初期変位付与型 TMD の同調比の設定

SETTINGS OF TUNING RATIOS OF TUNED MASS DAMPERS WITH INITIAL DISPLACEMENT

吉中 進*, 小鶴 桂太**, 谷口 与史也***
Susumu YOSHINAKA, Keita KOZURU and Yoshiya TANIGUCHI

In order to control the transient response more effectively, we propose TMDs (Tuned mass dampers) with initial displacement. In our previous study, we formulated the equation for initial conditions to release initial TMD displacement. By using this equation, the structural response of the first mode with the lowest modal damping is eliminated on a two-degrees-of-freedom model. In this paper, we study the effect of the settings of TMDs tuning ratios on the control performance. And we study the causes focusing on the interrelationship between a main mass and two TMDs on the complex plane and the TMD power flow.

Keywords : *Vibration control, Tuned mass damper, Initial displacement, Tuning ratio, TMD power flow*

振動制御, TMD, 初期変位, 同調比, TMD パワーフロー

1. はじめに

TMD(Tuned Mass Damper)は、重錘、ばね、ダンパーで構成され、構造物に取り付けて共振させることで、構造物の振動エネルギーを重錘の運動エネルギーとして吸収し、ダンパーの減衰力によりエネルギーを消散するパッシブ型の振動制御手法である¹⁾。TMDは、構造物の1点の絶対応答量に対して作用する制御手法であり、空間的な設置自由度の高さから形状と構造システムが多様で複雑な構造物に対して適用性が高いと考えられるため本研究では空間構造への適用を主な目標としているが、重層構造など他の構造物への応用も可能であると考えている。一方、TMDの制振効果は定常状態を想定したものであり、地震動など非定常性の強い外力に対する制振効果は定常外力と比較して低いことが分かっている²⁾。これはパッシブ型のTMDはAMD(Active Mass Damper)のように重錘を強制的に運動させる外部エネルギーがないため、安定した振動状態となるまで制振効果が発現されないためである³⁾。そこで著者は、TMDにあらかじめ初期変位を付与し、TMDの制振効果が低い過渡応答初期の効果を向上させるために初期変位付与型TMDを提案した。提案手法は一般的なTMDでは制御が難しい大地震時における応答制御を目標としている。

著者は、既報⁴⁾でインパルス外力が作用する場合の初期変位付与型TMDの設計式を提案した。提案式は、TMDの減衰比をある特定の値

よりも大きくするとTMD減衰比とモード減衰比の関係が変化することに着目し、インパルス外力の作用直後、すなわち応答速度極大の時刻で初期変位を解放する条件で、TMD初期変位の向きと大きさを適切に設定することにより低減モードの応答を消去し、高減モードのみで振動させることができる現象に基づいている⁵⁾。次に著者は、自由振動の理論解より初期変位解放条件式を導き、高減モードのみで振動する構造物の初期条件に関して、TMDが1個の場合は初期変位と初期速度の関係が固定されているが、同調比の異なる2個以上のTMDを用いることにより、初期変位と初期速度に関して初期変位解放条件式を満足する任意の値を選択することが可能であることを示した⁶⁾。既報⁷⁾では、空間構造のように複数の振動モードが励起しやすい構造物においても提案式が有効であることを示した。次に小型の初期変位付与型TMDモデルを試作してアーチモデル打撃試験を実施して初期変位付与型TMDの制振効果と提案した設計式の有効性を実験的に検証し、初期変位の解放時刻と大きさが制振効果に与える影響を解析的に確認した⁸⁾。インパルス外力以外には、既報⁹⁾で調和地動加振を受けた場合の制振効果について、ある一定時間(制振効果時間)の経過後は初期変位の無い通常のTMDとして作用することを確認した。さらに既報¹⁰⁾で地震時における本手法の制振効果が、通常のTMDと比較して、特に最大応答抑制効果に優れることを確認した。

本論文は、文献15)、16)の内容に加筆・修正したものである。

* 大阪市立大学大学院工学研究科都市系専攻 准教授・工博

** 大阪市立大学大学院工学研究科都市系専攻 大学院生・工修

*** 大阪市立大学大学院工学研究科都市系専攻 教授・工博

Assoc. Prof., Urban Engineering, Faculty of Engineering, Osaka City University, Dr. Eng.

Grad. Student, Faculty of Engineering, Osaka City University, M. Eng.

Prof., Urban Engineering, Faculty of Engineering, Osaka City University, Dr. Eng.

既往の研究^{9),10)}で述べたように、初期変位付与型 TMD は地震時における最大応答抑制効果に優れるが、初期変位解放後ある一定時間経過後は通常の TMD としての効果のみ有する。よって長時間の地震動に対して効果を発現するためには複数回の初期変位付与・解放動作が必要となる。そのため実際の構造物への適用においては、常時効果を有する通常の TMD と組み合わせ、通常の TMD では対応できない領域で初期変位付与型 TMD を用いることを考えている。初期変位付与型 TMD は一般のアクティブ制振と異なり、必要な外部エネルギーは基本的に数回の初期変位付与時のみであり、将来的にはエネルギー回生システムの利用などにより外部エネルギーの無い自立したシステムの構築を目指している。

これまで著者は主として TMD に初期変位を付与することで低減衰モードの応答が消去可能となる現象に着目して研究を進めてきた。しかし TMD の個数が 2 個以上になると、低減衰モードを消去した残りの複数の高減衰モード全体の応答で制振効果を評価する必要がある。そこで本論文では、最初に、2 個の TMD の同調比をパラメータとして、同調比の設定が主振動系の応答と TMD 初期変位の大きさに与える影響を検討する。次に検討結果に関して、主振動系と 2 個の TMD の相対的な関係に着目し、初期条件を複素平面上で固有モードベクトルに分解する方法、TMD の付加減衰効果を表す指標である TMD power flow を用いる方法の二つの方法により考察する。なお、初期変位付与型 TMD の目標は過渡応答初期の制振効果を向上させることであるから、本論文では自由振動のみを取り扱い、TMD の初期変位は振動開始時刻に解放した。また本論文では、初期変位付与型 TMD により応答を消去する最も減衰の低いモードを 1 次モードとし、それ以外のモードについてはモード減衰比の小さい方から順番にモード次数を割り当てる。

2. 初期変位付与型 TMD の設計式と初期変位解放条件式

既往の研究^{4),6)}で提案した設計式と初期変位解放条件式をまとめる。

2. 1 設計パラメータ

初期変位付与型 TMD の設計パラメータは、Fig.1 に示すように、TMD の重錘の質量 m_T に対する主振動系（構造物）の等価質量 M_S の比である質量比 μ の他に、(i)同調比 γ 、(ii)減衰比 ξ_T 、(iii)初期変位 $y(0)$ である。(i)と(ii)は通常の TMD と共通のパラメータである。

(1)式に示すように、同調比 γ は主振動系の固有円振動数 ω_S に対する TMD の固有円振動数 ω_T の比であり、減衰比 ξ_T は TMD の臨界減衰係数に対する TMD の減衰係数 c_T の比である。

$$\mu = \frac{m_T}{M_S}, \quad \gamma = \frac{\omega_T}{\omega_S}, \quad \xi_T = \frac{c_T}{2m_T\omega_T} \quad (1)$$

Fig. 1 Design parameters of TMD with initial displacement

2. 2 同調比と減衰比の設定

本研究では、同調比の設定に自由振動最適化パラメータの設計式である(2)式を用いる¹¹⁾。同調比に自由振動最適化パラメータを用いたと

きの TMD の減衰比とモード減衰比、非減衰固有円振動数比の関係を Fig.2 に示す。TMD の質量比 μ は 2.0% とし、主振動系の減衰は考慮していない。 ω_1 と ω_2 は 1 次と 2 次モードの固有円振動数である。図中で A 点が(3)式で示す自由振動最適化パラメータの TMD 減衰比を用いたときのモーダル減衰比と非減衰固有円振動数比である。

$$\gamma_{opt} = \frac{1}{1+\mu} \quad (2)$$

$$(\xi_T)_{opt} = \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} \quad (3)$$

