改良型 ESO 法を用いた 3 次元構造物の位相最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF 3D STRUCTURES
USING IMPROVED ESO METHOD

新内 洋平*, 松本 慎也**, 藤井 大地***

Yohei NIUCHI, Shinya MATSUMOTO and Daiji FUJII

In this paper, an improved ESO (Evolutionary Structural Optimization) method for the topology optimization of 3D structures is proposed. In the proposed method, the idea of BESO method and the idea of extended ESO method are combined. In this method, the design domain is divided in same eight-node brick elements (voxels), and in the optimization process, for solid element, it will be removed if the strain energy is less than the threshold value. This threshold value is obtained from the equation proposed in extended ESO. This equation consists of the mean value of sensitivity number and the average deviation of sensitivity number with a control parameter. In the proposed method, the evolutionary volume ratio (reduction ratio) is given as input data, and this control parameter is determined automatically in the program so as to satisfy the given reduction ratio approximately. Several numerical examples are shown in order to demonstrate the effectiveness of the proposed method for 3D structures.

Keywords: Topology optimization, ESO method, Voxel finite element method, Three dimensional structure, Computational Morphogenesis

位相最適化, ESO 法, ボクセル有限要素法, 3 次元構造, 構造形態創生

1. はじめに

近年, 解析技術や生産・製造技術等の発達により, 様々な形態の建築物が造られるようになってきている。また, 3D プリンタの普及により, より軽量で剛性の高い 3 次元構造形態を創生する技術の必要性が高まっている。位相最適化手法は, このようなニーズに応える形態創生手法の一つである。

位相最適化手法は, 大きく数理計画法にもとづく方法と発見的的手法にもとづく方法の 2 種に分類される。3 次元解析が可能な実用的手法としては, 数理計画法では, 均質化法¹⁾, SIMP 法^{1,2)}, レベルセット法^{3,4)}等が挙げられ, 発見的手法では, ESO 法⁵⁾, BESO 法^{6,7)}, 拡張 ESO 法^{8,9)}等が挙げられる。一方, 著者藤井らは, CA 法と拡張 ESO 法を組み合わせた CA-ESO 法^{10,11)}を提案し, 2 次元および 3 次元の剛性最大化問題において, 数理計画法にもとづく SIMP 法と同等以上の性能を有することを示している。

発見的手法の内, BESO 法^{6,7)}は, SIMP 法と類似した方法で, SIMP 法が要素密度を連続関数として各ステップの密度の増減を求めるのに対して, BESO 法は各ステップの目標体積を定めて, 歪みエネルギー感度の低い要素を除去し, 感度の高い要素を復活させる。また, BESO 法では, 要素感度を節点感度に置き換え, 要素の除去・復活の指標に用いる要素感度を各要素の影響半径内の節点感度から重み付き平均により計算する方法を用いている。このような方法で, 格

子メッシュで見られるチェッカーボード状の密度分布を防ぐとともに, 除去要素の感度も影響半径内の節点感度から計算できるようにしている。なお, 要素感度を節点感度に置き換える方法は, 松井, 寺田¹²⁾によって提案され, SIMP 法による汎用ソフトにも用いられている。これに対して, 拡張 ESO 法^{8,9)}は, 各ステップで応力等値線を作成し, 応力平均と偏差平均を指標とする閾値によって要素の除去と付加を行う。また, 各ステップでリメッシングを行うため, 境界形状が滑らかな位相が得られる特徴がある。一方, 著者藤井らが提案している CA-ESO 法^{10,11)}は, BESO 法と類似した方法ではあるが, 各ステップの要素除去に目標体積を定めない拡張 ESO 法のルールを採用している点と, BESO 法のように各ステップで要素除去と復活を同時に行うのではなく, どちらか一方のみを行うところに特徴がある。

以上の発見的手法を SIMP 法と比較すると, SIMP 法では, 除去要素の密度を完全に 0 にすることができないために, 除去要素が増えなくても計算負荷が変わらないのに対して, 発見的手法では, 除去要素が増えるにしたがって計算負荷が軽くなる利点がある。しかしながら, BESO 法では各ステップの体積減少率を 1%程度にするため, 目標体積に達するまでに計算時間を要し, CA-ESO 法では目標体積には速く達するが, その後の CA 法と ESO 法の繰り返しで計算時間を要する場合がある。3 次元問題においては, 要素数が膨大になるた

* 近畿大学大学院 システム工学研究科 大学院生
** 近畿大学工学部 准教授・博士(工学)
*** 近畿大学工学部 教授・博士(工学)

Grad. Stud., Graduate School of Systems Engineering, Kinki University
Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.
Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.

