レーリーの原理の逆問題型定式化に基づくせん断型構造物の剛性決定法

力学変分原理の逆問題型定式化と構造最適化 その1

STIFFNESS IDENTIFICATION OF SHEAR STRUCTURE
BASED ON INVERSE FORMULATION OF RAYLEIGH'S PRINCIPLE

Inverse formulation of variational principles of mechanics and structural optimization part 1

五十子 幸樹*

Kohju IKAGO

The shape, boundary conditions of the loads and displacements, and distributions of mass and stiffness of a continuum are given in classical variational principles, whereas an inverse variational principle deals with a type of problems where boundary shape is unknown. Another type of inverse formulation of variational principle proposed in this paper is applicable to sizing optimization or a stiffness identification problem. This paper discusses an inverse formulation of Rayleigh's principle that is useful to identify unknown stiffness for a given eigenvalue and eigenmode.

An analytical example is employed to illustrate that the inverse minimum principle of potential energy proposed in this paper is useful in identifying discretized stiffness distribution of a shear structure having designated eigenvalue and eigenmode.

Keywords : *Inverse Problem, Rayleigh's Principle, Variational Principle, Inverse Variational Principle, Stiffness Identification, Shear Structure*

逆問題, レーリーの原理, 変分原理, 逆変分原理, 剛性同定, せん断型構造物

1. はじめに

1.1 研究の背景

力学問題の解析においては, 対象構造物の形状, 材料特性, 境界条件としての荷重条件や支持条件等が与えられ, その結果として生じる変形や支持点反力などの応答量が求められる。しかしながら, これとは逆に, 観測等により構造物の変形状態等が分かっている, 構造物の剛性分布等を同定したいという場合や, 構造物の設計問題において予め望ましい応答性能目標が決まっており, それを満足する剛性分布を設計解として得たいというような場合がある。このように, ある「結果」をもたらす, 「原因」を同定または決定する問題を逆問題と言う。構造工学分野においても, 逆問題は大変に興味あるテーマであり多数の研究がなされてきた。

Horák¹⁾はポテンシャルエネルギーについて, 変位に関する変分に加えて構造物の形状を変分対象とした停留条件が構造物の最適形態や質量分布を与えることを示唆し, そのような変分原理の定式化を逆変分原理(Inverse variational principle)と称した。後に Horák の提案した逆変分原理を基礎理論として, 静的な荷重条件の下で構造物の体積や表面積に関する制約条件下で最大剛性(最小コンプライアンス)を与える最適形状決定問題に関する研究が行われている²⁻⁶⁾。浜田ら⁷⁾は, このような考え方を座屈問題や振動問題に適用し,

構造物の体積制約条件下において, 構造物形状に関する座屈荷重と一次固有値の最大化問題をそれぞれ定式化した。

Gao⁸⁾は有限変形を考慮し, 荷重条件が境界の変形に伴い変化する連続体について Euler 座標系で汎関数を定義して Euler 型の変分原理を導き, これに対して Horák とは違う意味で Inverse variational principle という言葉を用いた。Gao は, この新しい形の変分原理が形状最適化にも適用出来るとしている。以上のように, 逆変分原理という用語は異なる意味で用いられることがあるようだが, これら研究は, 構造物の形状, 荷重条件, 変位境界条件, 質量分布, 剛性分布など順問題では与えられていた条件の一部を変分対象に変更し, 求めるべき未知変数としたという点で, 力学最小原理の逆問題型定式化の試みであると位置づけられる。

次に, 逆問題と力学最小原理の両方に深い関連性を有する構造最適化に関して, 本研究に関連する主な研究を挙げる。Prager and Taylor⁹⁾は, 最小ポテンシャルエネルギーの原理とレーリーの原理を用いて, 静力学, 固有振動, 座屈のそれぞれの問題に対して, 構造物一般化剛性の構造物全体に対する積分量に関する制約条件下における最適剛性設計問題を定式化し, 最適性の必要十分条件が構造物内の単位剛性当たり応答エネルギー分布が一様となることであることを示した。単位剛性当たりの応答エネルギー分布が一様という

* 東北大学災害科学国際研究所 教授・博士(工学)

Prof., International Research Institute of Disaster Science, Tohoku University, Dr. Eng.

ことは、即ち構造物内の歪分布が一様であることを示している。

Nakamura and Yamane¹⁰⁾は、せん断構造物について一次固有値指定条件下における重み付き剛性と最小化問題を定式化し、その解が一次固有モードの層間相対成分が各層剛性重み係数の平方根となるような剛性分布であることを示した。この場合の最適解の導出にはレーリーの原理が用いられている。各層剛性の重み係数が等しい場合、この問題の最適性条件は各層の一次モード層間相対変位が均一であることとなり、Prager and Taylor の示した最適性条件と等価になる。

1.2 研究の目的

このように、力学変分原理の定式化において既知量の一部を未知量に変える逆問題型の定式化と構造最適化に関する研究はそれぞれ個別に発展してきたように見えるが、両者に深い関係があることもまた明らかである。

本稿では、Prager and Taylor の最適化問題の制約条件式に用いられた一般化剛性積分量や、Nakamura and Yamane が定式化した最適化問題の目標関数である重み付き剛性を歪エネルギーという物理的な意味を有する量で置き換えて再定式化すると共に、歪エネルギー最小原理について、既知量と未知量を入れ替えた逆問題型の定式化を提示する。更に、歪エネルギーを制約関数や目標関数として再定式化した構造最適化問題と逆問題型エネルギー変分原理の関係を明らかにする。

1.3 本研究の意義

連続体における力学問題の解法において離散近似解を求める場合、近似解の誤差を Galerkin 法のように重み付き残差で評価して、誤差を最小化するように決定する方法が取られることがあるが、解析対象の問題に対応する力学最小原理がある場合は、近似誤差をエネルギーなどの物理的に意味のある量で評価し、その最小性を力学最小原理により担保することができる。これとは逆に、変形などが既知量として与えられていて、連続体の未知剛性の離散近似解を求めることを考えたとき、近似誤差の最小性を担保する逆問題型の力学変分原理を提示できれば有用であると考えられる。