図に示すように、A 点より小さい TMD 減衰比の領域では、2 つのモードの減衰比は等しく、固有振動数は異なる。逆に A 点より大きい TMD 減衰比の領域では、モード減衰比は異なり、固有振動数は等しい。特に A 点よりも大きい領域では Fig.2(a)に示すように、1 次モード減衰比 ξ_1 と比較して 2 次モード減衰比 ξ_2 が非常に大きくなり、A 点の TMD 減衰比を境に振動性状が大きく変化する。本研究では、(i)過渡応答と共振応答の低減効果、(ii)TMD の減衰比の変動に対する制振効果のロバスト性、の 2 点を考慮して、TMD 質量比が 1~5% 程度の範囲における TMD 減衰比として、以下の(4)式を提案している⁴⁾。Fig.2 では B 点と C 点に対応する。

$$(\xi_T)_{opt} = (31.25 \times \mu^2)^{1/3} \quad (4)$$

主振動系に減衰比 ξ_S が存在する場合の最適同調比と最適減衰比は以下の式で表される⁴⁾。

$$\gamma_{opt} = \frac{\xi_T - \xi_S}{(1+\mu)\xi_T - \xi_S} \quad (5)$$

$$(\xi_T)_{opt} = (31.25 \times \mu^2)^{1/3} + ((\xi_T)_{A'} - (\xi_T)_A) \quad (6)$$

(6)式中の第 2 項は、主振動系に減衰が有る場合と無い場合において、モード減衰比が分岐する点（文献⁴⁾の Fig.15 の A 点と A'点）における TMD 減衰比の差である。なお、本論文で 2 個以上の TMD を用いる場合に TMD の減衰比は(6)式で得られた値を用い、同調比は(5)式を用いずに検討を行った。

Fig. 2 Relationships between TMD damping ratio and modal damping ratio and frequency ratio ($\mu = 2\%$)

2. 3 初期変位解放条件式

著者は自由振動応答の理論解¹²⁾に基づき、2次モード単独で振動する、すなわち1次モードの応答が0となるFig.1の主振動系/TMDで構成される全体系の初期条件として、(7)式の初期変位解放条件式を導いた⁶⁾。ここで、 $\mathbf{\kappa}_1$ は1次の固有ベクトルである。

$$\mathbf{\kappa}_1 \mathbf{a} \dot{\mathbf{u}}(0) = 0 \quad (7)$$

速度ベクトルと変位ベクトルの項に分けると以下ようになる。

$$\{\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1 \quad \boldsymbol{\psi}_1\} \mathbf{a} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(0) \\ \mathbf{u}(0) \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

上式で λ_1 は1次モードの固有値、 $\boldsymbol{\psi}_1$ は1次モードの固有変位ベクトルである。マトリクス $\mathbf{a}$ は、全体系の質量マトリクス $\mathbf{m}$ 、減衰マトリクス $\mathbf{c}$ で構成される(9)式の状態マトリクスである。 $\mathbf{u}(0)$ と $\dot{\mathbf{u}}(0)$ は初期変位と初期速度のベクトルである。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (9)$$

(7)式の物理的な意味は、1次の固有ベクトル（モーダル速度、モーダル変位）と初期速度、初期変位に関する初期条件ベクトルが、マトリクス $\mathbf{a}$ に関して一般直交性を有することである。一般直交性を有するとは、固有ベクトルと初期条件ベクトルが力学的に互いに独立で、エネルギー的に無関係であることを意味する¹³⁾。すなわち、1次モードと力学的に独立で、エネルギー的に無関係な初期条件を与えた場合に、1次モードの応答が0となる。既往の研究⁶⁾で述べたように、一般粘性減衰における固有ベクトルは複素数となるため、(7)式で得られるTMD初期変位も複素数となる。次章で述べるように2個以上のTMDを用いることで初期変位を実数にすることが可能となる。

3. 同調比の設定と主振動系の応答、TMD初期変位の関係

本章では、同調比の異なる2個のTMDを用いたときに、同調比の設定の違いが主振動系の応答とTMD初期変位の大きさに与える影響について検討する。

3. 1 初期変位の設定方法

Fig.3に示す3自由度モデルの自由振動運動方程式は(10)式で表される。 x_s は主振動系（構造物）の絶対変位、 x_{T1} と x_{T2} は2個のTMDの絶対変位である。 $y_1(0)$ 、 $y_2(0)$ は主振動系に対するTMDの初期相対変位（実際の装置に付与する初期変位）であり区別する。

Fig. 3 Analytical model

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 & 0 \\ 0 & m_{T1} & 0 \\ 0 & 0 & m_{T2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_{T1} \\ \ddot{x}_{T2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s + c_{T1} + c_{T2} & -c_{T1} & -c_{T2} \\ -c_{T1} & c_{T1} & 0 \\ -c_{T2} & 0 & c_{T2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_{T1} \\ \dot{x}_{T2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s + k_{T1} + k_{T2} & -k_{T1} & -k_{T2} \\ -k_{T1} & k_{T1} & 0 \\ -k_{T2} & 0 & k_{T2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s \\ x_{T1} \\ x_{T2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

主振動系のパラメータ M_s 、 K_s 、 ξ_s はそれぞれ1kg、100N/m、0.02とする。2個のTMDの合計質量比 μ は2%とし、2個のTMD質量は0.01kgで同じとする。TMDの減衰比は(6)式を用い、0.2517とする。主振動系が初期変位のみを有する場合に、TMDの初期変位を実数値とするための初期変位解放条件式の適用方法については、文献6)の6.2節で述べたが、ここでは主振動系が初期速度と初期変位の両方を有する場合に拡張して整理する。(8)式で $\{\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1 \quad \boldsymbol{\psi}_1\} \mathbf{a}$ の 1×6 のベクトルの成分を $\psi_i a^{(i)}$ ($i=1 \sim 6$)とすると、1次モードの応答を消去するための初期条件式は以下の(11)式で表される。

$$\psi_1 a^{(1)} \dot{x}_s(0) + \psi_1 a^{(4)} x_s(0) + \psi_1 a^{(5)} x_{T1}(0) + \psi_1 a^{(6)} x_{T2}(0) = 0 \quad (11)$$

上式の左辺を実部と虚部の項に分けると、 $\dot{x}_s(0)$ 、 $x_s(0)$ 、 $x_{T1}(0)$ 、 $x_{T2}(0)$ がそれぞれ実数であることから、以下の二つの式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \text{Re}(\psi_1 a^{(1)} \dot{x}_s(0) + \psi_1 a^{(4)} x_s(0) + \psi_1 a^{(5)} x_{T1}(0) + \psi_1 a^{(6)} x_{T2}(0)) \\ &= \text{Re}(\psi_1 a^{(1)}) \dot{x}_s(0) + \text{Re}(\psi_1 a^{(4)}) x_s(0) + \text{Re}(\psi_1 a^{(5)}) x_{T1}(0) + \text{Re}(\psi_1 a^{(6)}) x_{T2}(0) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \text{Im}(\psi_1 a^{(1)} \dot{x}_s(0) + \psi_1 a^{(4)} x_s(0) + \psi_1 a^{(5)} x_{T1}(0) + \psi_1 a^{(6)} x_{T2}(0)) \\ &= \text{Im}(\psi_1 a^{(1)}) \dot{x}_s(0) + \text{Im}(\psi_1 a^{(4)}) x_s(0) + \text{Im}(\psi_1 a^{(5)}) x_{T1}(0) + \text{Im}(\psi_1 a^{(6)}) x_{T2}(0) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