め計算時間は重要な問題で、特に自重問題では、除去過程で孤立要素（節点が連続しない要素）が生じやすく、除去要素に微小密度を与えないと連立方程式（間接法）の解が収束しないため、SIMP 法よりも計算効率が悪くなる場合がある。一方、格子メッシュを用いない拡張 ESO 法では、このような問題は生じないが、四面体要素でリメッシングを行うために、要素数が膨大になると異形メッシュの修正等が必要となり、計算負荷が増大する可能性がある。

以上のような問題を解決するために、本論文では、CA-ESO 法や BESO 法よりも計算効率が良く、しかもパラメータ設定が容易で、より確実に優良解が求まる手法を提案する。本手法は、CA 法を用いずに ESO 法のみで収束解を得る改良型 ESO 法で、以下では IESO (Improved Evolutionary Structural Optimization) 法と呼ぶ。

本方法では、拡張 ESO 法で用いられている感度（敏感数）の平均値と偏差平均を指標とする閾値を用いるが、要素感度として von Mises 応力の代わりに BESO 法と同様のひずみエネルギー感度を用いる。また、von Mises 応力の代わりにひずみエネルギー感度を用いると、閾値を制御するパラメータの設定が非常に難しくなるため、このパラメータを入力データとして与える代わりに、各ステップの要素除去率を入力データとして与え、プログラム内で、その要素除去率を近似的に満足するパラメータを自動計算する。また、本方法では、要素除去率は、設計対象とする残存要素数に適用するため、各ステップの体積減少率は BESO 法のように一定ではなく、ステップが進むにしたがって小さくなる。また、要素除去率も 10%前後で与えるため、収束が速く、通常の問題では 30 ステップ程度で収束解が得られる。ただし、本手法で与える除去率はあくまで指標であり、各ステップの実際の除去率は閾値によって定まる。

本論文では、以上のように非常にシンプルで収束の速い IESO 法で、十分実用に耐えうる優良解が得られることを示す。なお、本論文で用いる有限要素解析法は、文献 11) に示した 8 節点応力仮定法要素を用いたボクセル有限要素法である。したがって、有限要素解析の定式化は本論文では割愛する。

2. 有限要素解析法の概要

本論文に用いる位相最適化手法では、設計領域を包含する直方体領域（図 1）を考え、これを均等な直方体要素（voxel）で分割する。そして、実際の設計領域はボクセルの材料密度の有無（1/0）によって与える。この時、図 1 の直方体領域の各辺の長さを L_x, L_y, L_z とし、各辺の有限要素分割数を n_x, n_y, n_z とすると、直方体要素（voxel 要素）の各辺の長さ l_x, l_y, l_z は次式で定義される。

$$l_x = \frac{L_x}{n_x}, \quad l_y = \frac{L_y}{n_y}, \quad l_z = \frac{L_z}{n_z} \quad (1)$$

図 1 ボクセル有限要素法の解析領域

有限要素は 8 節点応力仮定法要素とし、全体剛性方程式の解法には前処理付き共役勾配法を用いる^{11,13)}。また、反復計算においては要素剛性マトリクスと変位ベクトルのかけ算を要素ごとに行い、これをベクトルとして保存していく Element-by-Element 法¹⁴⁾を用いる（文献 13）5 章等を参照）。

3. IESO 法による 3 次元構造の位相最適化

提案手法（IESO 法）による位相最適化では、ボクセル解析のメリットを生かすため、最適化の過程でリメッシュ（節点の再番号付け）は行わず、存在要素の密度を 1、除去要素の密度を 0 とすることで各ステップの設計領域を定義する。そして、除去要素（密度 0 の要素）は、Element-by-Element 法の計算から除外する。ただし、除去要素に微小密度を設定する場合（自重問題等）は除外しない。