本稿は、未知剛性を決定する逆問題において、連続体の離散近似解を求める場合の解の妥当性を裏付けるための力学最小原理を提示することを目標とし、一次固有値、一次固有モードが指定された構造物の離散化剛性近似解の導出に有用な新しい逆問題型歪エネルギー最小原理をレーリーの原理の逆問題型定式化に基づき提示する。

7 章の単純例題では、連続体せん断棒に対して、指定された一次固有値と一次固有モードを実現する剛性の離散近似解を導出する方法を示す。その解の妥当性が歪エネルギーの最小性で担保されることが本研究の最大の特徴を例示する。

2. 対象モデルと支配方程式

Fig.1 に示すようなせん断棒モデルを考える。材料のせん断弾性剛性を G 、地盤からの高さ x における水平断面積を $A(x)$ 、時刻 t における水平変位を $y(x, t)$ とし、高さ x における一般化剛性を $s(x) = GA(x)$ 、線密度を $\rho(x)$ と定義する。この構造物は地盤に固定されており $y(0, t) = 0$ である。また構造物の頂部 $x = H$ においては自由端となっているので $s(x)y'(x, t) = 0$ である。ただし、 $(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$ と定義する。この時、この構造物の自由振動方程式はドット $(\cdot)$ が時

間に関する微分を表すものとする、下式で与えられる。

$$\{s(x)y'(x, t)\}' - \rho(x)\ddot{y}(x, t) = 0 \quad (1)$$

ここで、この構造物の一次固有角振動数が ω_0 、一次固有モードが $u(x)$ であるとし、 $y(x, t) = u(x)e^{i\omega_0 t}$ とすると、下式が成り立つ。

$$\{s(x)u'(x)\}' + \omega_0^2 \rho(x)u(x) = 0 \quad (2)$$

ここに、 i は虚数単位である。

Fig.1 Shear beam model

3. レーリーの原理

Fig.1 の構造物の歪エネルギーを $U[s(x), u(x)]$ 、運動エネルギーを $T[\dot{u}(x)]$ で表すこととすると、

$$U[s(x), u(x)] = \frac{1}{2} \int_0^L s(x) \{u'(x)\}^2 dx \quad (3)$$

$$T[\dot{u}(x)] = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \{\dot{u}(x)\}^2 dx \quad (4)$$

ここで、関数を $[\cdot]$ で表現した場合、その関数は汎関数であることを表す。

この時、レーリー商 $R[s(x), u(x)]$ は次式のように書ける。

$$R[s(x), u(x)] = \frac{U[s(x), u(x)]}{T[u(x)]} \quad (5)$$

一般化剛性 $s(x)$ の与える正解の一次固有モードが $\varphi[x, s(x)]$ であるとする。この時、レーリーの原理より運動学的に許容な任意の変位モード $u^*(x)$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$R[s(x), \varphi[x, s(x)]] \leq R[s(x), u^*(x)] \quad (6)$$

上式の等号は $u^*(x) = \varphi[x, s(x)]$ の時成立する。また、一般化剛性 $s(x)$ の与える一次固有値(一次固有角振動数の自乗)を $\Omega[s(x)]$ で表すこととすると、

$$\Omega[s(x)] = R[s(x), \varphi[x, s(x)]] \quad (7)$$

ここで、レーリー商 $R[s(x), u(x)]$ の変分を定式化するために、一般化剛性関数の変分 δs と変位モード関数の変分 δu を微小なスカラー量 τ_s , τ_u と x の関数 $\eta(x)$, $\psi(x)$ との積でそれぞれ次のように定義する。

$$\delta s = \tau_s \eta(x), \quad \delta u = \tau_u \psi(x) \quad (8)$$

ここで関数 $\eta(x)$, $\psi(x)$ は、変分を加えた後の剛性関数 $(s + \delta s)$ と変位モード関数 $(u + \delta u)$ がそれぞれ許容な剛性関数と変位モード関数になるように定めるものとする。変分 δs , δu はその関数形がそれぞれ $\eta(x)$, $\psi(x)$ の関数形と相似するように決められる。これは、多次元のベクトルにおいて方向を定めることの関数への概念的な拡張を意味するので、関数 $\eta(x)$, $\psi(x)$ は変分 δs , δu の「方向」と呼ばれることがあり、本稿でも、そのような表現を用いることとする。

この時、レーリー商 $R[s(x), u(x)]$ の剛性関数 $s(x)$ に関する変分 $\delta_s R[s(x), u(x)]$ と $u(x)$ に関する変分 $\delta_u R[s(x), u(x)]$ は、それぞれ(9), (10)式のようになる。

$$\delta_s R[s, u] = R[s + \delta s, u] - R[s, u] = R[s + \tau_s \eta, u] - R[s, u] \quad (9)$$

$$\delta_u R[s, u] = R[s, u + \delta u] - R[s, u] = R[s, u + \tau_u \psi] - R[s, u] \quad (10)$$

次に、レーリー商 $R[s(x), u(x)]$ の剛性関数 $s(x)$ に関する $\eta(x)$ 方向の微分を、

$$\begin{aligned} d_s R[s(x), u(x); \eta(x)] &= \lim_{\tau_s \rightarrow 0} \frac{\delta_s R[s, u]}{\tau_s} \\ &= \lim_{\tau_s \rightarrow 0} \frac{R[s(x) + \tau_s \eta(x), u(x)] - R[s(x), u(x)]}{\tau_s} \end{aligned} \quad (11)$$

