本研究では、式(10)の算定において式(8)および(9)の m^* を 5 とする (付録 1 に理由を精度の検討とともに示す)。その場合の行列 $\mathbf{K}_{aa}$, $\mathbf{K}_{ab}$, $\mathbf{K}_{ba}$, $\mathbf{K}_{bb}$ は式(12)~(14)で表される。式(11)が自明でない解をもつ条件として、座屈条件式は次のように表される。

$$|\mathbf{K}| = 0 \quad (15)$$

式(12)~(15)からわかるように、座屈荷重 n , m に影響を与えるパラメータは、端モーメント比 κ , 等分布荷重比 β , ばねの位置 η_{0d} , η_{0c} , 等分布荷重作用位置 η_w , 断面寸法や長さに関する諸量 R , d_{01} , d_l である。座屈荷重を陽な式で表すことはできないが、パラメータを設定し数値計算を行うことで、座屈荷重を得ることができる。

3. 解析結果

本論文では、軸力と端モーメントを受ける部材に水平拘束ばねあるいは回転拘束ばねが付いた場合の弾性座屈荷重に関する曲げモー

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{pmatrix} r\{\pi^2(1-n)+16k_{vc}+32k_{1vd}+24k_{2vd}\} & 0 & -32rk_{1vd} & 0 & 8r(4k_{1vd}-3k_{2vd}) \\ 0 & r\{4\pi^2(4-n)+16k_{vc}+24k_{2vd}\} & 0 & -24rk_{2vd} & 0 \\ -32rk_{1vd} & 0 & r\{9\pi^2(9-n)+16k_{vc}+32k_{1vd}\} & 0 & -32rk_{1vd} \\ 0 & -24rk_{2vd} & 0 & r\{16\pi^2(16-n)+16k_{vc}+24k_{2vd}\} & 0 \\ 8r(4k_{1vd}-3k_{2vd}) & 0 & -32rk_{1vd} & 0 & r\{25\pi^2(25-n)+16k_{vc}+32k_{1vd}+24k_{2vd}\} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_{ba}^T = \mathbf{K}_{ab} = \begin{pmatrix} abk_{11} & -\frac{8}{9}m(1+\kappa) & \frac{3}{4}m\beta+32\eta_{0d}rk_{1vd} & -\frac{16}{225}m(1+\kappa) & \frac{5}{36}m\beta-\eta_{0d}r(32k_{1vd}-24k_{2vd}) \\ -\frac{32}{9}m(1+\kappa) & abk_{22} & -\frac{96}{25}m(1+\kappa) & \frac{32}{9}m\beta+24\eta_{0d}rk_{2vd} & -\frac{160}{441}m(1+\kappa) \\ \frac{27}{4}m\beta+32\eta_{0d}rk_{1vd} & -\frac{216}{25}m(1+\kappa) & abk_{33} & -\frac{432}{49}m(1+\kappa) & \frac{135}{16}m\beta+32\eta_{0d}rk_{1vd} \\ -\frac{256}{225}m(1+\kappa) & \frac{128}{9}m\beta+24\eta_{0d}rk_{2vd} & -\frac{768}{49}m(1+\kappa) & abk_{44} & -\frac{1280}{81}m(1+\kappa) \\ \frac{125}{36}m\beta-\eta_{0d}r(32k_{1vd}-24k_{2vd}) & -\frac{1000}{441}m(1+\kappa) & \frac{375}{16}m\beta+32\eta_{0d}rk_{1vd} & -\frac{2000}{81}m(1+\kappa) & abk_{55} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\text{ここで、} abk_{ii} = -\frac{1}{3}m\beta(3+i^2\pi^2) - \frac{1}{4}i^2m\pi^2(1-\kappa) - 8r[2\eta_{0c}k_{vc} + 2\{1+(-1)^{i+1}\}\eta_{0d}k_{1vd} + 3\eta_{0d}k_{2vd}], \quad (i \neq 3)$$

$$abk_{ii} = -\frac{1}{3}m\beta(3+9\pi^2) - \frac{9}{4}m\pi^2(1-\kappa) - 16r(\eta_{0c}k_{vc} + 2\eta_{0d}k_{1vd}), \quad (i = 3)$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \begin{pmatrix} bbk_{11} & 0 & -2r(16\eta_{0d}^2k_{1vd} + d_l^2k_{1\phi d}) & 0 & \frac{1}{2}r(64\eta_{0d}^2k_{1vd} - 48\eta_{0d}^2k_{2vd} + 4d_l^2k_{1\phi d} - 3d_l^2k_{2\phi d}) \\ 0 & bbk_{22} & 0 & -\frac{3}{2}r(16\eta_{0d}^2k_{2vd} + d_l^2k_{2\phi d}) & 0 \\ -2r(16\eta_{0d}^2k_{1vd} + d_l^2k_{1\phi d}) & 0 & bbk_{33} & 0 & -2r(16\eta_{0d}^2k_{1vd} + d_l^2k_{1\phi d}) \\ 0 & -\frac{3}{2}r(16\eta_{0d}^2k_{2vd} + d_l^2k_{2\phi d}) & 0 & bbk_{44} & 0 \\ \frac{1}{2}r(64\eta_{0d}^2k_{1vd} - 48\eta_{0d}^2k_{2vd} + 4d_l^2k_{1\phi d} - 3d_l^2k_{2\phi d}) & 0 & -2r(16\eta_{0d}^2k_{1vd} + d_l^2k_{1\phi d}) & 0 & bbk_{55} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\text{ここで、} bbk_{ii} = r\left[\frac{1}{4}i^2\pi^2(i^2+R) - i^2\pi^2d_{01}^2n + 16\eta_{0c}^2k_{vc} + d_l^2k_{\phi c} + \{1+(-1)^{i+1}\}(16\eta_{0d}^2k_{1vd} + d_l^2k_{1\phi d}) + \frac{3}{2}(16\eta_{0d}^2k_{2vd} + d_l^2k_{2\phi d})\right] + 4m\beta\eta_w, \quad (i \neq 3)$$