3.1 ひずみエネルギー感度の計算法

要素のひずみエネルギー感度の計算については、BESO 法で示されている方法を採用する。この方法では、まず、SIMP 法と同様に、要素の剛性に比例する係数を要素密度と定義し、 i 番目要素の剛性マトリクス $\mathbf{k}_i$ が次式で表されるものとする。

$$\mathbf{k}_i = \rho_i \mathbf{K}_i \quad 0 \leq \rho_i \leq 1 \quad (2)$$

ただし、 ρ_i は i 番目要素の要素密度を表し、 $\mathbf{K}_i$ は i 番目要素の初期要素剛性マトリクスを表す。ただし、ここでは、SIMP 法のように密度 ρ_i にべき乗のペナルティは課さない。

また、最適化問題も、SIMP 法と同様、質量制約下でのコンプライアンスの最小化とする。

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & f_{obj}(\rho) = C(\rho) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & m(\rho) = \sum_{i=1}^N \rho_i = \bar{m} \\ & \rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_N\} \quad 0 \leq \rho_i \leq 1, \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 C はコンプライアンス、 $\mathbf{d}, \mathbf{K}$ は節点変位ベクトルと全体剛性マトリクス、 m は総密度、 $\bar{m}$ は総密度の制約値、 N は要素総数である。このとき、コンプライアンス C の設計変数 ρ_i に関する感度は次式により計算される^{13,15)}。

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = -\mathbf{d}_i^T \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \rho_i} \mathbf{d}_i = -\mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \quad (4)$$

したがって、ESO 法⁵⁾では、次式の値を要素のひずみエネルギー感度（敏感数）として、これを要素除去の指標に用いている。

$$\alpha_i^e = (1/2) \mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \quad (5)$$

一方、BESO 法^{6,7)}では、チェッカーボード状の密度分布を防ぐため、まず、(5)式の感度から次式により節点の感度を求める。

$$\alpha_j^n = \left(\sum_{i=1}^{M^e} V_i \alpha_i^e \right) / \sum_{i=1}^{M^e} V_i \quad (6)$$

ここに、 α_j^n は j 番目節点のひずみエネルギー感度、 M^e は j 番目節点に繋がる要素数、 V_i は j 番目節点に繋がる i 番目要素の体積を表す。ただし、ボクセル有限要素法では、要素体積は均一であるため、実際には次式で計算される。

$$\alpha_j^n = \left(\sum_{i=1}^{M^e} \alpha_i^e \right) / M^e \quad (7)$$

さらに、(7)式から要素の除去・復活の指標に用いる要素のひずみエネルギー感度は次式により計算される。

$$\alpha_i = \left(\sum_{j=1}^{M^n} w(r_{ij}) \alpha_j^n \right) / \sum_{j=1}^{M^n} w(r_{ij}) \quad (8)$$

ここに、 α_i は i 番目要素のひずみエネルギー感度、 M^n は i 番目要素の要素中心から影響半径 $r_{\min}$ の球体内に含まれる節点数、 r_{ij} は i 番目要素の中心から j 番目節点までの距離、 $w(r_{ij})$ は要素中心からの距離に比例する重みで、次式で定義される。

$$w(r_{ij}) = r_{\min} - r_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, M^n) \quad (9)$$

なお、BESO 法では、除去要素の急激な感度低下を防ぐために、現更新ステップの感度と 1 つ前の更新ステップの感度の平均値をとり、最終的に次式により要素の感度を評価している。

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^{(k)} + \alpha_i^{(k-1)}}{2} \quad (10)$$

BESO 法では、以上の感度計算法により、残存要素、除去要素両方の感度を求めている。しかしながら、本論文で提案する IESO 法では除去要素の復活は行わないため、除去要素の感度計算は必要ない。したがって、(10)式の平均化は用いず、(8)式によりひずみエネルギー感度を求める。

3.2 要素除去の方法

IESO 法では、要素除去に関しては、拡張 ESO 法^{8,9)}のルールを用いる。ただし、本手法では、要素除去の指標として、各要素の von Mises 応力の代わりに、(8)式のひずみエネルギー感度を用いる。したがって、要素除去のルールは次式となる。

$$\rho_i = 0 \quad \text{if} \quad \alpha_i < X_{cr} \quad ; i=1, \dots, N_L \quad (11)$$