上式で未知変数が $x_{T1}(0)$ と $x_{T2}(0)$ の2個、連立方程式の数が2個であることから、解が一意に定まる。2個のTMDの固有振動数が等しい場合は、 $\text{real}(\psi_1 a^{(5)}) = \text{real}(\psi_1 a^{(6)})$ 、 $\text{imag}(\psi_1 a^{(5)}) = \text{imag}(\psi_1 a^{(6)})$ となり、解が不定となる。以下の節では、主振動系が初期変位または初期速度のみを有する場合を例に取り、2個のTMDの同調比の設定が主振動系の応答とTMD初期変位の大きさに与える影響を調べる。主振動系の初期条件は $x_s(0) = 0$ m、 $\dot{x}_s(0) = 1$ m/sを基準とし、5章で述べる主振動系の力学的全エネルギーの値が等しくなるように設定した。

3. 2 主振動系の初期条件が初期速度のみを有するとき

2個のTMD（TMD1、TMD2）の同調比を仮に① $\gamma_1 = 1.2$ 、 $\gamma_2 = 0.8$ と② $\gamma_1 = 1.2$ 、 $\gamma_2 = 1.1$ に設定した場合の二つのケースを比較する。

① $\gamma_1 = 1.2$ 、 $\gamma_2 = 0.8$ のとき

3個のモードの非減衰固有円振動数、減衰固有振動数、モード減衰比を以下に示す。

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 9.917, \omega_2 = 7.988, \omega_3 = 12.12 \text{ (rad/s)} \\ \omega_{1D} &= 9.912, \omega_{2D} = 7.744, \omega_{3D} = 11.74 \text{ (rad/s)} \\ \xi_1 &= 0.03221, \xi_2 = 0.2455, \xi_3 = 0.2478 \end{aligned}$$

本モデルの1次モード減衰比は、2次モードと3次モードの約0.13倍と非常に小さい。2.3節で述べた初期変位の付与により1次モードを消去する条件は、1次モードの応答が支配的となる通常のTMDでは不可能な高い減衰を構造物に与え、外力により生じる構造物の応答変位を小さく、且つ速やかに低減させることが可能となることが期待できる。固有ベクトルのうちの変位ベクトルは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_1 &= \begin{Bmatrix} -0.01079 \mp 0.03016i \\ -0.05254 \mp 0.04821i \\ -0.04056 \pm 0.02709i \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\psi}_2 = \begin{Bmatrix} -0.0006633 \mp 0.001150i \\ -0.0009218 \mp 0.002207i \\ -0.1052 \pm 0.003568i \end{Bmatrix}, \\ \boldsymbol{\psi}_3 &= \begin{Bmatrix} -0.001329 \mp 0.001048i \\ 0.02087 \pm 0.07924i \\ 0.0006538 \pm 0.001327i \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

(12)式と(13)式は、以下になる。

$$-0.01079 + 0.002424y_1(0) - 0.003755y_2(0) = 0 \quad (14)$$

$$-0.03016 - 0.006144y_1(0) - 0.001802y_2(0) = 0 \quad (15)$$

上式の TMD1 と TMD2 の初期変位 $y_1(0)$ (m)と $y_2(0)$ (m)の関係を Fig.4 に示す。黒丸で示した 2 本の直線の交点が 1 次モードの応答を消去する TMD 初期変位 $y_1(0) = -3.419$ m, $y_2(0) = -5.081$ m である。

Fig. 4 Relationship between initial displacements of two TMDs

② $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.1$ のとき

$$\omega_1 = 9.809, \omega_2 = 11.10, \omega_3 = 12.13$$

$$\omega_{1D} = 9.804, \omega_{2D} = 10.75, \omega_{3D} = 11.75$$

$$\xi_1 = 0.03185, \xi_2 = 0.2465, \xi_3 = 0.2472$$

変位ベクトルは以下になる。

$$\psi_1 = \begin{Bmatrix} -0.02207 \pm 0.03237i \\ -0.01174 \pm 0.08450i \\ 0.009168 \pm 0.09558i \end{Bmatrix}, \psi_2 = \begin{Bmatrix} 0.001360 \pm 0.0001620i \\ 0.009283 \pm 0.002700i \\ -0.04131 \pm 0.05521i \end{Bmatrix},$$

$$\psi_3 = \begin{Bmatrix} -0.001465 \pm 0.001063i \\ 0.02164 \pm 0.07779i \\ 0.004982 \pm 0.007266i \end{Bmatrix}$$

(12)式と(13)式は以下になる。

$$-0.02207 - 0.007673y_1(0) - 0.007670y_2(0) = 0 \quad (16)$$

$$0.03237 + 0.001762y_1(0) + 0.004100y_2(0) = 0 \quad (17)$$

上式の TMD1 と TMD2 の初期変位 $y_1(0)$ (m)と $y_2(0)$ (m)の関係を Fig.5 に示す。黒丸で示した 2 本の直線の交点が求める初期変位 $y_1(0) = 8.795$ m, $y_2(0) = -11.68$ m である。① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ と比較すると、実数値に関する直線と虚数値に関する直線の勾配が近くなり、交点が原点から遠くなっている。

Fig. 5 Relationship between initial displacements of two TMDs

Fig.6 に既往の研究⁹⁾で述べた質量比が 2% の TMD が 1 個の場合に 1 次モードを消去する初期変位 $y(0) = -2.127 - 0.1097i$ (m)の実数値のみ与えた場合と、TMD が 2 個で① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ の場合、② $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.1$ の場合の自由振動応答曲線を比較する。TMD が 1 個の場合は 1 次モードの応答を完全に消去できないため、5 秒以降も残留振動が見られる。① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ の 2 個の TMD を用いる場合は、同一質量の 1 個の TMD を用いる場合よりも応答低減効果が大きい。一方、② $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.1$ の場合は応答が大きくなる。これは後述するように、1 次モードを消去した残りの 2 次モードと 3 次モードの応答の振幅の大きさが異なり、②の場合の方が大きいためである。

Fig. 6 Comparison of free vibration responses

制振効率をあらわす指標として、(18)式に示す主振動系の歪みエネルギー U_s と、(19)式に示す TMD に初期変位を付与することによる TMD の歪みエネルギー U_T を用いる。主振動系の歪みエネルギーには、主振動系の振動応答時間 T における歪みエネルギーの平均値を用い、時間 T は本論文では応答がほぼ収束する 2s を用いた。

$$U_s = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} K_s x_s(t)^2 dt \quad (18)$$

$$U_T = \frac{1}{2} k_{T1} y_{1(0)}^2 + \frac{1}{2} k_{T2} y_{2(0)}^2 \quad (19)$$

Fig.7 と Fig.8 に 2 個の TMD の同調比と主振動系、TMD の歪みエネルギーのコンター図を示す。値が 0.027 または 50 を超える領域は平面で切っている。両者のコンター曲面の形状は似ており、主振動系のエネルギーが小さい場合は TMD のエネルギーも小さい傾向が確認できる。主振動系のエネルギーが最も小さくなるのは 2 個の TMD の同調比が 1.20 と 0.73 のときであり、0.01190Nm である。2 個の TMD の同調比がともに 1 より小さいか 1 より大きい場合はエネルギーが非常に大きくなる。なお TMD が 1 個のときの主振動系と TMD のエネルギーはそれぞれ 0.02741Nm, 4.344Nm である。

Fig. 7 Relationship between structural energy and tuning ratios

Fig. 8 Relationship between TMD energy and tuning ratios

3. 3 主振動系の初期条件が初期変位のみを有するとき

主振動系の初期条件が $x_s(0) = -0.1010$ m, $\dot{x}_s(0) = 0$ m/s のときの TMD の同調比と制振効果の関係を調べる。文献 6) で述べたように、この場合は 1 個の TMD では 1 次モードを消去できない。1 次モードの応答を消去する初期変位は ① $\gamma_1 = 1.2$, $\gamma_2 = 0.8$ の場合が $x_{T1}(0) = 3.530$ m, $x_{T2}(0) = -5.839$ m, ② $\gamma_1 = 1.2$, $\gamma_2 = 1.1$ の場合が $x_{T1}(0) = 16.93$ m, $x_{T2}(0) = -12.70$ m である。両者の自由振動応答曲線を Fig.9 で比較する。前節で述べた初期速度のみを有する初期条件の場合と同様に ① $\gamma_1 = 1.2$, $\gamma_2 = 0.8$ の場合の方が制振効果が高い。