$$bbk_{ii} = r\left\{\frac{9}{4}\pi^2(9+R) - 9\pi^2d_{01}^2n + 16\eta_{0c}^2k_{vc} + d_l^2k_{\phi c} + 32\eta_{0d}^2k_{1vd} + 2d_l^2k_{1\phi d}\right\} + 4m\beta\eta_w, \quad (i = 3)$$

メントー軸力相関関係と、ばね剛性の関係について示す。また、ばねの本数は1本の時のみを示す。すなわち、式(12)~(14)で $k_{2vd}=k_{vc}=k_{2hd}=k_{hc}=0$ として計算した。柱材への補剛を考えたとき、補剛材が複数の場合について検討することは重要である。本論文では、ばねが1本のみ解析結果を示しているが、今後は2本あるいはさらにばねの本数が増えた場合、連続ばねの場合についても検討を行う予定としていることから、式(12)~(15)においてばねが2本の場合、連続の場合のばね剛性も含めた座屈条件式とした。また、曲げモーメントー軸力相関関係は、ばねが2本の場合、連続の場合も1本の場合とおおむね同じ傾向を示していることを確認している。ばね本数の影響に関する詳細な検討は今後行うこととする。

Table 1 Section properties and member length

	H-600×200	H-588×300	H-488×300	H-300×300
A (mm ²)	13170	18720	15920	11850
I_z (mm ⁴)	7.56×10^8	1.14×10^9	6.89×10^8	2.02×10^8
I_y (mm ⁴)	2.27×10^7	9.01×10^7	8.11×10^7	6.75×10^7
i_0 (mm)	243	257	220	151
J (mm ³)	9.14×10^5	1.93×10^6	1.37×10^6	7.70×10^5
I_w (mm ⁶)	1.93×10^{12}	7.27×10^{12}	4.48×10^{12}	1.37×10^{12}
l (mm)	6000 16000	6000 16000	6000 16000	6000 16000
λ_y	144 385	86.5 231	84.1 224	79.5 212
R	0.663 4.72	0.372 2.65	0.431 3.06	0.788 5.60

* l , λ_y , R の上段, 下段はそれぞれ対応している。

3.1 解析変数

前章で座屈荷重に影響を与えるパラメータを示したが、 R は断面寸法ならびに材長に関する値で、 d_0 は断面寸法に関する値、 d_l は断面せいならびに材長に関する値である。以上のことより、解析パラメータは次の通りとした。

- 1) 端モーメント比 κ : -1~1
- 2) ばねの位置: $\eta_{0d} = -0.6, 0, 0.6$
- 3) 断面寸法: H-600×200×11×17 (細幅)
H-588×300×12×20 (中幅)
H-488×300×11×18 (中幅)
H-300×300×10×15 (広幅)
- 4) 材長: 6m, 16m
- 5) ばねの種類: 水平拘束ばね, 回転拘束ばね

解析に用いた断面および断面諸量, 材長を Table 1 に示す。材長を座屈長さとした場合の、弱軸に関する細長比 λ_y も示しているが、鋼構造設計規準¹⁾の細長比制限値である 200 を超えているものや、限界細長比 ($=\sqrt{\pi^2 E / (0.6 F)}$, F は基準強度で $F=235 \text{ N/mm}^2$ の時, 限界細長比は約 120) よりも小さい範囲もある。これは、材長一定のほうが比較がしやすいと考えたためである。

3.2 座屈荷重とばね剛性の関係

以下に、弾性座屈荷重に関する無次元化座屈モーメント m と無次元化座屈軸力 n の相関関係を、無次元化ばね剛性をパラメータとして、水平ばねの場合、回転ばねの場合について示す。

3.2.1 水平ばねの場合

(a) 端モーメント比の影響 (Fig.2)

Fig.2 に断面寸法が H-600×200×11×17 で、材長 6m, 水平拘束ばねが1本、材の中間に取付いた場合の、無次元化座屈モーメント m

Fig. 2 m - n interaction (with one lateral bracing at center of the section)

Fig. 3 m - n interaction (with one lateral bracing at upper side and lower side)

と無次元化座屈軸力 n の関係を、無次元化ばね剛性 k_{1vd} をパラメータとして示す。ばねは断面の中央に付いた場合 ($\eta_{0d}=0$) である。Fig.2(a)は端モーメント比 $\kappa=-1$ (等曲げモーメント) の場合を示す。図によれば、ばね剛性が大きくなるにつれ $m-n$ 曲線と座標軸に囲まれる領域は大きくなる傾向にあり、 $m=0$ の場合、 $n=0$ の場合に対しそれぞれ $n=2.39$, $m=3.35$ が最大値となっている。