ここに、 N_L は残存要素数、 X_{cr} は閾値で、次式で定義される。

$$X_{cr} = \alpha_{av} - \eta \cdot \phi \quad (12)$$

ただし、 α_{av} と ϕ は残存要素のひずみエネルギー感度の平均値と偏差平均であり、次式から計算される。

$$\alpha_{av} = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} \alpha_i \quad \phi = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_L} (\alpha_i - \alpha_{av})^2} / N_L \quad (13)$$

ここに、 η は要素の除去量を制御する制御変数であり、 η が大きいと要素が除去されにくく、 η が小さいと除去されやすくなる。

しかしながら、ひずみエネルギー感度の場合、von Mises 応力と比較して、(12)式の η の与え方が難しく、 η の微妙な変化で除去量が大きく変化する可能性がある。そこで、IESO 法では、BESO 法と同様に各ステップの要素除去率を与え、この除去率を近似的に満たす η をプログラム内で自動計算することを考える。

まず入力データとして与える除去率を λ とすると、第 k ステップの除去要素数 $N_R^{(k)}$ は、次式で計算される。

$$N_R^{(k)} = \begin{cases} \lambda N_L^{(k-1)} & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} \geq \bar{N}_L \\ N_L^{(k-1)} - \bar{N}_L & \text{if } (1-\lambda)N_L^{(k-1)} < \bar{N}_L \end{cases} \quad (14)$$

ここに、 $N_L^{(k-1)}$ は $(k-1)$ ステップの残存要素数、 $\bar{N}_L$ は残存要素数の制約値（下限値）で、密度 ρ_i が 0 と 1 の場合は(3)式の質量制約 $\bar{m}$ と一致する。

次に、(11)式で除去される要素数が、(14)式の $N_R^{(k)}$ になる $\eta^{(k)}$ を求めることになるが、あまり厳密に求めると(11)式を使う意味が無くなってしまふ。したがって、ここでは、次に示す計算フローによって、プログラム内で $\eta^{(k)}$ を自動計算し、(14)式の $N_R^{(k)}$ に近くなる $\eta^{(k)}$

をプログラム内で近似的に求める。すなわち、 $\eta^{(k)}$ が 1 以上の場合、要素は非常に除去されにくいため、 $\eta^{(k)}$ の初期値を 1.5 とし、 $\eta^{(k)}$ を 1.5 から徐々に小さくしていくことで、要素除去数が $N_R^{(k)}$ に近くなる $\eta^{(k)}$ を探索する。以下は本プログラムで用いている計算フローで、小数点第 3 位までの精度で $\eta^{(k)}$ を探索している。

- ① $\eta^{(k)}$ の初期値を 1 とする。また、③のべき乗数 p の初期値を 1、繰り返し数 n の初期値を 0 とする。
- ② (12)式の η を $\eta^{(k)}$ とし、(11)式により $\rho_i = 0$ となる除去要素数 $\tilde{N}_R$ を求める。
- ③ $\tilde{N}_R < N_R^{(k)}$ なら、 $n = n+1$ 、 $\eta^{(k)} = 1 - (0.1)^p \times n$ として②に戻る。
 $\tilde{N}_R \geq N_R^{(k)}$ なら、 $\eta^{(k)} = 1 - (0.1)^p \times (n-1)$ 、 $p = p+1$ 、 $n=0$ として②に戻る。ただし、 $p \geq 4$ かつ $\tilde{N}_R < 3N_R^{(k)}$ ならば④に進む。
- ④ $\tilde{N}_R$ を確定し、要素除去を行う。

以上の計算フローでは、まず、 $p=1$ とし $\eta^{(k)}$ を 0.1 ずつ減少させ $\tilde{N}_R$ が $N_R^{(k)}$ を超えると 1 ステップ戻し、次に $p=2$ とし $\eta^{(k)}$ を 0.01 ずつ減少させ $\tilde{N}_R$ が $N_R^{(k)}$ を超えると 1 ステップ戻し、さらに $p=3$ とし $\eta^{(k)}$ を 0.001 ずつ減少させ $\tilde{N}_R$ が $N_R^{(k)}$ を超えると 1 ステップ戻し、最後に $\tilde{N}_R < 3N_R^{(k)}$ であれば $\eta^{(k)}$ を確定し、要素除去を行う。ただし、 $\tilde{N}_R \geq 3N_R^{(k)}$ の場合は、 $\tilde{N}_R < 3N_R^{(k)}$ になるまで p をさらに増やす。なお、フローには示していないが、 $N_R^{(k)} = N_L^{(k-1)} - \bar{N}_L$ となる最終ステップでは、 N_L が $\bar{N}_L$ とほぼ一致するように $p=5$ まで計算している。