Fig.10 と Fig.11 に 2 個の TMD の同調比と主振動系、TMD の歪みエネルギーのコンター図を示す。初期条件が初期速度のみを有する場合とコンター形状は同様の傾向が見られるが、主振動系のエネルギーは 2 個の TMD の同調比の間隔が大きくなるほど小さくなる。TMD のエネルギーは 2 個の TMD の同調比が 1.22 と 0.80 のときに最も小さくなり、19.95Nm である。

Fig. 9 Comparison of free vibration responses

Fig. 10 Relationship between structural energy and tuning ratios

Fig. 11 Relationship between TMD energy and tuning ratios

3. 4 3 個の TMD を用いた場合

主振動系の初期条件は前節と同じ $x_s(0) = -0.1010$ m, $\dot{x}_s(0) = 0$ m/s とする。(11)式は以下になる。

$$\psi_1 a^{(5)} x_s(0) + \psi_1 a^{(6)} x_{T1}(0) + \psi_1 a^{(7)} x_{T2}(0) + \psi_1 a^{(8)} x_{T3}(0) = 0 \quad (20)$$

TMD が 2 個のときと同様に、上式を実部の項と虚部の項に分けると以下の二式が得られる。

$$\begin{aligned} & \text{Re}(\psi_1 a^{(5)} x_s(0) + \psi_1 a^{(6)} x_{T1}(0) + \psi_1 a^{(7)} x_{T2}(0) + \psi_1 a^{(8)} x_{T3}(0)) \\ &= \text{Re}(\psi_1 a^{(5)}) x_s(0) + \text{Re}(\psi_1 a^{(6)}) x_{T1}(0) + \text{Re}(\psi_1 a^{(7)}) x_{T2}(0) + \text{Re}(\psi_1 a^{(8)}) x_{T3}(0) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \text{Im}(\psi_1 a^{(5)} x_s(0) + \psi_1 a^{(6)} x_{T1}(0) + \psi_1 a^{(7)} x_{T2}(0) + \psi_1 a^{(8)} x_{T3}(0)) \\ &= \text{Im}(\psi_1 a^{(5)}) x_s(0) + \text{Im}(\psi_1 a^{(6)}) x_{T1}(0) + \text{Im}(\psi_1 a^{(7)}) x_{T2}(0) + \text{Im}(\psi_1 a^{(8)}) x_{T3}(0) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

上式を整理して、以下のように示す。

$$A_r x_{T1}(0) + B_r x_{T2}(0) + C_r x_{T3}(0) + D_r = 0 \quad (23)$$

$$A_i x_{T1}(0) + B_i x_{T2}(0) + C_i x_{T3}(0) + D_i = 0 \quad (24)$$

Fig.12 に示すように上式は TMD 初期変位 $x_{T1}(0)$, $x_{T2}(0)$, $x_{T3}(0)$ で構成される三次元空間に存在する平面を表す。二式を同時に満たす解は 2 つの平面の交線である。(23),(24)式より交線の式は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{x_{T1}(0)}{(B_r C_i - B_i C_r)} &= \frac{x_{T2}(0) + (D_r C_i - D_i C_r) / (B_r C_i - B_i C_r)}{-(A_r C_i - A_i C_r)} \\ &= \frac{x_{T3}(0) + (D_r B_i - D_i B_r) / (C_r B_i - C_i B_r)}{(A_r B_i - A_i B_r)} \end{aligned} \quad (25)$$

同じ質量を有する 3 個の TMD の同調比が $\gamma_1 = 1.3$, $\gamma_2 = 1.1$, $\gamma_3 = 0.9$ の場合について検討する。TMD の減衰比と合計質量は TMD が 2 個の場合と同じとする。交線の原点からの最短距離である垂線の足 (Fig.12 の A 点) の座標は $(x_{T1}(0), x_{T2}(0), x_{T3}(0)) = (5.708, 2.222, -6.213)$ となる。Fig.13 に垂線の足の TMD 初期変位を用いた場合 (Case A) と、垂線の足以外の交線上の点 $(x_{T1}(0), x_{T2}(0), x_{T3}(0)) = (0.8, 12.3, -9.347)$ を用いた場合 (Case B) の自由振動応答曲線を比較する。Case A の方が振幅が小さく制振効果が高いことが確認できる。一方、Fig.9 で述べた TMD が 2 個で同調比が ① $\gamma_1 = 1.2$, $\gamma_2 = 0.8$ の場合と比較すると制振効果は同程度である。

以上より、複数個の TMD を用いたときの TMD 初期変位の大きさと主振動系の応答の大きさには相関があり、1 次モードを消去する TMD 初期変位が小さいほど主振動系の応答が小さい傾向があることが分かった。

Fig. 12 Relationship between initial displacements of three TMDs

Fig. 13 Comparison of free vibration responses

4. 固有ベクトルを用いた考察

前章で、TMD 同調比の設定と TMD 初期変位、主振動系の応答の関係を調べた。本章では TMD が 2 個の場合を例にとり、主振動系／TMD で構成される全体系の初期条件を固有モードベクトルに分解し、複素平面上で固有ベクトルの和で表すことにより、前章で述べた検討結果について考察する。

4. 1 解の存在条件

2 個の TMD を用い、全体が 3 自由度系のモデルの固有ベクトルを $\mathbf{\kappa}_1, \mathbf{\kappa}_2, \mathbf{\kappa}_3$ とすると、一般直交性より以下の(26)式が成り立つ。

$$\mathbf{\kappa}_1 \mathbf{a} \mathbf{\kappa}_2 = 0, \quad \mathbf{\kappa}_1 \mathbf{a} \mathbf{\kappa}_3 = 0 \quad (26)$$

上式はベクトル $\mathbf{\kappa}_1 \mathbf{a}$ が 2 次と 3 次の固有ベクトル $\mathbf{\kappa}_2$ と $\mathbf{\kappa}_3$ で形成される平面に直交することを意味している。3 次元空間における固有ベクトルの関係のイメージ図を Fig.14 に示す。

Fig. 14 Relationships between three eigenvectors

ベクトル $\mathbf{\kappa}_1 \mathbf{a}$ に直交する平面は一つしか存在しないため、初期変位解法条件式(7)式の初期条件ベクトル $\hat{\mathbf{u}}(0)$ は、2 次と 3 次の固有ベクトルで形成される平面上に存在する。よって、初期条件ベクトルは以下のように 2 次と 3 次の固有ベクトルの線形和で表すことができる。

$$\hat{\mathbf{u}}(0) = u \mathbf{\kappa}_2 + v \mathbf{\kappa}_3 \quad (27)$$

上式が(7)式の初期変位解法条件式を満たすことは(26)式より明らかである。よって、(27)式を満足する実数の係数 u, v が存在するとき、初期変位解法条件式を満たす解が存在することになる。なお、TMD の個数が 3 個以上の場合には、初期条件ベクトルは超平面上に存在する。

全体系の初期条件を、主振動系の変位と速度がそれぞれ A, B 、2 個の TMD (TMD1 と TMD2) の速度が 0 とする。一般粘性減衰系の固有ベクトルは複素数であらわされるため、複素平面上の実数値で解の存在条件を表すと以下ようになる。