変位モード関数 $u(x)$ に関する $\psi(x)$ 方向の微分を、

$$\begin{aligned} d_u R[s(x), u(x); \psi(x)] &= \lim_{\tau_u \rightarrow 0} \frac{\delta_u R[s, u]}{\tau_u} \\ &= \lim_{\tau_u \rightarrow 0} \frac{R[s(x), u(x) + \tau_u \psi(x)] - R[s(x), u(x)]}{\tau_u} \end{aligned} \quad (12)$$

でそれぞれ定義する。(11), (12)式は Gâteaux 微係数と呼ばれるもので、変分の定式化にしばしば用いられる。Gâteaux 微分では、変分方向を定めておくことで、微係数の計算は通常の微分の法則に基づく計算となるので、連鎖律が利用できる。本稿でもこれ以降で(9), (10)式の代わりに(11), (12)式の Gâteaux 微係数を用い、計算の過程で連鎖律を用いる。

(12)式の $u(x)$ として $\varphi[x, s(x)]$ を代入すると、レーリーの原理よりレーリー商は一般化剛性 $s(x)$ の与える正解の一次固有モード $\varphi[x, s(x)]$ に対して停留するので、

$$\delta_u R[s(x), u(x)] \Big|_{u(x)=\varphi[x, s(x)]} = 0 \quad (13)$$

又は、

$$d_u R[s(x), \varphi[x, s(x)]; \psi(x)] = 0 \quad (14)$$

が成り立つ。

4. 既往の研究

本研究の位置づけを明らかにするために、本研究と関連の深い既往研究について概説する。

4.1 Prager and Taylor の一次固有値最大設計

Prager and Taylor⁹⁾は、構造物一般化剛性の構造物全体に対する積分量を一定値とする制約条件下において固有値を最大化する設計 $s(x)$ を求める最適設計問題を定式化した。このような問題を2章に示したせん断型構造物に対して、(5)式を用いて定式化すると下記のように書ける。

$$\begin{aligned} &\text{maximize}_{s(x)} \quad \min_{u(x)} R[s(x), u(x)] \\ &\text{subject to} \quad \int_0^\ell s(x) dx = \bar{C} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $\bar{C}$ は一般化剛性の構造物全体にわたる積分値を表す定数であり、間接的には構造物コストの指標となるものと考えられる。

レーリーの原理より、レーリー商の変位モード $u(x)$ に関する最小値は $s(x)$ の与える一次固有値 $\Omega[s(x)]$ に他ならないから、(15)式は、次のようにも書ける。

$$\begin{aligned} &\text{maximize}_{s(x)} \quad \Omega[s(x)] \\ &\text{subject to} \quad \int_0^\ell s(x) dx = \bar{C} \end{aligned} \quad (16)$$

この問題の解 $s(x)$ が満たすべき必要十分条件式は、

$$\frac{1}{2} \{\varphi'[x, s(x)]\}^2 = \frac{C^2}{2} \quad (17)$$

の形で表される⁹⁾。ここで、 C は定数である。

(17)式は、一般化剛性 $s(x)$ が与えるモード関数から導かれるせん断歪分布 $\varphi'[x, s(x)]$ が構造物全体にわたって一様であることが最適性の必要十分条件であることを示す。

最終的な設計解は、(17)式を $s(x)$ について解くことで得ることができる。

4.2 Nakamura and Yamane の一次固有値制約剛性と最小設計

Nakamura and Yamane¹⁰⁾は離散せん断型構造物モデルについて、下記に示すような一次固有値制約条件下の重み付き剛性と最小設計問題を定式化した。

【せん断型構造物の一次固有値制約条件下重み付き剛性と最小設計問題】

$$\begin{aligned} &\text{minimize}_{\mathbf{k}} \quad \sum_{j=1}^n \beta_j^2 k_j \\ &\text{subject to} \quad \Omega(\mathbf{k}) = \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 k_j は第 j 層のせん断剛性を、 $\Omega(\mathbf{k})$ は剛性 $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ が与える一次固有値、 $\bar{\Omega}$ は指定一次固有値を表す。

最適解が満たすべき条件は、剛性 $\mathbf{k}$ が与える一次固有モードを、 $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ で表すと、

$$\begin{aligned} u_j &= \beta_j & (j=1) \\ u_j - u_{j-1} &= \beta_j & (j>1) \end{aligned} \quad (19)$$

となり、層間相対変位分布が重み係数の平方根 ($\beta_j > 0$) の分布に一致することとなる。もし、重み係数分布が一樣で全ての j に対して $\beta_j = 1$ ならば、層間相対変位分布が一樣であることとなり、せん断棒モデルに対して Prager and Taylor が得ていた最適解の条件と同等の意味の条件となる。

求めるべき剛性 $\mathbf{k}$ は、(19)式を運動方程式に代入し、それを $\mathbf{k}$ について解くことで次のように得られる¹⁰⁾。

$$k_j = \frac{\bar{\Omega}}{\beta_j} \sum_{r=j}^n m_r \left(\sum_{q=1}^r \beta_q \right) \quad (20)$$

ここに、 m_r は第 r 質点の質量である。

4.3 中村・宮本の剛性積分量最小設計

中村・宮本¹¹⁾は、Fig.1 に示したせん断棒モデルについて、下記のような一次固有値制約条件下の剛性積分量最小設計問題を定式化した。

【せん断棒の一次固有値制約条件下剛性積分量最小設計問題】

$$\begin{aligned} &\underset{s(x)}{\text{minimize}} && \int_0^\ell s(x) dx \\ &\text{subject to} && \Omega[s(x)] = \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (21)$$

$s(x)$ の最適解が満たすべき条件式としては、(17)式と等価な条件が示され、最適解の閉形表現が導出されている。

2 章に示したせん断棒モデルにおいて $\rho(x) = \bar{\rho}$ (一定) の場合、最適解の最適解閉形表現は、

$$s(x) = \frac{\bar{\rho}\bar{\Omega}}{2} (H^2 - x^2) \quad (22)$$

となる¹¹⁾。

5 歪エネルギー制約条件下の一次固有値最大化問題

4.1 節に示した Prager and Taylor の一次固有値最大設計⁹⁾における制約関数は下式の形で表されていた。

$$\int_0^\ell s(x) dx \quad (23)$$

上式の値は間接的にはコストに関与すると考えられるので、これに制約を設けることは間接的にはコストに制約をかけることに対応しているものと考えられるが、直接的には剛性の総量という以上の