3.3 IESO 法の計算フロー

図 2 は IESO 法の計算フローを示したものである。本解析に必要な入力データとしては、有限要素解析に必要なデータとして、設計領域の大きさ (L_x, L_y, L_z)、分割数 (n_x, n_y, n_z)、ヤング係数、ポアソン比、境界条件、荷重条件がある。また、最適化計算に必要なデータとして、影響半径 $r_{\min}$ （実際には、 $r_{\min} = b_r \cdot l_x$ として (1)式の l_x の倍数 b_r （影響半径倍率）で与える）、残存要素数の下限値 $\bar{N}_L$ （実際には、目標体積比 $\bar{V}_r = \bar{N}_L / (n_x \cdot n_y \cdot n_z)$ で与える）、除去率 λ がある。また、設計領域内に空間や固定スラブ等を設定する場合は、設計対象から除外する要素の番号・密度情報 (0/1) を入力する必要がある。

図 2 IESO 法の計算フロー

4. 解析例

まず、文献 9)等で取り上げられている片持梁例題の解析を行う。図 3 は、設計領域および荷重条件・境界条件を示す。ただし、長さ L 、幅 B 、高さ H の比は $1.6 : 0.4 : 1$ とし、設計領域の要素分割数は $80 \times 20 \times 50$ としている。また、応力集中を防ぐため、荷重は 9 節点に均等に与えている。

図 4 は、目標体積比 $\bar{V}_r = 0.2$ とした場合の IESO 法の収束解を示す。図中には、収束ステップ数、目標体積比 $\bar{V}_r$ 、除去率 λ 、影響半径倍率 b_r 、収束解のコンプライアンス比 C/C^0 (C^0 は初期コンプライアンス) も示している。(a) は標準解 (妥当と思われる解)、(b) は影響半径倍率の影響を見たもの、(c) は除去率の影響を見たものである。また、図 5 は、図 4(a) の各ステップの体積比 $V_r = N_L / (n_x \cdot n_y \cdot n_z)$ とコンプライアンス比 C/C^0 の推移を示したものである。また、図 6 は、文献 11)において同様の解析により得られた SIMP 法と CA-ESO の解を示したものである。ただし、SIMP 法、CA-ESO 法では、50 回の最適化繰り返し計算を行っている。

図 3 解析例 1

図 5 各ステップにおける体積比とコンプライアンス比の推移

図 6 SIMP 法と CA-ESO 法の解¹¹⁾

(a) 16step $V_r = 0.2$, $\lambda = 0.1$, $b_r = 3$, $C/C^0 = 3.39$

(b) 16step $V_r = 0.2$, $\lambda = 0.1$, $b_r = 1$, $C/C^0 = 3.42$

(c) 146step $V_r = 0.2$, $\lambda = 0.01$, $b_r = 3$, $C/C^0 = 2.93$

図 4 解析例 1 の収束解

以上の結果より、IESO 法では、除去率 λ を 0.1、影響半径倍率 b_r を 3 とすることで、解のコンプライアンス比は、SIMP 法とほぼ同等で、CA-ESO 法とほぼ同様の位相が、わずか 16 ステップの計算で得られることがわかる。また、図 4 の(a)と(b)の比較により、影響半径 1 と 3 ではほぼ同様の形態となり、影響半径の影響はあまり無いこと、(a)と(c)の比較では、除去率 λ を 0.01 と小さくすると、コンプライアンス比は小さくなるが、SIMP 法と同様に面的な形態が得られ、収束も遅くなることがわかる。

次に、文献 16)に示される例題 (図 7) の解析を行う。解析は、対称性を利用して 1/4 領域で行い、要素分割数は、 $60 \times 60 \times 40$ の 144000 要素 (1/4 領域) としている。ただし、応力集中を避けるため、支持点の拘束は 4 節点で与えている。