単純支持された H 形断面柱が圧縮力のみを受ける場合、弱軸あるいは強軸まわりの曲げ座屈かねじれ座屈によって座屈荷重が決定される。 $n=2.39$ はねじれ座屈荷重であり (付録 2 参照), この断面寸法, 材長の場合は, 軸力のみが作用する場合, ばね剛性が大きくなってねじれ座屈荷重以上の軸力にはならないことがわかる。また, 式(2)で定義した無次元化ばね剛性は, 一定軸力を受ける圧縮材に, 材の中間に水平拘束ばねが 1 本取り付いた場合, 2 次の座屈モードとなるために必要な無次元化ばね剛性が 1 となるよう定義されているが, $n=2.39$ となるときのはね剛性 k_{1vd} の最小値は, 0.441 であり 1 より小さい。無次元化座屈モーメント m は, 材長が半分の場合の弾性横座屈荷重 $m=3.35$ が最大値となっている (付録 2 参照)。

図中 LineA は, 補剛位置 (材の中間) で, たわみおよびねじれ角が 0 となる 2 次のモードになっている。図によれば, ばね剛性が大きくなると LineA に一致する部分が大きくなる。

Fig.2(b)は端モーメント比 $\kappa=0$ の場合を示す。Fig.2 (a)と概ね傾向は同じであるが, Fig. (a)の LineA のような明瞭な限界は存在しない。

Fig.2(c)は, $\kappa=1$ の場合を示す。逆対称曲げであり, 補剛位置でねじれが 0 となるモード (図中 modeA) と, 水平変位が 0 となるモード (図中 modeB) がみられる。また, ばね剛性が 0.441 以下では,

高軸力の範囲ではばねの効果がみられるが, 0.441 以上ではすべて modeB となり $m-n$ 曲線は同じになる。

(b) ばねの位置の影響 (Fig.3)

Fig.3 に断面寸法が, H-600×200×11×17 で材長 6m の場合の $m-n$ 関係を, 無次元化ばね剛性 k_{1vd} をパラメータとして示す。ばねがフランジの上側 (圧縮側) に取付いた場合 ($\eta_{0d}=-0.6$) を第 1 象限に, 下側 (引張側) に取付いた場合 ($\eta_{0d}=0.6$) を第 2 象限に示す。柱材に対する補剛としては, 胴縁などが考えられる。ばねの位置 η_{0d} については, 柱材の断面寸法, 補剛材の断面寸法およびその取付き方により決定されるが, ここでは柱のフランジ面に取付いた場合を想定し ± 0.6 とした。

Fig.3(a)によれば, 軸力のみが作用するとき ($m=0$) は, ばね剛性が大きくなるにつれ無次元化座屈軸力 n は大きくなるが, 前項で示したばねが断面の中央に取付いた場合の最大値 $n=2.39$ には到達していない。また, ばねがある場合, 曲げモーメント m が増えるにつれ軸力 n は高くなるが, 再度低下する現象がみられる。例えば, ばね剛性が 0.42 の時を見てみると, $n=2$ のとき異なる 2 つの曲げモーメントが対応している (A_1 , A_2 点)。同じばね剛性で, 同じ軸力のとき, 異なる曲げモーメントが対応しているのは, 座屈モードが異なるためである (付録 3 に A_1 , A_2 点の座屈モードを示す)。これは, Fig.3(b)の $\kappa=0$ の場合も, $m-n$ 曲線はやや異ってはいるが同様であった。

Fig.3(c)の端モーメント比 $\kappa=1$ の場合は, $m=0$ の軸に対して対称の $m-n$ 関係を示しており, $\kappa=-1, 0$ の場合とは異なり, 同じ軸力, ばね剛性に対し 1 つの曲げモーメントの値が対応している。

Fig. 4 $m-n$ interaction (effect of section size and member length)

(c) 断面寸法と材長の影響 (Fig.4)

断面寸法が、中幅 (H-588×300, H-488×300), 広幅 (H-300×300) で、材長 6m, 端モーメント比 $\kappa=-1$ (等曲げ) の場合の m - n 関係を Fig.4(a)に示す。図によれば、断面寸法の違いによる m - n 関係と水平ばね剛性の関係への影響は比較的少なく、Fig.2 (a)と同様の傾向を示しているが、LineA と一致する範囲が生じはじめるときのばね剛性の値 (Fig.(a), (b), (c)においてそれぞれ 4.54, 4.37, 3.61) が異なり広幅のほうが値が小さい。

次に、材長の影響を示すために、断面形が細幅 (H-600×200), 中幅 (H-488×300), 広幅 (H-300×300) で、端モーメント比 $\kappa=-1$ (等曲げ) で材長をそれぞれ $l=16m$ とした場合を Fig.4(b)に示す。図によれば、軸力のみが作用する場合 ($m=0$), 最大の無次元化座屈軸力 n は 4 であり、これは座屈長さ $l/2$ の場合の弱軸まわりの曲げ