①主振動系の初期条件式

$$\begin{aligned} \text{Re}\{u S_D^{2nd}(\alpha) + v S_D^{3rd}(\beta)\} &= A \\ \text{Re}\{u S_V^{2nd}(\alpha + \theta_V^{2nd}) + v S_V^{3rd}(\beta + \theta_V^{3rd})\} &= B \end{aligned} \quad (28)$$

②TMD の初期条件式

$$\begin{aligned} \text{Re}\{u T_1^{2nd}(\alpha + \theta_V^{2nd} + \theta_1^{2nd}) + v T_1^{3rd}(\beta + \theta_V^{3rd} + \theta_1^{3rd})\} &= 0 \\ \text{Re}\{u T_2^{2nd}(\alpha + \theta_V^{2nd} + \theta_2^{2nd}) + v T_2^{3rd}(\beta + \theta_V^{3rd} + \theta_2^{3rd})\} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

上式で S, T_1, T_2 は、主振動系、TMD1、TMD2 の固有ベクトルであることを示す。上付き記号はモード次数、下付き記号 D, V は変位と速度に関する物理量であることを示す。 α, β は複素平面での偏角に係る変数であり、 θ は全て固定値である。

(28)式と(29)式に示すように、TMD が 2 個の場合、未知変数は固有ベクトルの大きさに係る u, v と複素平面での偏角に係る α, β の 4 個であり、連立方程式の数と一致するため解は一意に定まる。一般に

TMD の個数が N 個のとき、未知量数は N 個のモードの固有ベクトルに係る大きさと偏角の $2N$ 個であり、初期条件の連立方程式の数は主振動系の初期条件 2 個と TMD の初期条件 N 個の和 $N+2$ 個となる。よって、未知量と連立方程式の数の差は、 $N-2$ 個である。以上より、TMD の個数と解の関係は以下になる。

- ①TMD が 1 個のときには、解は存在しない。
 - ②TMD が 2 個のときには、解は一意に定まる。
 - ③TMD が 3 個以上のときには、解が不定となり、無数に存在する。
- これは既往の研究⁶⁾ および前章の結果と一致する。

4. 2 初期条件の固有モード分解

本節では、前章で述べた 2 個の TMD の同調比の設定と主振動系の応答、TMD 初期変位の関係について、初期条件式(28)式と(29)式を用いて考察する。主振動系の初期条件は、3. 3 節と同じ $x_s(0) = -0.1010$ m, $\dot{x}_s(0) = 0$ m/s とする。

① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ の場合

主振動系の自由振動応答変位は以下の(30)式で表される。非減衰固有円振動数 ω_{2D}, ω_{3D} については、3. 2 節①に示した。

$$x_s(t) = e^{-0.2455\omega_d t} \times 0.07682 \sin(\omega_{2D}t + \theta_2) + e^{-0.2478\omega_d t} \times 0.07653 \sin(\omega_{3D}t + \theta_3) \quad (30)$$

ここで、 $\theta_2 = -42.42$ (deg.), $\theta_3 = -140.0$ (deg.)

TMD1 の自由振動応答変位は以下の式で表される。

$$x_{T1}(t) = e^{-0.2455\omega_d t} \times 0.1385 \sin(\omega_{2D}t + \theta_2) + e^{-0.2478\omega_d t} \times 3.705 \sin(\omega_{3D}t + \theta_3) \quad (31)$$

ここで、 $\theta_2 = -35.10$ (deg.), $\theta_3 = 76.97$ (deg.)

TMD2 の自由振動応答変位は以下の式で表される。

$$x_{T2}(t) = e^{-0.2455\omega_d t} \times 6.090 \sin(\omega_{2D}t + \theta_2) + e^{-0.2478\omega_d t} \times 0.06687 \sin(\omega_{3D}t + \theta_3) \quad (32)$$

ここで、 $\theta_2 = -104.4$ (deg.), $\theta_3 = 65.49$ (deg.)

(30)式～(32)式を $\sin \theta = \cos(\pi/2 - \theta)$ の関係を用いて、 $t = 0$ のときの初期変位条件を複素平面上で 2 次モードと 3 次モードの変位ベクトルの和で表すと Fig.15 のようになる。実軸の値が実際の変位に対応する。(28)式と(29)式における α, β は $132.4, 230.0$ (deg.)であり、 $\theta_1^{2nd}, \theta_1^{3rd}$ は $-7.3, 143.0$ (deg.), $\theta_2^{2nd}, \theta_2^{3rd}$ は $62.0, 154.5$ (deg.)である。2 次モードと 3 次モードの主振動系の変位ベクトルの和の実軸への投影長さは、主振動系の初期条件 $x_s(0) = -0.1010$ m である。TMD1 と TMD2 における 2 個のモードの実軸への投影長さの和は、3. 3 節で述べた TMD 初期変位 $x_{T1}(0) = 3.530$ m, $x_{T2}(0) = -5.839$ m である。

Fig. 15 Initial displacement condition on the complex plane

② $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.1$ の場合

主振動系の自由振動応答変位は以下の(33)式のように表される。非減衰固有円振動数 ω_{2D}, ω_{3D} については、3. 2 節②に示した。

$$x_s(t) = e^{-0.2465\omega_d t} \times 0.2939 \sin(\omega_{2D}t + \theta_2) + e^{-0.2472\omega_d t} \times 0.3571 \sin(\omega_{3D}t + \theta_3) \quad (33)$$

ここで、 $\theta_2 = 27.47$ (deg.), $\theta_3 = -138.5$ (deg.)

TMD1 の自由振動応答変位は以下のように表される。

$$x_{T1}(t) = e^{-0.2465\omega_d t} \times 2.075 \sin(\omega_{2D}t + \theta_2) + e^{-0.2472\omega_d t} \times 15.93 \sin(\omega_{3D}t + \theta_3) \quad (34)$$

ここで, $\theta_2 = 36.90$ (deg.), $\theta_3 = 79.97$ (deg.)

TMD2 の自由振動応答変位は以下のように表される。

$$x_{T2}(t) = e^{-0.2465\omega_d t} \times 14.80 \sin(\omega_{2D}t + \theta_2) + e^{-0.2472\omega_d t} \times 1.738 \sin(\omega_{3D}t + \theta_3) \quad (35)$$

ここで, $\theta_2 = -106.1$ (deg.), $\theta_3 = 61.08$ (deg.)

$t=0$ のときの初期変位条件を複素平面上で 2 次モードと 3 次モードのベクトルの和で表すと Fig.16 のようになる。(28)式と(29)式における α, β は $62.5, 228.5$ (deg.)であり, $\theta_1^{2nd}, \theta_1^{3rd}$ は $-9.4, 141.5$ (deg.), $\theta_2^{2nd}, \theta_2^{3rd}$ は $133.6, 160.4$ (deg.)である。

Fig. 16 Initial displacement condition on the complex plane

以上のように, ② $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.1$ の場合は① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ の場合と比較して, 主振動系に対する 2 次モードの TMD2 の位相差が 62.0 (deg.)から 133.6 (deg.)へ大きく変化している。また, Fig.15 と Fig.16 に示すように, 2 次モードと 3 次モードの主振動系のベクトルが存在する象限が, ① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ の場合は第 2 象限と第 3 象限で実軸に関して隣り合っていたのに対して, ② $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.1$ の場合は第 1 象限と第 3 象限と原点に関して対称の位置に存在する。

参考のために, 初期速度の条件に関して, ① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ の場合を複素平面上で Fig.17 に示す。主振動系と TMD の初期速度が 0 となる条件を満たしていることが確認できる。なお, 速度ベクトルと変位ベクトルの位相差 $\theta_v^{2nd}, \theta_v^{3rd}$ は各モードで共通であり, ① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ の場合は 2 次と 3 次でそれぞれ $104.2, 104.4$ (deg.), ② $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.1$ の場合は $104.3, 104.3$ (deg.)とほぼ同じである。これは 2 次モードと 3 次モードの減衰比の値が非常に近いためである。