図 8 は、目標体積比 $\bar{V}_r = 0.05$ とした場合の IESO 法の収束解を示す。図中には、収束ステップ数、目標体積比 $\bar{V}_r$ 、除去率 λ 、影響半径倍率 b_r 、収束解のコンプライアンス比 C/C^0 も示している。(a) は標準解、(b) は影響半径倍率の影響を見たもの、(c) は除去率の影響を見たものである。また、図 9 は、図 8(a) の各ステップの体積比 V_r とコンプライアンス比 C/C^0 の推移を示したものである。また、図 10 は、文献 11)において同様の解析により得られた SIMP 法と CA-ESO の解を示したものである。ただし、SIMP 法、CA-ESO 法では、50 回の最適化繰り返し計算を行っている。

以上の結果より、IESO 法では、除去率 λ を 0.1、影響半径倍率 b_r

を 3 とすることで、解のコンプライアンス比は SIMP 法と CA-ESO 法のほぼ中間で、CA-ESO 法および SIMP 法と類似の位相が、わずか 22 ステップの計算で得られることがわかる。

図 7 解析例 2

(a) 22step $V_r = 0.05$, $\lambda = 0.1$, $b_r = 3$, $C/C^0 = 3.24$

(b) 23step $V_r = 0.05$, $\lambda = 0.1$, $b_r = 1$, $C/C^0 = 3.22$

(c) 188step $V_r = 0.05$, $\lambda = 0.01$, $b_r = 3$, $C/C^0 = 3.31$

図 8 解析例 2 の収束解

図 9 各ステップにおける体積比とコンプライアンス比の推移

図 10 SIMP 法と CA-ESO 法の解¹¹⁾

また、図 8 の(a)と(b)の比較により、影響半径 1 と 3 ではほぼ同様の形態となり、影響半径の影響はあまり無いこと、(a)と(c)の比較では、除去率 λ を 0.01 と小さくすると、細い部材が残る、コンプライアンス比もあまり良くないことがわかる。

最後に、文献 9) に掲載されているイタリアフィレンツェ新駅コンペ案の構造形状決定に用いられた解析例を取り上げる。図 11 は、文献に示されている条件をもとに作成した設計領域である。解析は対称性を利用して 1/4 領域で行い、要素分割数は $150 \times 42 \times 30$ の 189000 要素としている。ただし、応力集中を避けるため、支持点の拘束は 9 節点の正方形領域で与えている。

図 12 は、目標体積比 $\bar{V}_r = 0.116$ とした場合の収束解を示す。なお、文献 11) では、目標体積比を設計対象要素数（設計固定要素を除く要素数）に対して与えていたため、本解析ではこれと条件を合わせるように目標体積比を定めている。図中には、収束ステップ数、目標体積比 $\bar{V}_r$ 、除去率 λ 、影響半径倍率 b_r 、収束解のコンプライアンス比 C/C^0 も示している。(a)は標準解、(b)は影響半径倍率の影響を見たもの、(c)は除去率の影響を見たものである。また、図 13 は、図 12(a)の各ステップの体積比 V_r とコンプライアンス比の推移を示したものである。ここで、初期の V_r が 1 にならないのは密度 0 の設計除外要素があるためである。

図 11 解析例 3

図 13 各ステップにおける体積比とコンプライアンス比の推移

(a) 20step $V_r = 0.116$, $\lambda = 0.1$, $b_r = 3$, $C/C^0 = 2.82$

CA-ESO
 $V_r = 0.122$ $C/C^0 = 2.55$

(b) 20step $V_r = 0.116$, $\lambda = 0.1$, $b_r = 1$, $C/C^0 = 2.98$

SIMP
 $V_r = 0.116$ $C/C^0 = 2.67$

図 14 SIMP 法と CA-ESO 法の解¹¹⁾

(c) 154step $V_r = 0.116$, $\lambda = 0.01$, $b_r = 3$, $C/C^0 = 2.73$

図 12 解析例 3 の収束解

また、図 14 は、文献 11)で同様の解析により得られた SIMP 法と CA-ESO 法の解（全領域の透視図）を示したものである。ただし、SIMP 法では 50 回、CA-ESO 法では 100 回の最適化繰り返し計算を行っている。

以上の結果より、IESO 法では、除去率 λ を 0.1、影響半径倍率 b_r を 3 とすることで、解のコンプライアンス比は、SIMP 法よりもやや高いが、CA-ESO 法と SIMP 法の間接的な位相が、わずか 20 ステップの計算で得られることがわかる。また、図 12 の(a)と(b)の比較により、影響半径 1 と 3 では中間部の形態がやや異なり、 $b_r = 1$ の方が、ややコンプライアンス比が高くなること、(a)と(c)の比較では、除去率 λ を 0.01 と小さくすると、コンプライアンス比はやや小さくなるが、SIMP 法に近いやや複雑な形態になることがわかる。