座屈荷重である。このように、材長の違いにより、軸力のみが作用する場合に、材長の半分が座屈長さとなる弱軸まわりの曲げ座屈が生じるか、ねじれ座屈が生じるかの違いが m - n 関係に影響を及ぼしている。付録 4 にねじれ座屈になる場合と曲げ座屈となる場合に関する検討を示している。本論文では、 $l=16m$ の場合のように曲げ座屈となる場合を曲げ座屈モードとなる場合、 $l=6m$ の場合のようにねじれ座屈となる場合をねじれ座屈モードとなる場合と呼ぶ。また、 $l=6m$, H-600×200 で、軸力のみを受ける場合は、ばね剛性が $k_{1\phi d}=0.441<1$ で無次元化座屈軸力がそれ以上増加しなかったが、 $l=16m$ の場合は、 $k_{1\phi d}=1$ で $n=4$ となり、それ以上座屈軸力は大きくならない。また、断面寸法の影響は、 $n=0$ で lineA となるときの m の値がやや異なるものの $l=16m$ の場合もそれほど顕著ではない。

Fig. 5 m - n interaction (effect of torsional bracing stiffness)

Fig. 6 Required bracing stiffness for full bracing (lateral bracing)

Fig. 7 Required bracing stiffness for full bracing (torsional bracing)

3.2.2 回転拘束ばねの場合 (Fig.5)

Fig.5 に、H-600×200、 $l=6m$ で回転拘束ばねが 1 本、材の中間に取付いた場合の m - n 関係を示す。圧縮力のみを受ける場合はばね剛性に関わらず無次元化座屈軸力 n は 1 で一定である。また、水平拘束ばねのときと同様に、ばね剛性が大きくなるにつれ m - n 曲線と座標軸に囲まれる領域が大きくなり、 $\kappa=-1$ (Fig.(a)) の場合は補剛位置でたわみ、ねじれ角が 0 となる LineA と一致する範囲が大きくなる。 $\kappa=1$ の場合 (Fig.(c))、補剛位置でねじれが 0 となるモード (図中 modeA) と、水平変位が 0 となるモード (図中 modeB) がみられ、 $k_{1\phi d} \geq 0.156$ ではすべて modeA となり m - n 曲線は同じになる。長さの影響は、水平拘束ばねの時に考察したとおり、軸力のみを受ける場合の座屈に関連しているため、回転拘束ばねのみの場合は影響が少ないものと考えられる。しかし、式(12)～(15)の座屈条件式を見ると、ばね剛性 $k_{1\phi d}$ には、 $d_l^2 = (l/d)^2$ の係数がかかっている。そのため、 l/d の値が大きい場合はばねの効果が大きくなる。したがって、ここでは示していないが、 l/d が大きい場合のほうが同じばね剛性であれば m - n 曲線と座標軸に囲まれる領域が大きくなる。

3.3 フルブレーシングとなるために必要なばね剛性

3.3.1 必要なばね剛性と無次元化座屈軸力の関係

(a) 水平拘束ばねの場合

材の中間に水平拘束ばねが 1 本取付いた場合で、端モーメント比が $\kappa = -1$ の場合に補剛位置でのたわみ、ねじれ角ともに 0 となるモード (Fig.2(a)や Fig.4(a)などで LineA 上になる場合のことで、本論文ではこれをフルブレーシングと呼ぶ) となるために必要なばね剛性 $_{req}k_{1vd}$ を、ばねの位置 η_{0d} をパラメータとして Fig.6 に実線ならびに点線で示す。横軸は無次元化座屈軸力 n を縦軸は必要なばね剛性を示している。なお、補剛位置が下側の場合 (Fig.3 における第 2 象限) は、LineA と一致する部分はないため範囲に含めていない。Fig.(a)、(b)はそれぞれ長さ 6m、16m で、断面が H-600×200、H-300×300 の場合を示す。Fig.6(a-1)中の P_1 、 P_2 、 P_3 および点 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 は、Fig.2(a) および Fig.3(a)中の同じ点と対応し、Fig.6(b-1)中、点 R_1 、 R_2 、 R_3 は、Fig.4(b-1)中の同じ点と対応している。

Fig.6(a)によれば、H-600×200 では $n < 2.65$ の範囲 (Fig.(a-1))、H-300×300 では $n < 2.5$ の範囲 (Fig.(a-2)) において、ばねの位置が断面図心から離れるにつれ必要なばね剛性は減少するが、 η_{0d} が -0.2 以下となると減少の仕方は緩やかになる。また、Fig.(a-1)と(a-2)を比較してみると、細幅断面のほうが、同じばね位置の場合、 $_{req}k_{1vd}$ の値が急激に大きくなる軸力が大きい。Fig.6(b)についても $n < 3.0$ 程度においてはばね位置が中央から遠くなるにつれ $_{req}k_{1vd}$ の値は小さくなっている。また、Fig.(b-1)と(b-2)を比較すると、断面寸法の違いによる影響は顕著ではない。また、ばねが断面中央に取付く場合 ($\eta_{0d}=0$) は、軸力が大きくなるにつれ必要なばね剛性が小さくなるが、ばね

位置が中央から遠くなるにつれ、 n が 4 に近くなると必要なばね剛性が急激に大きくなるのが観察される。また、Fig.(a)と(b)を比較すると、長さが異なると $_{req}k_{1vd}$ と n の関係は異なることがわかる。