Fig. 17 Initial velocity condition on the complex plane

初期変位条件に関する考察結果に基づき, 主振動系の初期変位ベクトルが複素平面上に存在する象限を Fig.18 に示す。2 個の TMD の同調比 γ_1, γ_2 がともに 1 より小さいか 1 より大きい場合は原点に対して

対称の位置にある象限に存在し, それ以外の場合は実軸に対して隣り合う象限に存在する。これは Fig.10, Fig.11 のエネルギーのコンター図において, TMD の同調比がともに 1 より小さいか 1 より大きい場合はエネルギーが非常に大きくなる性状と対応する。主振動系の初期条件が $x_s(0) = 0$ m, $\dot{x}_s(0) = 1$ m/s のときに主振動系の初期速度ベクトルが存在する象限を Fig.19 に示す。Fig.18 の場合と同様に, TMD の同調比がともに 1 より小さいか 1 より大きい場合は原点または虚軸に対して対称の位置にある象限に存在し, それ以外の場合は実軸に関して隣り合う象限または同じ象限に位置し, Fig.7, Fig.8 のエネルギー曲面の性状と対応している。

γ_1	γ_2	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
0.70														
0.75		4,2						3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	2,3	2,3
0.80		4,2	4,2					3,2	3,2	3,2	2,3	2,3	2,3	2,3
0.85		4,2	4,2	4,2				3,2	3,2	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3
0.90		4,2	4,2	4,2	4,2			4,2	3,2	3,2	2,3	2,3	2,3	2,3
0.95		4,2	4,2	4,2	4,2	4,2		3,2	3,2	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3
1.00		3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2		3,1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
1.05		3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,1	3,1		3,1	1,3	1,3	1,3	1,3
1.10		3,2	3,2	3,2	2,3	2,3	2,3	1,3	3,1	3,1		3,1	1,3	1,3
1.15		3,2	3,2	2,3	2,3	2,3	2,3	1,3	1,3	3,1	3,1		3,1	1,3
1.20		3,2	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	1,3	1,3	3,1	3,1	3,1		3,1
1.25		2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	1,3	1,3	1,3	3,1	3,1	3,1	
1.30		2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	1,3	1,3	1,3	1,3	3,1	3,1	3,1

Fig. 18 Quadrants of initial structural vectors (displacement condition)

γ_1	γ_2	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
0.70			1,3	1,3	1,3	1,3	4,3	4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	1,4	1,4
0.75		1,3		1,3	1,3	1,3	4,3	4,4	4,1	4,1	4,1	1,4	1,4	1,4
0.80		1,3	1,3		1,3	1,3	4,3	4,4	4,1	4,1	1,4	1,4	1,4	1,4
0.85		1,3	1,3	1,3		1,3	1,3	4,4	4,1	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
0.90		1,3	1,3	1,3	1,3		1,3	4,4	4,1	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
0.95		4,3	4,3	4,3	1,3	1,3		4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4
1.00		4,1	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4		2,4	4,2	4,2	4,2	4,2	4,2
1.05		4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	4,4	2,4		2,4	4,2	4,2	4,2	4,2
1.10		4,1	4,1	4,1	1,4	1,4	4,4	4,2	2,4		2,4	4,2	4,2	4,2
1.15		4,1	4,1	1,4	1,4	1,4	4,4	4,2	4,2	2,4		2,4	4,2	4,2
1.20		4,1	1,4	1,4	1,4	1,4	4,4	4,2	4,2	4,2	2,4		2,4	4,2
1.25		1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	4,4	4,2	4,2	4,2	4,2	2,4		2,4
1.30		1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	4,4	4,2	4,2	4,2	4,2	4,2	2,4	

Fig. 19 Quadrants of initial structural vectors (velocity condition)

Fig.20 は同じ主振動系の初期変位条件 $x_s(0)$ を有するときに, 2 次モードと 3 次モードの主振動系の初期変位ベクトル $\vec{x}_s^{(2)}, \vec{x}_s^{(3)}$ が存在する象限の違いが 2 個のモードの変位ベクトルの大きさに与える影響を説明した図である。(a)の実軸に対して隣り合う象限に存在する場合は, 初期条件が各モードの実軸への投影長さの和となる。一方, (b)の原点に対して対称の象限に存在する場合は, 初期条件が各モードの実軸への投影長さの差となるため, 2 個のモードの実軸への投影長さの和は初期条件 $x_s(0)$ よりも大きくなる。前述の② $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.1$ は Fig.20(b)の場合に相当し, (a)の① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ の場合と比較して, 初期変位ベクトルの大きさは 2 次モードで 3.83 倍, 3 次モードで 4.67 倍に大きくなる。

(a) Adjacent quadrant (b) Symmetrical quadrant
Fig. 20 Comparison of arrangement of initial structural vectors

以下では、主振動系の初期条件について、複素平面上で2次モードと3次モードの存在する象限が異なる要因を調べる。ここでは、2次と3次の固有ベクトルに関して、2個のTMDの同調比が変化した場合における主振動系を基準としたTMD固有ベクトルの大きさと位相差の変化に着目する。Fig.15とFig.16の結果に基づいて、2次モードと3次モードのTMD1固有ベクトルのうちの大きい方のモードを選択し、主振動系の固有ベクトルの大きさに基準化したTMD1固有ベクトルの絶対値をFig.21に、TMD1固有ベクトルの主振動系に対する位相差をFig.22に示す。両図ともTMD1とTMD2の同調比が等しくなる近傍では値の変化が大きくなる。

Fig.21に示すTMD1固有ベクトルの大きさに関して、TMD2の同調比 γ_2 の変動に対してはあまり敏感でない。一方、TMD1の同調比 γ_1 の変動に対し、 γ_1 が0.8よりも大きい場合は値の変化が小さいが、0.7に近づくときと急激に大きくなる。Fig.22に示すTMD1固有ベクトルの主振動系に対する位相差に関して、TMD2の同調比 γ_2 の変動に対してはあまり敏感ではないが、TMD1の同調比 γ_1 の変動に対しては変化が大きい。これはFig.16で説明した① $\gamma_1=1.2$ 、 $\gamma_2=0.8$ のときはTMD2の位相差が62.0(deg.)であるが、② $\gamma_1=1.2$ 、 $\gamma_2=1.1$ のときは133.6(deg.)とTMD2の位相差が大きく変化することに対応する。 $\gamma_1=1.0$ のときの位相差は約100~110(deg.)である。以上のことから、2個のTMDの同調比の設定の違いが主振動系の初期条件の存在象限に与える影響は、位相差の変化によるもの大きいと考えられる。

Fig. 21 Absolute value of TMD1 eigenvector

Fig. 22 Phase difference of TMD1 eigenvector

5. TMD power flow を用いた考察

本章では、初期変位付与型TMDの制振効果および2個のTMDの同調比の設定が制振効果に与える影響について、Soong, T.T.とDargush, G.F.により提案されたエネルギー指標であるTMD power flow¹⁴⁾を用いて考察する。

5. 1 定式化と初期変位付与型TMDにおけるpower flow

最初に、TMDが1個の場合の初期変位付与型TMDの制振効果をTMD power flowを用いて確認する。Fig.1に示す主振動系と1個のTMDからなる2自由度系の自由振動運動方程式は以下の式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & m_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_T \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s + c_T & -c_T \\ -c_T & c_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_T \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s + k_T & -k_T \\ -k_T & k_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s \\ x_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

TMDの主振動系に対する相対変位を y とすると、上式は以下のよう表すことができる。

$$M_s \ddot{x}_s + C_s \dot{x}_s + K_s x_s = c_T \dot{y} + k_T y \quad (37)$$

$$m_T \ddot{y} + c_T \dot{y} + k_T y = -m_T \ddot{x}_s \quad (38)$$

(38)式を(37)式に代入すると、以下の式が得られる。

$$(M_s + m_T) \ddot{x}_s + C_s \dot{x}_s + K_s x_s + m_T \ddot{y} = 0 \quad (39)$$