意味を有しない。

そこで、(23)式の代わりに、一次モードとして許容なモード関数 $\bar{u}(x)$ を用いて、下式のような歪エネルギーの形の式を用いることを考える。

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell s(x) \{\bar{u}'(x)\}^2 dx \quad (24)$$

ここで、 $\bar{u}(x)$ は観測で得られた一次の変位モード関数または、設計において指定される一次の変位モード関数である。

$\bar{u}(x)$ の大きさ (ノルム) は任意であることから、境界条件 $\bar{u}(0) = 0$ を満足するように $\bar{u}(x) = \sqrt{2x}$ と定めて(24)式に代入すると(23)式と等価になるので、(23)式は(24)式の特殊な場合であると言える。

5.1 最適化問題の定式化

4.1 節に示した Prager and Taylor の一次固有値最大設計における制約関数を(24)式で置き換えた下記の新しい最適設計問題を考える。

【歪エネルギー制約条件下の一次固有値最大化問題】

$$\begin{aligned} &\underset{s(x)}{\text{maximize}} && \Omega[s(x)] \\ &\text{subject to} && \frac{1}{2} \int_0^\ell s(x) \{\bar{u}'(x)\}^2 dx = \bar{C} \end{aligned} \quad (25)$$

この問題では、求めるべき未知量は一般化剛性 $s(x)$ であり、変位モード $\bar{u}(x)$ が既知量として与えられている。本問題では、制約条件は歪エネルギーという物理的意味を有する量となっている。非減衰自由振動では、一次固有モードの歪エネルギー振幅と運動エネルギーの振幅が等しいので、一次固有値を $\bar{\Omega}$ として、

$$\bar{C} = \bar{\Omega} \int_0^\ell \rho(x) \{\bar{u}(x)\}^2 dx \quad (26)$$

としても良い。

5.2 最適性の必要条件

ラグランジュ定数を λ として、ラグランジュ関数を以下のように定義すると、

$$L[s(x), \lambda] = \Omega[s(x)] + \lambda \left[\bar{C} - \int_0^\ell s(x) \{\bar{u}'(x)\}^2 dx \right] \quad (27)$$

歪エネルギー制約条件下の一次固有値最大化の必要条件はラグランジュ関数 $L[s(x), \lambda]$ の停留条件より得られる。

$$\begin{aligned} d_s L[s(x), \lambda; \eta(x)] &= d_s R[s(x), \varphi[x, s(x)]; \eta(x)] \\ &\quad + d_u R[s(x), \varphi[x, s(x)]; d_s \psi(x; \eta(x))] - \lambda \int_0^\ell \{\bar{u}'(x)\}^2 \eta(x) dx \\ &= \int_0^\ell \left\{ \frac{\{\varphi'[x, s]\}^2}{T[\varphi[x, s]]} - \lambda \{\bar{u}'(x)\}^2 \right\} \eta(x) dx \\ &\quad (\because (14) \text{式より } d_u R[s(x), \bar{u}(x); d_s \psi(x; \eta(x))] = 0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

上記より、剛性 $s(x)$ の変分として許容な任意の関数 $\eta(x)$ についてラグランジュ関数が停留するためには、

$$\frac{\{\varphi'[x, s]\}^2}{T[\varphi[x, s]]} = \lambda \{\bar{u}'(x)\}^2 \quad (29)$$

となる必要がある。

ここで、(29)式左辺の分母は定義より

$$T[\varphi[x, s]] = \frac{1}{2} \int \rho(x) \{\varphi[x, s]\}^2 dx \quad (30)$$

であるから、変位モード $\varphi[x, s]$ の重み付き 2 ノルムの自乗という意味も有していることが分かる。即ち、(29)式左辺は変位モード $\varphi[x, s]$ の x に関する導関数を変位モードのノルムで規準化したものの自乗となっている。

従って、(29)式は $\varphi'[x, s]$ の x に関する関数形と、指定モードの導関数 $\bar{u}'(x)$ の関数形が相似であることを表している。

即ち、最適性の必要条件は、

$$\{\varphi'[x, s(x)]\}^2 = \bar{\lambda} \{\bar{u}'(x)\}^2 \quad (31)$$

ただし、

$$\bar{\lambda} = T[s, \varphi[x, s(x)]]\lambda \quad (32)$$

である。

5.3 最適性の十分条件

次に、Prager and Taylor⁹⁾の証明に倣って(31)式が一次固有値最大化の十分条件であることを証明する。一般化剛性 $\bar{s}(x)$ が(31)式を満足する正解の剛性であるとし、任意の許容な一般化剛性 $s(x)$ が次式で表されるものとする。

$$s(x) = \bar{s}(x) + \tau_s \eta(x) \quad (33)$$

まず制約条件より、 $\int_0^\ell s(x) \{u'(x)\}^2 dx = \int_0^\ell \bar{s}(x) \{u'(x)\}^2 dx$ なので、

$$\int_0^\ell \tau_s \eta(x) \{u'(x)\}^2 dx = 0 \quad (34)$$

次に、レーリーの原理より、任意の許容な一般化剛性 $s(x)$ が与える一次モード $\varphi[x, s(x)]$ と、正解の一般化剛性 $\bar{s}(x)$ が与える一次モード $\varphi[x, \bar{s}(x)]$ は異なるモード関数となるので次の不等式が成り立つ。

$$\Omega[s(x)] = R[s(x), \varphi[x, s(x)]] \leq R[s(x), \varphi[x, \bar{s}(x)]] \quad (35)$$

ここで、

$$R[s(x), \varphi[x, \bar{s}(x)]] = R[\bar{s}(x), \varphi[x, \bar{s}(x)]] \quad (36)$$