(b) 回転拘束ばねの場合

回転拘束ばねの場合の必要なばね剛性 $_{req}k_{1\phi d}$ を Fig. 7 に示す。Fig.7(a)中、点 S_1 、 S_2 、 S_3 は、Fig.5(a)中の同じ点と対応している。回転拘束ばねは、すでに述べたように本論ではばねの断面内の位置には関係しない。したがって、断面寸法をパラメータとして示している。Fig.7(a)が $l=6m$ 、Fig.7(b)が $l=16m$ の場合である。Fig.(a)によれば細幅よりも広幅のほうが必要なばね剛性は小さくなっており、Fig.(b)についても $n < 0.6$ の範囲では同じ傾向であった。これは、3.2.2 項で考察したように回転拘束ばねは $d=l/d$ に影響を受けるため、 d_l の大きい H-300×300 のほうが必要なばね剛性が小さく、 d_l の小さい H-600×200 のほうが必要なばね剛性が大きくなっている。

3.3.2 必要なばね剛性を算定するための評価式

(a) 評価式と精度

ここで、簡便なフルブレーシングとなるときのばね剛性評価式を提案する。フルブレーシングとなる場合の m - n 関係 (LineA) は、次式で表される。

$$m = r\sqrt{(4-n)(4+R-4d_{10}^2n)} \equiv rm_b \quad (16)$$

式(16)と式(8)、(9)の基底を 3 項まで取った場合の座屈条件式を用いると、フルブレーシングとなるために必要なばね剛性は式(17)となる (式(16)中で定義している m_b を式(17)中で用いている)。

式(17)から得られた $_{req}k_{1vd}$ - n 関係を Fig.6 中に●、○印で示している。図によれば、式(17)はばねが断面の中央に取付いた場合 ($\eta_{0d}=0$) は差が比較的大きいが、その他は精度よく評価できていることがわかる。

同様の方法で、回転拘束ばねが材の中間に取付いた場合のフルブレーシングとなるために必要なばね剛性の評価式を求めると、式(18)となる。ただし、回転拘束ばねの場合は式(8)、(9)において 5 項までとっているため Fig.7 と式(18)は一致する。

水平拘束ばねの場合の精度を Fig.8 に示している。縦軸の精度 (Accuracy) は下式で算定した。式中 $_{sreq}k_{1vd}$ は、式(8)、式(9)で 5 項まで取った場合の必要なばね剛性である。

$$\text{精度} = \frac{_{req}k_{1vd} - _{sreq}k_{1vd}}{_{sreq}k_{1vd}} \times 100 \quad (\%) \quad (19)$$

Fig.8(a)は、 $l=6m$ の場合、Fig.8(b)は $l=16m$ の場合である。Fig.(a)によれば、 $\eta_{0d} \geq -0.4$ ではばねの位置が中央から遠くなるにつれ精度がよくなり、 $\eta_{0d} \leq -0.5$ では精度は悪くなる。また、 $\eta_{0d} \leq -0.2$ において精度は 5%以内となっているが、 $\eta_{0d} = -0.05$ 、 -0.1 の場合は精度が悪い。Fig.(b)においては、 $\eta_{0d}=0$ 以外では、ばねが中央から

$$_{req}k_{1vd} = \frac{45\pi^2}{64} \frac{n^2(4d_b^2+1)^2 - 2n(4d_b^2+1)(R+9) + (R+13)(R+5)}{28n^3(4d_b^2+1)(d_b^2+\eta_{0d}^2) - n\{-28m_b\eta_{0d}(4d_b^2+1) + 48d_b^2\eta_{0d}^2 + 56(R+7)d_b^2 + 28(R+14)\eta_{0d}^2 + 7R+3\} - 4m_b\eta_{0d}(7R+95) + 12(R+25)\eta_{0d}^2 + 7R^2 + 98R + 75} \quad (17)$$

$$_{req}k_{1\phi d} = \frac{1575\pi^2}{8d_l^2} \frac{n^3(4d_b^2+1)^3 - n^2(4d_b^2+1)^2(3R+47) + n(4d_b^2+1)(3R^2+94R+587) - (R+29)(R+13)(R+5)}{487n^3(4d_b^2+1)^2 - n^2(4d_b^2+1)\{540d_b^2 + 487(2R+43)\} + n\{1080d_b^2(R+37) + 487R^2 + 21080R + 202600\} - 45(3R^2 + 222R + 3275)} \quad (18)$$

Fig. 8 Accuracy of required stiffness obtained by Eq.(17) compared with the required stiffness obtained by Eq. (15)

遠くなるにつれ精度が悪くなるが、 $\eta_{0d} \geq -0.5$ では5%以内となっている。また、 $n \leq 3.5$ の範囲であれば2%以内となっている。

(b) 修正評価式

上記の評価式において注意すべき点は、軸力が大きくなると急激に必要なばね剛性が大きくなるため、精度が極端に悪くなることである。特に、ねじれ座屈モードとなる場合 (Fig.8 (a)) では、ばねが断面の図心に近い場合は精度が悪い。また、本解析はエネルギー法に基づくため危険側の評価となる。したがって、次式に示すように式(17)に割増係数 1.1 を乗じ、適用範囲を設けた修正必要ばね剛性 $reqk_{1vd}^*$ を用いる。

$$reqk_{1vd}^* = reqk_{1vd} \times 1.1 \quad (20)$$

適用範囲は、下記のとおりとする。

- (1) ねじれ座屈モードとなる場合は、座屈軸力 n はねじれ座屈荷重以下とし、 $\eta_{0d} \geq -0.05$ の場合は $reqk_{1vd} \leq 10$
- (2) 曲げ座屈モードとなる場合は、 $\eta_{0d} \leq -0.3$ の場合は $n \leq 3$