Soong, T.T.らは(39)式に $\dot{x}_s$ を乗じ、調和外力が作用した場合の第4項の1サイクルの時間平均 $m_T \langle \dot{x}_s \ddot{x}_s \rangle$ を主振動系からTMDへのpower flowと定義し、定常調和応答の場合におけるTMDの制振効果を表す指標として用いた¹⁴⁾。

(39)式を主振動系の変位で積分すると、以下のようになる。

$$\int (M_s + m_T) \ddot{x}_s dx_s + \int C_s \dot{x}_s dx_s + \int K_s x_s dx_s + \int m_T \ddot{y} dx_s = E_s \quad (40)$$

上式で E_s は定数であり、自由振動の場合は外部からエネルギーが入力されずエネルギー保存則が成立するため、主振動系の初期条件により付与された一定の値となる。(40)式に $dx_s = (dx_s/dt)dt = \dot{x}_s dt$ を代入すると以下のようになる。

$$(M_s + m_T) \int \dot{x}_s \ddot{x}_s dt + C_s \int \dot{x}_s^2 dt + K_s \int x_s \dot{x}_s dt + m_T \int \ddot{y} \dot{x}_s dt = E_s \quad (41)$$

以下の(42)式の関係を用いると、(41)式は(43)式のように書き表すことができる。

$$\frac{d(x_s^2)}{dt} = \frac{d(x_s^2)}{dx_s} \frac{dx_s}{dt} = 2x_s \dot{x}_s, \quad \frac{d(\dot{x}_s^2)}{dt} = \frac{d(\dot{x}_s^2)}{d\dot{x}_s} \frac{d\dot{x}_s}{dt} = 2\dot{x}_s \ddot{x}_s \quad (42)$$

$$\frac{1}{2}(M_s + m_T) \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}K_s x_s^2 + C_s \int \dot{x}_s^2 dt + m_T \int \ddot{y} \dot{x}_s dt = E_s \quad (43)$$

上式で主振動系のエネルギーを消費する減衰効果は、主振動系の減衰による項 $C_s \int \dot{x}_s^2 dt$ とTMDによる付加減衰を表すTMD power flowの項 $m_T \int \ddot{y} \dot{x}_s dt$ の和となる。 $m_T \int \ddot{y} \dot{x}_s dt$ の項中の $\ddot{y} \dot{x}_s$ で分かるようにTMDの制振効果を評価するためには、主振動系とTMDの応答の相対的な関係に着目する必要がある。また、初期変位付与型TMDにおける初期変位の付与効果は $m_T \int \ddot{y} \dot{x}_s dt$ の項における $\ddot{y}$ 、すなわちTMDの主振動系に対する相対加速度の大きさの増加と考えられる。

既往の研究⁶⁾より、TMDが1個の場合、主振動系の初期条件が $x_s(0)=0$ 、 $\dot{x}_s(0) \neq 0$ のときは1次モードの応答をほぼ消去可能なことが分かっている。そこで、主振動系の初期条件を $x_s(0)=0$ m、 $\dot{x}_s(0)=1$ m/sに設定して検討する。TMDの質量比は2%とし、同調比は(5)式を用いて0.9787、減衰比はTMDが2個の場合と同じ0.2517に設定する。なお、主振動系の初期条件が $x_s(0) \neq 0$ 、 $\dot{x}_s(0)=0$ のときに1次モードの応答をほぼ消去可能な解、すなわち初期変位付与型TMDとして有意な解が存在しないのは、2次モードのTMDと主振動系の固有ベクトルの位相差が-100.5(deg.)であるため、主振動系とTMDの速度がともに0となる条件 $\dot{x}_s(0)=\dot{x}_T(0)=0$ を満足する解が存在しないためである。

Fig.23(a)に初期変位が無い場合における(43)式の各項、すなわち主振動系の運動エネルギー、歪みエネルギー、減衰エネルギー、TMD power flow の時刻歴の推移を示す。主振動系の減衰エネルギー、TMD power flow の増加に伴い、運動エネルギーと歪みエネルギーが時間の経過とともに減少していることが分かる。3. 2 節で述べた TMD 初期変位 $y(0) = -2.127 - 0.1097i$ (m) のうち、実数値 -2.127 m のみを用いた場合における TMD power flow の時刻歴の推移を Fig.23(b)に示す。振動開始直後から TMD power flow が急激に増加し、運動エネルギーと歪みエネルギーが大きく減少しており、初期変位付与型 TMD による大きな付加減衰効果が確認できる。

Fig. 23 Time histories of one TMD power flow

5. 2 2 個の TMD の同調比の設定による power flow の比較

本節では、2 個の TMD の同調比の設定が異なるときの TMD power flow の時刻歴の推移を比較する。主振動系の初期条件は $x_s(0) = -0.1010$ m, $\dot{x}_s(0) = 0$ m/s とする。

3. 3 節で述べた 1 次モードを消去する TMD 初期変位を与え、2 個の TMD の同調比が① $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.8$ の場合を Fig.24(a)に、② $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.1$ の場合を Fig.24(b)に示す。TMD1 の power flow について、①の場合は応答初期の 0.20s までは負の値であるが、その後は正の値となる。②の場合は時刻歴全体で負の値である。TMD2 の power flow 値は②の場合の方が大きい。最終的な TMD1 と TMD2 の合計の power flow 値は、①の場合が 0.4439、②の場合が 0.3848 であり、①の方が TMD の付加減衰効果が高い。TMD1 の最終的な power flow 値は①の場合が 0.1632、②の場合が -0.6493 である。

(43)式の 2 個の TMD の付加減衰は $m_{T1} \int \ddot{y}_1 \dot{x}_s dt, m_{T2} \int \ddot{y}_2 \dot{x}_s dt$ で表され、2 個の TMD の相対加速度と主振動系の速度の積の時間積分となる。Fig.25 に TMD の同調比が①と②の場合における 2 個の TMD の相対加速度、主振動系の速度の時刻歴応答を比較する。図中には主振動系の速度が正または負となる時間領域も示す。①の場合は最初に主振動系の応答速度が 0 となる $t = 0.30$ s 以降は TMD1, TMD2 の相対加速度と主振動系の速度がほぼ同じ位相で振動している。一方、②の場

合は TMD1 が時刻歴全体に亘って主振動系と TMD2 のほぼ逆位相で振動している。1 次モードの応答が生じないことは①と②で共通であるが、4. 2 節で述べた固有ベクトルの位相差の違いが時刻歴における応答性状の違いとなって表れ、結果的に①の場合の方が TMD の初期変位の大きさが小さいにも係らず、2 個の TMD による power flow の合計値が大きく、制振効果が高くなっていると考えられる。

Fig. 24 Time histories of two TMDs power flow

Fig. 25 Comparison of time history responses

6. まとめ

本論文では、初期変位の無い通常の TMD では不可能な高い減衰を構造物に与えることが可能となる初期変位付与型 TMD について、地震動を受けた建築構造における応答制御効果を検討する前段階として、自由振動を対象に 3 自由度系の基本的なモデルを用い、2 個の TMD の同調比の設定が制振効果に与える影響を考察した。

本論文の結論を以下の 1) ～ 3) にまとめる。

1) 2 個の TMD の同調比の設定により、1 次モードの応答を消去するために必要な TMD 初期変位の大きさと主振動系の応答の大きさが異なる。TMD 初期変位の大きさと主振動系の応答の大きさには相関があり、2 個の TMD の同調比がともに 1 より小さいかともに 1 より大きい場合は、初期変位による TMD の歪みエネルギーと振動応答時間における歪みエネルギーの平均値が非常に大きくなることが分かった。