であることを証明できれば、(35)式の右辺が $\Omega[\bar{s}(x)]$ と等しいことを示したこととなり、

$$\Omega[s(x)] \leq \Omega[\bar{s}(x)] \quad (37)$$

を証明したことになる。(36)式は以下のようにして証明できる。

まず、次の 2 の式を考える。

$$\begin{aligned} R[s, \varphi[x, \bar{s}]] T[\varphi[x, \bar{s}]] &= U[s, \varphi[x, \bar{s}]] \\ &= U[\bar{s}, \varphi[x, \bar{s}]] + \int \tau_s \eta(x) \{\varphi[x, s(x)]\}^2 dx \end{aligned} \quad (38)$$

$$U[\bar{s}, \varphi[x, \bar{s}]] = R[\bar{s}, \varphi[x, \bar{s}]] T[\varphi[x, \bar{s}]] \quad (39)$$

(38)式の左辺と右辺から(39)式の右辺と左辺をそれぞれ引いて、(31)～(34)式を考慮すると、

$$(R[s(x), \varphi[x, \bar{s}(x)]] - R[\bar{s}(x), \varphi[x, \bar{s}(x)]]) T[\varphi[x, \bar{s}(x)]] = 0 \quad (40)$$

となる。 $T[\bar{u}(x)]$ は運動エネルギーであり正の値をとるので、(40)式から(36)式の成立が確かめられ、(37)式が成立することが証明される。以上より、(31)式は一次固有値最大化の十分条件でもあることが分かる。ただし、(37)式の等号が成立するのは $s(x) = \bar{s}(x)$ の時である。

5.4 一次固有モード指定設計との関係

以上より、(31)式は最適性の必要十分条件式である。ここで、

$$\varphi[x, s(x)] = \bar{u}(x) \quad (41)$$

であるならば、一般化剛性 $s(x)$ は最適解となるはずである。

したがって、(25)式で定式化された最適化問題は、予め与えられた変位モード $\bar{u}(x)$ を一次固有モードとして有する一般化剛性 $s(x)$ を決定する問題に他ならない¹¹⁾。

6 歪エネルギー最小原理の逆問題定式化による剛性決定法

(25)式で定式化された最適化問題の制約条件に用いた歪エネルギーにおいては、変位モード関数が固定された既知量として与えられており、一般化剛性関数が未知量であって変化させられるので通常の歪エネルギーの既知量と未知量が入れ替えられた形になっていた。

本章では、既知量と未知量が入れ替えられた歪エネルギーを目標関数とし、一次固有値に関する制約条件下で最小化する問題を定式化し、その解が指定された一次固有モードを与える正解の一般化剛性を与えることを示す。

6.1 一次固有値制約条件下の歪エネルギー最小化問題

変位モード関数 $\bar{u}(x)$ を既知量、一般化剛性 $s(x)$ を未知量として逆問題型に定式化された歪エネルギーを目標関数とし、 $s(x)$ が与える一次固有値 $\Omega[s(x)]$ に関する制約条件を課した下記のような最適設計問題を考える。

【一次固有値制約条件下の歪エネルギー最小化問題】

$$\begin{aligned} & \underset{s(x)}{\text{minimize}} \quad \frac{1}{2} \int_0^\ell s(x) \{\bar{u}'(x)\}^2 dx \\ & \text{subject to} \quad \Omega[s(x)] = \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (42)$$

6.2 最適性の必要条件

ラグランジュ定数を λ^* として、ラグランジュ関数を以下のように定義すると、

$$L^*[s(x), \lambda^*] = \int_0^\ell s(x) \{\bar{u}'(x)\}^2 dx + \lambda^* (\bar{\Omega} - \Omega[s(x)]) \quad (43)$$

一次固有値制約条件下における歪エネルギー最小化の必要条件はラグランジュ関数 $L^*[s(x), \lambda^*]$ の停留条件より得られる。

$$\begin{aligned} d_s L^*[s(x), \lambda^*; \eta(x)] &= \int_0^\ell \{\bar{u}'(x)\}^2 \eta(x) dx \\ &\quad - \lambda^* \{d_s R[s, \varphi[x, s]; \eta] + d_u R[s, \varphi[x, s]; d_s \psi(x; \eta)]\} \\ &= \int_0^\ell \left\{ \{\bar{u}'(x)\}^2 - \lambda^* \frac{\{\varphi'[x, s]\}^2}{T[\varphi[x, s]]} \right\} \eta(x) dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

よって、一般化剛性 $s(x)$ の変分として許容な任意の関数 $\eta(x)$ についてラグランジュ関数が停留するためには、

$$\{\bar{u}'(x)\}^2 = \lambda^* \frac{\{\varphi'[x, s]\}^2}{T[\varphi[x, s]]} \quad (45)$$

となる必要がある。ここで、5.3 節同様モード関数 $\varphi[x, s(x)]$ はモード形を規定するのみで大きさは任意であるから、係数 $\bar{\lambda}^*$ を、

$$\bar{\lambda}^* = \frac{T[\varphi[x, s(x)]]}{\lambda^*} \quad (46)$$

とおくと(45)式は、

$$\{\varphi'[x, s(x)]\}^2 = \bar{\lambda}^* \{\bar{u}'(x)\}^2 \quad (47)$$

となり、(31)式と同じ条件式を得る。

6.3 最適性の十分条件

(47)式の歪エネルギー最小化に対する十分性は下記のように示すことができる。

(47)式を満足する剛性関数を $s(x) = \bar{s}(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} U[s, \bar{u}] &= \int_0^\ell s(x) \{\bar{u}'(x)\}^2 dx \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}^*} \int_0^\ell s(x) \{\varphi'[x, \bar{s}]\}^2 dx \quad (\because (47)\text{式}) \end{aligned} \quad (48)$$