ねじれ座屈モードで、座屈軸力 n をねじれ座屈荷重以下としたのは式(17)では Fig.3(a)の太点線で示す実際には到達しない座屈軸力も設定できてしまうためと、評価を簡便にするためである。(2)の曲げ座屈モードの際は、ねじれ座屈の場合と同様に、ばねの取付く位置が断面中心から離れるとばね剛性を大きくしても $n=4$ とならない場合があるため、Fig.6(b)で示した急激に $reqk_{1vd}$ が上昇する範囲を除外することとした。Fig.9 に、適用範囲(1)のケースになる H-600×200 および H-300×300、 $l=6m$ の場合について、式(20)による必要ばね剛性と軸力の関係および精度を示す。図によれば、 $\eta_{0d}=0$ 、 $reqk_{1vd}=10$ の場合、 $n=1.87$ 、 1.18 でありその時の精度は、3.66%、3.9% となっており、適用範囲内において安全側の評価ができています。

Fig. 9 Relation between n and required bracing stiffness $reqk_{1vd}$ obtained by modified equation (20) and accuracy

なお、実構造物における柱材への補剛については、1980 年版の座屈設計指針¹²⁾の例題で、H 形鋼柱の材中間に補剛材が取付いた場合の補剛材の検定が示されている。その中では、水平拘束ばねとして補剛剛性の算定がなされており、ここには示していないが、Fig.6 に示している範囲の必要剛性以上の値となっている。また、先に述べたように柱材の補剛には胴縁などが考えられるが、文献 5), 13) では、胴縁による柱のねじれに対する拘束を考慮した解析が行われており、胴縁は水平拘束ばねだけでなく回転拘束ばねとしても考えることができる。ただし、通常の胴縁 1 本による回転拘束は比較的小さいため、Fig.7 に示している回転剛性を得るのは難しい。したがって、今後は補剛材の本数を増加させた場合や、水平補剛と回転補剛の両方を考慮した場合に対し研究を行いたいと考えている。

4. 結論

軸力 (圧縮力)、端モーメント、等分布荷重を受け、水平拘束ばねあるいは回転拘束ばねが 1 本、2 本、連続で取付いた場合の、両端をピン支持された H 形断面材の一般的な座屈条件式を Rayleigh-Ritz 法により算定した。水平拘束ばねあるいは回転拘束ばねが材の中間に 1 本取付き、軸力と端モーメントを受ける場合の弾性座屈荷重に関する無次元化座屈モーメント m —無次元化座屈軸力関係 n 相関関係をばね剛性をパラメータとして示した。得られた知見を以下に示す。

- 1) m - n 関係は、材の中間に水平拘束ばねが 1 本取付く場合、端モーメント比 $\kappa=-1$ (等曲げモーメント) の場合はばね剛性が大きくなると補剛位置でたわみが 0、ねじれ角が 0 となるモードになる場合がある。端モーメント比 $\kappa=1$ (逆対称曲げ) の場合は、高軸

力の範囲ではばねの効果がみられるが、ばね剛性がある一定以上となると、補剛点でたわみが 0 となるモードになり m - n 関係は同じになる。

- 2) ばねがフランジの上側（圧縮側）に取付いた場合は 1 つの座屈軸力の値に対し 2 つの座屈モーメントが対応している場合がある。
- 3) 長さが同じ場合は、 m - n 関係におよぼす断面寸法の影響は顕著でない。長さの影響については、軸力のみが作用する場合に、水平ばね剛性が増加した際、材長の半分が座屈長さとなる弱軸まわりの曲げ座屈が生じるか、ねじれ座屈が生じるかの違いが m - n 関係に影響を及ぼしている。
- 4) 回転拘束ばねの場合は、端モーメント比 $\kappa = -1$ の場合は水平拘束ばねの場合と同様に、補剛位置でたわみが 0、ねじれ角が 0 となるモードになる場合があり、端モーメント比 $\kappa = 1$ の場合は、ばね剛性がある一定以上となると、補剛点でねじれ角が 0 となるモードになり m - n 関係は同じになる。
- 5) 水平拘束ばねあるいは回転拘束ばねが部材の中間に 1 本取付く場合で、端モーメント比 $\kappa = -1$ の場合について、補剛位置でのたわみおよびねじれ角ともに 0 となるフルブレーシングとするために必要なばね剛性と無次元化座屈軸力 n の関係を図示するとともに、簡便なばね剛性評価式を適用範囲とともに示した。