5. 計算時間の比較

表1は、IESO法、CA-ESO法、SIMP法の3つの解析例に対する計算時間を比較したものである。ただし、CA-ESO法の最適化繰り返し計算回数は、解析例1と2が50、解析例3が100、SIMP法はすべて50である。表より、IESO法の各解析例の(a)、(b)の計算時間は、CA-ESO法、SIMP法に比較して非常に短いことがわかる。これは、IESOの最適化過程の収束が速いことと、CA-ESO法と同様に除去要素の計算負荷が無いためである。なお、解析例1について、CA-ESO法とSIMP法の差があまりないのは、SIMP法においては途中からほとんど形が変化しないため、連立方程式の反復回数が少なくなり、計算速度が速まったためである。

また、パラメータ設定の難易度についても、IESO法のパラメータである影響半径倍率 b_r と除去率 λ は、3解析例とも3と0.1で、ほぼ実用的な解が求まり、事前解析の必要がほとんどない。CA-ESO法では、(12)式の最適な η を見つけるために、また、SIMP法では、フィルタリング法^{13),15)}の最適なパラメータを見つけるために少なからず事前解析が必要となるため、これは計算効率上大きなメリットとなる。

表1 計算時間の比較

	解析例1	解析例2	解析例3
IESO法 (a)	2.5分 (16step)	11分 (22step)	1時間26分 (20step)
IESO法 (b)	4分 (16step)	18分 (23step)	1時間55分 (20step)
IESO法 (c)	5分 (146step)	31分 (188step)	7時間35分 (154step)
CA-ESO法	5分 (50step)	22分 (50step)	5時間36分 (100step)
SIMP法	7分 (50step)	33分 (50step)	4時間25分 (50step)

プロセッサ：Intel Core i7-4700MQCPU@2.40GHz メモリ：8GB

6. まとめ

本論文では、BESO法と拡張ESO法のアイデアを組み合わせた改良型ESO法（IESO法）を提案し、その有効性を検討した。その結果、以下のことが明らかになった。

- (1) 提案手法(IESO法)では、影響半径倍率 $b_r=3$ 、要素除去率 $\lambda=0.1$ に設定することで、3つの解析例すべてで、CA-ESO法、SIMP法とほぼ同等の位相が求まる。このため、パラメータ設定が容易であり、パラメータ設定のための事前解析をほとんど行わずで済む。
- (2) 提案手法では、CA-ESO法、SIMP法と比較して最適化のための繰り返し計算回数が少なく、非常に計算効率が良い。
- (3) 提案手法で得られる位相はシンプルであり、コンプライアンス値はCA-ESO法との比較では5%~12%増、SIMP法との比較では-4%~6%増の範囲に収まるため、建築構造のデザインのヒン

トとして用いるには、十分有効な解が得られていると考えられる。

以上より、IESO法は、従来の方法と比較して非常に計算効率の良い方法と言える。

なお、本提案手法は設計初期の計画段階で用いることを想定しているため、多様な空間設定、多様な荷重・境界条件のもとでの多様な解の提示が要求されると考えられる。このような場合、厳密な解の精度よりも、位相のシンプルさや計算効率の良さが威力を発揮するものと思われる。また、厳密な解の精度が要求される場合は、IESO法の $\lambda=0.1$ の収束解からCA法で5%程度要素を付加し、そこから $\lambda=0.01$ としてIESO法で削れば、より洗練された解が得られることも付記しておく。