であり、また、

$$\begin{aligned} U[\bar{s}, \bar{u}] &= \int_0^\ell \bar{s}(x) \{\bar{u}'(x)\}^2 dx \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}^*} \int_0^\ell \bar{s}(x) \{\varphi'[x, \bar{s}]\}^2 dx \quad (\because (47)\text{式}) \\ &= \frac{\bar{\Omega}}{\bar{\lambda}^*} \int_0^\ell \rho(x) \{\varphi[x, \bar{s}]\}^2 dx \\ &\quad \left[\because \text{制約条件より, } \bar{\Omega} = \frac{\int_0^\ell \bar{s}(x) \{\varphi'[x, \bar{s}]\}^2 dx}{\int_0^\ell \rho(x) \{\varphi[x, \bar{s}]\}^2 dx} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

となる。ここで、(48)式と(49)式の差をとることを考える。

$$U[s, \bar{u}] - U[\bar{s}, \bar{u}] = \frac{1}{\bar{\lambda}^*} \left[\int_0^\ell s(x) \{\varphi'[x, \bar{s}]\}^2 dx - \bar{\Omega} \int_0^\ell \rho(x) \{\varphi[x, \bar{s}]\}^2 dx \right] \quad (50)$$

ここで、制約条件とレーリーの原理より

$$\bar{\Omega} = R[s, \varphi[x, s]] \leq R[s, \varphi[x, \bar{s}]] \quad (51)$$

なので、これを(50)式に代入すると、

$$\begin{aligned} U[s, \bar{u}] - U[\bar{s}, \bar{u}] &\geq \frac{1}{\bar{\lambda}^*} \left[\int_0^\ell s(x) \{\varphi'[x, \bar{s}]\}^2 dx \right. \\ &\quad \left. - R[s, \varphi[x, \bar{s}]] \int_0^\ell \rho(x) \{\varphi[x, \bar{s}]\}^2 dx \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

よって、

$$U[s, \bar{u}] \geq U[\bar{s}, \bar{u}] \quad (53)$$

であり、上式の等号は $s(x) = \bar{s}(x)$ の時成立する。

以上より、(47)式は一次固有値制約条件下の歪エネルギー最小化の必要十分条件である。

6.4 逆問題型歪エネルギー最小原理

以上より、変位モード関数 $\bar{u}(x)$ を既知量、 $\Omega[s(x)] = \bar{\Omega}$ を満足する一般化剛性 $s(x)$ を未知量として逆問題型に定式化された歪エネルギーは、一次固有モードとして指定された変位モード関数 $\bar{u}(x)$ を与える一般化剛性関数の内 $\Omega[s(x)]$ を満足する正解の $s(x)$ の時最小となる。

ここで定式化した逆問題型歪エネルギー最小原理と、既往研究における既知量と未知量の関係を Table 1 に纏める。

7. 例題

前章で提示した逆問題型歪エネルギー最小原理は、一次固有値と一次固有モードが指定された連続体構造物一般化剛性分布の離散近似解を得るのに有効な方法であると考えられる。

本章では、4.2 節に示したせん断棒の剛性積分量最小設計問題に対して、逆問題型歪エネルギー最小原理を適用することで離散近似解が得られることを示す。

7.1 せん断棒の離散モデル化

Fig.1 のモデルについて、高さ $H = 100$ m, 線密度 $\rho(x) = 1000$ t/m, 一次固有周期を $T = 3$ s とする。この時一次固有値は $\bar{\Omega} = (2\pi / T)^2$

Table 1 既知量と未知量の関係

	既知量	未知量又は 変分対象量
ポテンシャルエネルギー最小原理	剛性分布, 形状, 質量分布, 変位境界条件, 荷重境界条件	<u>変位</u>
レーリーの原理	剛性分布, 形状, 質量分布, 変位境界条件	<u>変位モード</u>
Horák ¹⁾	材料, 変位境界条件, 荷重 境界条件	<u>変位</u> , 境界形 状 (剛性), 質量分布
Gao ⁸⁾	剛性分布, 初期形状, 変位境界条件	<u>変位</u> , 非線形 性により荷 重境界条件 が変化
Prager, Taylor ⁹⁾	形状, 非構造質量分布, 変位境界条件, 一般化剛性積分量	<u>一般化剛性</u>
Nakamura, Yamane ¹⁰⁾	形状, 非構造質量分布, 変位境界条件, 一次固有値	<u>層剛性</u>
中村・宮本 ¹¹⁾	形状, 非構造質量分布, 変位境界条件, 一次固有値	断面積分布 (<u>剛性分布</u>)
本研究	形状, 非構造質量分布, 変位境界条件, <u>変位モード</u> , 一次固有値	<u>一般化剛性</u>

Fig.2 Discretized model of shear beam

Fig.3 Finite element model

= 4.39 である. この連続体モデルを Fig.2 に示すような 5 質点系に離散化する. 高さ H は 5 等分され, $\Delta H = 20$ である. 下部固定端から順に頂部まで 0~5 番までの節点番号を付け, 第 j 節点の座標を x_j で表す. 各節点における剛性, 変位は下添え字に節点番号を付して表すものとする.

$$s_j = s(x_j), \quad u_j = u(x_j) \quad (54)$$

第 $j-1$ 節点と第 j 節点を結ぶ要素を第 j 要素と呼ぶ(Fig. 3).

また, 要素内の変位と剛性は線形的に変化するものとする. 即ち,

$$u(x) = u_{j-1} + \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta H}(x - x_{j-1}) \quad (55)$$

$$s(x) = s_{j-1} + \frac{s_j - s_{j-1}}{\Delta H}(x - x_{j-1}) \quad (56)$$

第 j 要素の歪みエネルギーと運動エネルギーをそれぞれ, U_j , T_j とおくと,

$$U_j = \frac{1}{2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ s_{j-1} + \frac{s_j - s_{j-1}}{\Delta H}(x - x_{j-1}) \right\} \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta H} \right)^2 dx \quad (57)$$

$$T_j = \frac{1}{2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \bar{\rho} \left\{ \dot{u}_{j-1} + \frac{\dot{u}_j - \dot{u}_{j-1}}{\Delta H}(x - x_{j-1}) \right\}^2 dx \quad (58)$$

離散化モデル第 j 要素の整合質量行列 $\mathbf{M}_j$ と剛性行列 $\mathbf{K}_j$ は下記のようになる.