謝辞

本研究の一部は、平成 25 年度大学院生渡邊万貴氏の修士論文によるものである。北九州市立大学教授津田恵吾先生には貴重なご助言をいただいた。感謝申し上げます。

参考文献

- 1) 日本建築学会：鋼構造設計標準—許容応力度設計法—，2005.9
- 2) 日本建築学会：鋼構造限界状態設計指針・同解説，2010.2
- 3) 日本建築学会：鋼構造塑性設計指針，2010.2
- 4) 日本建築学会：鋼構造座屈設計指針，2009.11
- 5) 木村潤一，松井千秋：胴縁で補剛された H 形断面柱の弾性曲げねじれ座屈解析，日本建築学会九州支部研究報告，第 29 号，pp.285-288，1986.3
- 6) 津田恵吾，城戸將江：中央で横移動および回転を拘束された柱材の曲げねじれ座屈 サンドイッチ断面柱での考察，日本建築学会構造系論文集，Vol.78，No.684，pp.377-385，2013.2
- 7) 木村祥裕，吉野裕貴：引張側フランジ補剛された H 形鋼梁の横座屈荷重と必要補剛性能，日本建築学会構造系論文集，Vol.76，No.670，pp.2143-2152，2011.12
- 8) 日本建築学会：鋼構造の座屈に関する諸問題 2013，2013.6
- 9) 木村祥裕，松尾健志，吉野裕貴：軸力と等曲げモーメントを受ける上フランジ補剛 H 形鋼梁の弾塑性横座屈応力度評価，日本建築学会構造系論文集，Vol.79，No.703，pp.1299-1308，2014.9
- 10) Theodore V. Galambos（福本啓士，西野文雄訳）：鋼構造部材と骨組—強度と設計—，丸善，1970.10
- 11) 津田恵吾，城戸將江：連続補剛された変軸力材の座屈について，ウェブやスラブで拘束された H 形鋼圧縮フランジの曲げ座屈，日本建築学会構造系論文集，Vol.78，No.690，pp.1513-1521，2013.08
- 12) 日本建築学会：鋼構造座屈設計指針第 1 版，1980.9
- 13) チン ヴァン クアン，井戸田秀樹：複数の胴縁で偏心補剛された H 形鋼柱の座屈耐力と必要補剛剛性，日本建築学会東海支部研究報告書，第 50 号，pp.137-140，2012.2

付録 1 精度の検討

本論では、式(8)、(9)で仮定したたわみおよびねじれ角の基底を、5 項を基

本として解析を行った。回転拘束ばねの場合で、無次元化座屈軸力 n が 0.8、ばね剛性 k_{1bd} が 0.05, 1000 の場合の精度を Fig.A1 に示す。縦軸の m は、式(8)、(9)の項数を i 項としたときの無次元化座屈モーメントで、 γ_m は 7 項としたときの無次元化座屈モーメントである。横軸は、項数 m^* である。図によれば、7 項と 5 項のときの最大の差は Fig. A1(a)の細幅断面の場合は 1.1%、Fig. A1 (b)の広幅断面の場合は 1.4%であった。

したがって、式(8)および(9)において 5 項をとれば十分な精度が得られると考え、本論文では、 $m^*=5$ とした。

付録 2 H-600×200 で $\kappa = -1$ のときの座屈荷重

材長が $l=3m$ 、 $l=6m$ の時の R の値はそれぞれ下式で計算できる。

$$\left. \begin{aligned} R_{l=3} &= \frac{GJl^2}{\pi^2 EI_w} = \frac{78846 \times 9.14 \times 10^5 \times 3000^2}{\pi^2 \times 205000 \times 1.93 \times 10^{12}} = 0.1661 \\ R_{l=6} &= \frac{78846 \times 9.14 \times 10^5 \times 6000^2}{\pi^2 \times 205000 \times 1.93 \times 10^{12}} = 0.6644 \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

ねじれ座屈荷重 P_{crw} は下式で計算できる。

$$P_{crw} = \frac{1}{i_0^2} \left(\frac{\pi^2 EI_w}{l^2} + GJ \right) \quad (A.2)$$

これを弱軸まわりのオイラーの座屈荷重 P_e で無次元化し、無次元化座屈軸力を計算すると、下式となり、Fig.2(a)における n の最大値と一致する。

$$P_{crw}/P_e = \frac{1+R}{4d_0^2} = \frac{1+0.6644}{4 \times (243.1/583)^2} = 2.39 \quad (A.3)$$

等曲げモーメントを受ける場合の横座屈荷重 M_e は、下式で計算できる。

$$M_e = \frac{1}{2} N_e d \sqrt{1+R} \quad (A.4)$$

$l=3m$ のときのオイラーの座屈荷重 N_e は $l=6m$ の場合の 4 倍である。よって、 $l=6m$ の時の横座屈荷重に対する $l=3m$ のときの横座屈荷重の比は次のようになる。

$$\frac{l=3 N_e \sqrt{1+R_{l=3}}}{l=6 N_e \sqrt{1+R_{l=6}}} = 4 \frac{\sqrt{1+0.1661}}{\sqrt{1+0.6644}} = 3.35 \quad (A.5)$$

この値は、Fig.2(a) に示した $\kappa = -1$ （等曲げ）で曲げモーメントのみを受ける場合で、ばね剛性がある一定値（H-600×200 の場合は $k_{1bd}=3.83$ ）以上となったときの m の値と一致する。

(a) H-600×200 (b) H-300×300
Fig. A1 Difference by the number of terms of basis

(a) Point A₁ (b) Point A₂
Fig. A2 Buckling mode at point A₁ and point A₂ in Fig.3(a)

付録 3 水平拘束ばねの位置が断面中央より上の場合の座屈モード

Fig.A2 に、水平拘束ばねの位置が断面中央より上の場合で、Fig.3(a)の点 A₁、A₂ に対応する場合の座屈モードを示す。横軸は材の位置を表している。なお、上フランジ、下フランジのたわみは、式(15)から得られるたわみ $v(\xi)$ にねじれ角 $\phi(\xi)$ に $\pm d/2$ を乗じたものを加え、最大値で基準化したものを示している。図によれば、A₁ 点では上フランジよりも下フランジの変位が大きく、A₂ 点では上フランジのほうが下フランジよりも変位が大きくなっており、ねじれ角が逆になっている。