今後は、この計算効率の良さを生かすため、自重問題、地震力を受ける建築物等の解析を行う予定である。

参考文献

- 1) Bendsoe, M. P. : Optimization of Structural Topology, Shape, and Material, Springer, 1995
- 2) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N. : The COC algorithm, Part II, Topological, geometrical and generalized shape optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, pp.309-336, 1991
- 3) Sethian, J. A. and Wiegmann, A. : Structural boundary design via level-set and immersed interface methods, Journal of Computational Physics, Vol.163, No.2, pp.489-528, 2000
- 4) Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D. : A level Set Method for Structural Topology Optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192, No.1-2, pp.227-246, 2003
- 5) Xie, Y.M., Steven, G.P. : Evolutionary Structural Optimization, Springer, 1997
- 6) Huang, X., Xie, Y.M. : Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.43, pp.1039-1049, 2007
- 7) Huang, X., Xie, Y.M. : Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications, Wiley, 2010
- 8) 大森博司, 崔昌禹:等値線を利用した拡張ESO法による構造形態の創生, 日本建築学会構造系論文集, 第539号, pp.87-94, 2001.1
- 9) 崔昌禹, 大森博司, 佐々木睦朗:拡張ESO法による構造形態の創生—三次元構造への拡張—, 日本建築学会構造系論文集, 第576号, pp.79-86, 2004.2
- 10) 藤井大地, 真鍋匡利 : CA-ESO法による構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.78, 第691号, pp.1569-1574, 2013.9
- 11) 藤井大地, 岡部 諒, 真鍋匡利, CA-ESO法とボクセル有限要素法を用いた3次元構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.79, No.703, pp.1279-1286, 2014.9
- 12) 松井和己, 寺田賢二郎 : 連続的材料分布の節点補間によるトポロジー最適化手法, 日本機械学会論文集 (A編), Vol.69, No.684, 2003.8
- 13) 藤井大地 : パソコンで解く構造デザイン, 丸善, 2002
- 14) Hollister, S.J. and Kikuchi, N., Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, Biotechnology and Bioengineering, 43, No.7, pp.586-596, 1994
- 15) 藤井大地 : 建築デザインと最適構造, 丸善, 2008
- 16) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣 : ボクセル有限要素法を用いた構造物の位相最適化, 日本計算工学会論文集, Vol.2, pp.87-94, 2000

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF 3D STRUCTURES USING IMPROVED ESO METHOD

Yohei NIIUCHI^{}, Shinya MATSUMOTO^{**} and Daiji FUJII^{***}*

^{*} Grad. Stud., Graduate School of Systems Engineering, Kinki University

^{**} Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.

^{***} Prof., Faculty of Engineering, Kinki University, Dr.Eng.

In this paper, an improved ESO (Evolutionary Structural Optimization) method for the topology optimization of 3D structures is proposed. In the proposed method, the idea of BESO method ^{6,7)} and the idea of extended ESO method ^{8,9)} are combined. In this method, the design domain is divided in same eight-node brick elements (voxels) ¹⁴⁾, and in the optimization process, for solid element, it will be removed if the strain energy is less than the threshold value. This threshold value is obtained from the equation proposed in extended ESO ^{8,9)}. This equation consists of the mean value of sensitivity number and the average deviation of sensitivity number with a control parameter. In the proposed method, the evolutionary volume ratio (reduction ratio) is given as input data, and this control parameter is determined automatically in the program so as to satisfy the given reduction ratio approximately.

Three numerical examples have been shown in order to demonstrate the effectiveness of the proposed method for 3D structures. It was found from the results that the proposed method had the following advantages.

- (1) The parameters of optimization process are less than BESO, CA-ESO, and SIMP method. There are only two parameters, that is the evolutionary volume ratio (reduction ratio) and the scale parameter $r_{\min}$ in the filter scheme. Therefore, it is not necessary to do the preliminary analysis for setting the parameters. In the three examples shown in this paper, the evolutionary volume ratio λ is all 0.1, and the scale parameter $r_{\min}$ is all $2/l_x$ (l_x : element's length of X direction).
- (2) The number of steps in the optimization process is very small compared with BESO, CA-ESO and SIMP method. The number of steps is 16 in example 1 (refer to Fig.5), 22 in example 2 (refer to Fig.9), and 20 in example 3 (refer to Fig.13). Therefore, the computational efficiency is much better than the other methods.
- (3) Simple designs can be obtained by the proposed method. The topologies and compliance ratios by the proposed method are similar to ones obtained by SIMP and CA-ESO method. Please refer to Fig.4 and Fig.6 for example 1, refer to Fig.8 and Fig.10 for example 2, and refer to Fig.12 and Fig.14 for example 3.

It can be seen that though the proposed method is one directional method which does not have additional process of elements, the resultant topologies have sufficient performance to give a hint to the architectural design.

(2015年10月8日原稿受理, 2016年2月17日採用決定)