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{u}_{j-1}^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{u}_{j-1} \partial \dot{u}_j} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{u}_j \partial \dot{u}_{j-1}} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{u}_j^2} \end{bmatrix} = \frac{\rho \Delta H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U_j}{\partial u_{j-1}^2} & \frac{\partial^2 U_j}{\partial u_{j-1} \partial u_j} \\ \frac{\partial^2 U_j}{\partial u_j \partial u_{j-1}} & \frac{\partial^2 U_j}{\partial u_j^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta H} \begin{bmatrix} s_{j-1} + s_j & -s_{j-1} - s_j \\ -s_{j-1} - s_j & s_{j-1} + s_j \end{bmatrix} \quad (60)$$

従って, 全体整合質量行列 $\mathbf{M}$ と全体剛性行列 $\mathbf{K}$ は,

$$\mathbf{M} = \frac{\rho \Delta H}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2\Delta H} \begin{bmatrix} s_0 + 2s_1 + s_2 & -s_1 - s_2 & & & \\ -s_1 - s_2 & s_1 + 2s_2 + s_3 & -s_2 - s_3 & & \\ & -s_2 - s_3 & s_2 + 2s_3 + s_4 & -s_3 - s_4 & \\ & & -s_3 - s_4 & s_3 + 2s_4 & -s_4 \\ & & & -s_4 & s_4 \end{bmatrix} \quad (62)$$

となる。

7.2 逆問題型歪エネルギー最小原理による離散一般化剛性解の導出

4.3 節の中村・宮本の最適設計問題¹¹⁾における目的関数 $\int_0^L s(x)dx$ は、歪エネルギー $\frac{1}{2} \int_0^L s(x) \{\bar{u}'(x)\}^2 dx$ において、 $\{\bar{u}'(x)\}^2 = 1$ とし、全体を 2 倍したことに対応する。この時、固定端境界条件 $u(0) = 0$ を考慮すると変位モード関数は $\bar{u}(x) = x$ となる。この場合、目的関数 $\int_0^L s(x)dx$ は歪エネルギーの意味を有することになる。ここで、変位モードベクトルを $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}^T$ で表すこととすると、 $\bar{u}(x) = x$ を離散化した変位モードベクトルは $\bar{\mathbf{u}} = \Delta H \{1, 2, 3, 4, 5\}^T$ となる。

一般化剛性については、頂部における境界条件、 $s(H)u'(H) = 0$ より、 $s(H) = s_5 = 0$ である。従って、求めるべき離散一般化剛性をベクトル $\mathbf{s} = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}^T$ で表すことができる。

(57) 式において、変位モードベクトルの成分について、 $u_j = \bar{u}_j = j\Delta H$ に固定し、一次固有値が指定値 $\Omega[\mathbf{s}] = \bar{\Omega}$ をとるという条件下で一般化剛性 $\mathbf{s}$ を変化させることを考える。前章より、歪エネルギーは一般化剛性 $\mathbf{s}$ が正解の時最小値をとる。

よって、中村・宮本の最適設計問題は改めて、下記のように再定式化できる。

【一次固有値制約条件下の逆問題型歪エネルギー最小化問題】

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{s}}{\text{minimize}} && \frac{1}{2} \sum_{j=1}^5 U_j \Big|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \\ & \text{subject to} && \Omega[\mathbf{s}] = \bar{\Omega} \end{aligned}$$

7.3 数値計算結果

Fig.4 では(22)式の厳密解¹¹⁾と、MATLAB の固有値解析ソルバーと Optimization toolbox の制約条件付き非線形計画問題のソルバーを組み合わせて上記の逆問題型歪エネルギー最小化問題の解を数値的に求めたものを比較している。

Fig.4 から、逆変分原理に基づいて一次固有値・一次固有モード指定設計解の良い近似解が直接的に得られることが確認できる。

Fig.4 Comparison of optimum designs

本例題は、逆問題定式化された歪エネルギー最小原理を用いて、せん断棒の未知剛性の離散近似解を求めたものである。得られた離散解の妥当性、即ち近似誤差の最小性は、一次固有値制約条件下において歪エネルギーが最小化されるという物理的な条件で正当化されており、この点が本解法を用いていることの特徴となっている。

8. 結論

本稿では、既往のせん断棒やせん断型構造物の最適設計問題が、それらの制約条件や目標関数を歪エネルギーという物理的意味を有する量に置き換えて再定式化することで、通常歪エネルギー最小原理では既知量であった一般化剛性を変分対象とした逆問題型の歪エネルギー最小原理として再定式化できることを示した。

得られた成果をまとめるに以下の通りである。

1. Prager and Taylor⁹⁾の提示した、構造物全体にわたる一般化剛性積分値制約条件下における一次固有値最大化問題について、制約条件を歪エネルギーという物理的な意味を有する量に置き換えることで、歪エネルギー制約条件下の一次固有値最大化問題という形に拡張した。
2. Nakamura and Yamane¹⁰⁾や中村・宮本¹¹⁾の提示した一次固有値指定条件下の一般化剛性積分量最小設計問題において、目標関数を歪エネルギーの形に拡張して再定式化すると共に、それが上記 1.の歪エネルギー制約条件下の一次固有値最大化問題と等価であることを示した。
3. 歪エネルギー最小原理について、通常定式化とは逆に、一般化変位（または一般化歪）を既知量として与え、一般化剛性を未知量とした逆問題型の定式化を試み、これを逆問題型歪エネルギー最小原理と呼んだ。更に、一次固有値に関する制約を満足する任意の許容な一般化剛性のうち、歪エネルギーを最小化する解は、指定された一次固有値、固有モードを与える正解の一般化剛性となることを示した。
4. 単純な連続体せん断棒の数値計算例により、一次固有値、一次固有モードが既知である時、正解の一般化剛性分布は逆問題定式化された歪エネルギーを最小化するように求めた離散化一般化剛性で精度良く近似出来ることを示した。得られた解の妥当性、即ち近似誤差の最小性が、歪エネルギーの最小性によって正当化されていることが、逆問題型歪エネルギー最小原理を用いて離散近似解を得ることの特徴であると言える。