付録 4 軸力のみを受ける場合の座屈モードに関する検討

軸力のみを受ける H 形断面部材の中間に、1 本水平拘束ばねが取付く場合、ばね剛性が一定以上になると、座屈軸力は、ねじれ座屈荷重あるいは材長の半分を座屈長さとした場合の弱軸回りの曲げ座屈となる。ねじれ座屈荷重を無次元化座屈軸力で表すと式(A.3)となり、これが 4 となる場合が曲げ座屈モード、ねじれ座屈モードの境界になる。したがって、次の条件によって座屈モードが異なる。

曲げ座屈モードとなる場合

$$: 16d_0^2 - R \leq 1$$

(A.6)

ねじれ座屈モードとなる場合

$$: 16d_0^2 - R \geq 1$$

(A.7)

Table A1 Slenderness ratio and Length of members when torsional buckling and bending buckling occur simultaneously

	H-600×200	H-588×300	H-488×300	H-300×300
λ_y	237	214	203	167
$l(\text{mm})$	9833	14813	14459	15101

Table A1 に、 $16d_0^2 - R = 1$ となるときの弱軸に関する細長比 λ_y と材長 l を示す。表によれば、細幅のほうが細長比が大きい。細長比制限値 200 以下となっているのは Table A1 内では、H-300×300 のみである。この表に示された材長より短ければねじれ座屈となり、長ければ曲げ座屈となる。したがって、細長比制限値以下で曲げ座屈となるのは、H-300×300 のみである。

なお、水平拘束ばねが 1 本、材の中間に取付いた場合、ばね剛性が大きくなると細長比制限値 200 において広幅は曲げ座屈に、細幅はねじれ座屈になりやすい。

ELASTIC BUCKLING STRENGTH OF H-SHAPED BEAM-COLUMN WHEN BRACING IS ATTACHED AT MIDSPAN OF THE MEMBER

Relation between elastic buckling strength and bracing stiffness of H-Shaped
member simply supported at both ends (Part 1)

Mao LIU and Masae KIDO***

* Graduate Student, Graduate School of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, M.Eng.

** Associate Professor, Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

1. Introduction

The objective of this study is to present the general buckling equation of the H-shaped member subjected to axial load, end moments and uniformly distributed load with lateral bracing and torsional bracing. The moment - axial force interaction of the elastic buckling strength are shown when the bracing is attached at the midspan of the member. Moreover, the relation between the axial force and bracing stiffness in order that the deflection and the torsional angle at the bracing point are zero and the equations to obtain the required bracing stiffness are presented.

2. Analysis

The analytical model is shown as Fig.1. The H-shaped member is subjected to compressive force, end moments and uniformly distributed load and the lateral bracing or the torsional bracing are attached. The total-potential energy of this model is shown as Eq. (1). The buckling modes are assumed as Eqs. (8) and (9). The analysis is carried out by Rayleigh-Ritz method. The buckling equations are shown as Eq. (12) ~ (15). The symbols m and n are the nondimensional buckling moment and the nondimensional buckling axial force.

3. Results and Discussion

The m - n interactions of the elastic buckling strength are presented when the member is subjected to axial force and end moments and the bracing is attached at the midspan of the member. As the analytical parameters, the end moment ratio κ , the position of the bracing η_{0d} , the size of the cross section, the length of the member and the type of the bracing are selected. The relation between the compressive force and the bracing stiffness are presented when the deflection and the torsional angle at the bracing point are zero. The equations to obtain the required bracing stiffness are shown as Eq. (17) and (18).

4. Conclusions

The conclusions derived from this study are shown as follows:

- 1) When the lateral bracing is attached at the midspan of the member, the deflection and the torsional angle at the bracing point are zero as bracing stiffness increases in case of the end moment ratio $\kappa=-1$ (symmetric end moment, Fig.2(a)). As for the case of $\kappa=1$ (antisymmetric end moment), bracing is effective when the compressive force is large, however, the m - n interaction is same when the bracing stiffness above a certain value (Fig.2(c)).
- 2) There are two different buckling moments for one buckling axial force when the bracing is attached at the compressive flange (Fig.3(a)).
- 3) When the length of the member is same, the effect of the cross section on the m - n interaction is not so remarkable (Fig.4(a)). When the member is subjected to the compressive force only and as the bracing stiffness increases, the flexural buckling around the weak axis whose buckling length equals half of the length of the member or the torsional buckling occurs depending on the length of the member (Fig.4(b)). This affects the m - n interaction.
- 4) About the effect of the torsional bracing, the deflection and the torsional angle at the bracing point are zero as bracing stiffness increases in case of the end moment ratio $\kappa=-1$ (Fig.5(a)).
- 5) When the lateral bracing or the torsional bracing is attached at the midspan of the member, the buckling mode that the deflection and the torsional angle at the bracing point are zero is referred to as full-bracing. The relation between nondimensional buckling axial force and required bracing stiffness for full bracing is presented by Fig.6 and Fig.7. The simple equation to obtain the required bracing stiffness and the scope of the application are presented (Eqs.(17), (18) and (20)).

(2015年1月10日原稿受理, 2015年2月27日採用決定)