謝辞

本研究は著者の修士論文における成果の一部を発展させたものである。著者が大学院を修了した後も当時の指導教授であった中村恒善先生（京都大学名誉教授）には本研究をまとめて発表するよう励ましていただいた。ここに記して深く感謝申し上げる。

参考文献

- 1) Horák, V., Inverse Variational Principle of continuum mechanics, Rozprawy Czechoslovenske Akademie Ved Praha, Czech, 1969
- 2) 瀬口靖幸, 多田幸生: 逆変分原理による構造物の形状決定問題 : 有限要素法による取扱, 日本機械学会論文集, Vol. 44, No. 381, pp.1469-1477, 1978. 5
- 3) 多田幸生, 竹谷秀基: 逆変分原理による最適構造設計の境界形取扱, 日本機械学会論文集, A 編, Vol. 53, No. 487, pp. 667-673, 1987. 3
- 4) 畔上秀幸: 成長の構成則を用いた形状最適化手法の提案 : 静的弾性体の場合, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 54, No. 508, pp. 2167-2175, 1988. 12
- 5) 畔上秀幸, 荻原忠, 高見昭康: 成長ひずみ法による平等強さ形状の解析 : 定常振動問題への適用, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 56, No. 523, pp. 589-594, 1990. 3
- 6) 畔上秀幸, 高見昭康: 逆変分原理に基礎をおく成長ひずみ法 : 最大剛性形状解析へのアプローチ, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 56, No. 530, pp. 2162-2168, 1990. 10

- 7) 浜田実, 瀬口靖幸, 多田幸生: 逆変分原理による構造物の形状決定問題: 第 2 報, 座屈問題と振動問題, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 46, No. 402, pp. 187-196, 1980. 2
- 8) Gao, Y.: Inverse variational principle in finite elasticity, Mechanics research communications, Vol. 15, No. 3, pp. 161-166, 1988
- 9) Prager, W., Taylor, J.E.: Problems of Optimal Structural Design, Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, No. 1, pp. 102-106, 1958. 3
- 10) Nakamura, T., Yamane, T.: Optimum design and earthquake-response constrained design of elastic shear buildings, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 14, No. 5, pp. 797-815, 1986
- 11) 中村恒善, 宮本秀樹: 高層建築骨組の剪断棒モデルの最適設計及び地震時応答制約設計法, 日本建築学会大会学術講演梗概集B-1, pp. 391-392, 1989. 9

STIFFNESS IDENTIFICATION OF SHEAR STRUCTURE BASED ON INVERSE FORMULATION OF RAYLEIGH'S PRINCIPLE

Inverse formulation of variational principles of mechanics and structural optimization part 1

Kohju IKAGO *

* Prof., International Research Institute of Disaster Science, Tohoku University, Dr. Eng.

Principles of minimum potential energy are used as governing principles for the finite element formulation of a continuum. In general, the shape, boundary conditions of loadings and displacements, and distributions of mass and stiffness are given and variation of unknown displacements is considered in classical variational principles.

The variation of the shape as well as the displacements of a structure is considered in an inverse variational principle used as a governing principle for shape optimization problems, in which maximum stiffness distribution is sought subject to volume or surface area constraint (Horák 1969).

Gao (1988) defined a Euler-type functional in the deformed configuration to solve a problem with a movable boundary under the true loading systems. The inverse variational principle derived by Gao is also applicable to shape optimization problems.

Prager and Taylor (1958) formulated optimum stiffness design problems to maximize the first eigenvalue of a structure with the constraint of the sum of the stiffnesses in the entire structure in a natural vibration problem using Rayleigh's principle; they elucidated that the necessary and sufficient condition for optimality requires the uniform strain in the entire structure.

In general terms, structural optimization problems are categorized into shape optimization and sizing optimization problems. Likewise, inverse formulation of minimum principles is categorized into two types in which variations of boundary shape and stiffnesses or sizes of structural elements are considered.

This paper looks into the type of inverse variational principle that is proposed by Prager and Taylor and formulates a virtual average compliance functional in terms of inverse problem. In the inversely formulated functional, static displacement distribution is given and the variation of unknown stiffness distribution is considered. This research work pursue the establishment of a method to identify unknown stiffness for a given displacement mode or strain distribution by using a type of inverse variational principles to extend the theory proposed by Prager and Taylor.

First, an inverse problem of a shear structure subjected to ground motions is considered, in which the first eignmode is known and the stiffness distribution is unknown. The first eiganvalue is employed as the functional to be minimized subject to constant virtual average compliance; the stiffness distribution that minimizes the functional is found to be the correct design that gives designated eigenmode.

Next, inversely formulated minimum principle of virtual average compliance functional with the first eigenvalue constraint is considered and is found to be equivalent to the minimum principle of the first eigenvalue functional.

It is worth noting that the necessary and sufficient condition for the optimality of the optimum design problem to identify stiffness design for a shear building with first eigenvalue and eigenmode constraints formulated by Nakamura and Yamane (1986) is equivalent to the stationary condition for the eigenvalue functional in inverse formulation.

An analytical example using a shear structure illustrated that discretized stiffness design obtained by using the inverse variational principle proposed in this paper agreed well with exact solution.

(2015 年 3 月 8 日原稿受理, 2015 年 8 月 4 日採用決定)