2) 初期条件を複素平面上で固有モードベクトルに分解し、1) の検討の結果得られた 1 次モードの応答を消去する TMD 初期変位の大きさと主振動系の応答の大きさに相関がある理由を明らかにした。さらに、TMD の同調比の設定により TMD と主振動系の位相差が変化する結果、2 個の TMD の同調比がともに 1 より小さいかともに 1 より大きい場合は TMD 初期変位と主振動系の応答が非常に大きくなることが分かった。

3) 初期変位付与型 TMD の制振効果および同調比の設定の違いが主振動系の応答に与える影響について、TMD による付加減衰効果を表すエネルギー指標である TMD power flow を用いて考察した。その結果、2 個の TMD の同調比がともに 1 より大きい場合は、初期変位が大きいにも係らず、1 個の TMD の power flow 値が時刻歴全体で負の値となり付加減衰の効率が劣ることが分かった。

今後は実際の建築構造モデルを用い、制振効果の向上とともに、初期変位の大きさを小さくするための手法の提案、及び初期変位の大きさから見た本手法の適用限界についても検討を進める予定である。

謝辞

本研究は、平成 28 年度科学研究費補助金基盤研究 (C)「空間構造の地震応答制御のための複数 TMD を用いた設計法の高度化」によるものである。また、日本大学名誉教授の新宮清志先生からは研究を進める上での貴重なご意見をいただきました。ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) Seto, K.: Dynamic Vibration Absorber and its Application, Corona, 2010 (in Japanese)
背戸一登: 動吸振器とその応用, コロナ社, 2010
- 2) Kaynia, A.M., Veneziano, D. and Biggs, J.M.: Seismic Effectiveness of Tuned Mass Dampers, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.107, ST8, pp. 1465-1484, 1981. 8
- 3) Kobori, T.: Seishin-kouzou (Seismic Response Controlled Structure), Kajima, 1993 (in Japanese)
小堀鐸二: 制震構造—理論と実際—, 鹿島出版会, 1993
- 4) Yoshinaka, S. and Taniguchi, Y.: Proposal of Design Formulas of Tuned Mass Dampers with Initial Displacement to Control Impulse Response Focusing on Vibration Modes, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol.78, No.688, pp. 1071-1079, 2013. 6 (in Japanese)
吉中進, 谷口与史也: 振動モードに着目したインパルス応答制御のための初期変位付与型 TMD 設計式の提案, 日本建築学会構造系論文集, 第 78 巻, 第 688 号, pp. 1071-1079, 2013. 6
- 5) Abe, M. and Igusa, T.: Semi-Active Dynamic Vibration Absorbers for Controlling Transient Response, Journal of Sound and Vibration, Vol.198 (5), pp. 547-569, 1996. 12

- 6) Yoshinaka, S. and Taniguchi, Y.: A Study on Conditions to Release Initial Displacement for Tuned Mass Dampers with Initial Displacement, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol.79, No.703, pp. 1247-1257, 2014. 9 (in Japanese)
吉中進, 谷口与史也: 初期変位付与型 TMD の初期変位解放条件に関する考察, 日本建築学会構造系論文集, 第 79 巻, 第 703 号, pp. 1247-1258, 2014. 9
- 7) Mitsufuji, T., Yoshinaka, S. and Taniguchi, Y.: Study on Vibration Control Using Tuned Mass Damper with Initial Displacement for Arch Model, AIJ Kinki Chapter Research Meeting, No.54, pp. 249-252, 2014. 6 (in Japanese)
光藤龍郎, 吉中進, 谷口与史也: アーチモデルにおける初期変位付与型 TMD による振動制御に関する研究, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第 54 号, pp. 249-252, 2014. 6
- 8) Yoshinaka, S., Taniguchi, Y. and Yamakawa, M.: Impact Testing of an Arch Model Using Tuned Mass Dampers with Initial Displacement, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol.81, No.722, pp. 735-745, 2016. 4 (in Japanese)
吉中進, 谷口与史也, 山川誠: 初期変位付与型 TMD を設置したアーチモデルの打撃試験, 日本建築学会構造系論文集, 第 81 巻, 第 722 号, pp. 735-745, 2016. 4
- 9) Yoshinaka, S. and Taniguchi, Y.: Optimal Initial Displacement and Control Effecting Time of Tuned Mass Dampers with Initial Displacement Subjected to Harmonic Base Excitations, AIJ Kinki Chapter Research Meeting, No.53, pp. 521-524, 2013. 6 (in Japanese)
吉中進, 谷口与史也: 調和地動加振を受けたときの初期変位付与型 TMD の最適初期変位と制振効果時間, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第 53 号・構造系, pp. 521-524, 2013. 6
- 10) Yoshinaka, S., Taniguchi, Y. and Yamakawa, M.: A Study on Control Effect of Tuned Mass Dampers with Initial Displacement under Earthquake Loading, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan, Structures-1, pp. 665-666, 2015. 9 (in Japanese)
吉中進, 谷口与史也, 山川誠: 初期変位付与型 TMD の地震力に対する制振効果に関する一考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 I, pp. 665-666, 2015. 9
- 11) Yamaguchi, H.: Damping of Transient Vibration by a Dynamic Absorber, Transactions of the JSME, Vol.54, No.499, pp. 561-568, 1988. 3 (in Japanese)
山口秀吉: 動吸振器による過渡振動の減衰, 日本機械学会論文集, 第 54 巻, 第 55 号, pp. 561-568, 1988. 3
- 12) Chopra, A.K.: Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, Fourth Edition, Chap.14: Analysis of Nonclassically Damped Linear Systems, Prentice Hall, 2011
- 13) Nagamatsu, A.: Introduction to Modal Analysis, Chap.3.1.5, Corona, 1993 (in Japanese)
長松昭男: モード解析入門, 3.1.5 固有モードの直交性, コロナ社, 1993
- 14) Soong, T.T. and Dargush, G.F.: Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering, John Wiley & Sons, 1997
- 15) Kozuru, K., Yoshinaka, S. and Taniguchi, Y.: Control Effect of Tuned Mass Dampers with Initial Displacement for Free Vibration Part1: The Effect of Plural Number and Tuning Ratios of Tuned Mass Dampers with Initial Displacement on Impulse Response, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan, Structures-2, pp. 197-198, 2016. 8 (in Japanese)
小鶴桂太, 吉中進, 谷口与史也: 自由振動における初期変位付与型 TMD の制振効果に関する研究 その 1 複数の初期変位付与型 TMD の個数と同調比がインパルス応答へ与える影響, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 II, pp. 197-198, 2016. 8
- 16) Yoshinaka, S. and Taniguchi, Y.: Control Effect of Tuned Mass Dampers with Initial Displacement for Free Vibration Part2: Evaluation by TMD Power Flow, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan, Structures-2, pp. 199-200, 2016. 8 (in Japanese)
吉中進, 谷口与史也: 自由振動における初期変位付与型 TMD の制振効果に関する研究 その 2 TMD power flow による制振効果の評価と解の存在条件に関する考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 II, pp. 199-200, 2016. 8

SETTINGS OF TUNING RATIOS OF TUNED MASS DAMPERS WITH INITIAL DISPLACEMENT

Susumu YOSHINAKA *, *Keita KOZURU* ** and *Yoshiya TANIGUCHI* ***

* Assoc. Prof., Urban Engineering, Faculty of Engineering, Osaka City University, Dr. Eng.

** Grad. Student, Faculty of Engineering, Osaka City University, M. Eng.

*** Prof., Urban Engineering, Faculty of Engineering, Osaka City University, Dr. Eng.

A TMD (Tuned Mass Damper) is a passive-type control device that consists of a small mass, a spring and a damper. And it absorbs the oscillation energy of structures as the kinetic energy of its mass and disperses it via its damper. The TMD shows high control performance for harmonic responses. On the other hand, the TMD has limited capacity to suppress transient responses. The reason is that there is some time delay before the TMD becomes fully effective because they are initially at rest.

Thus, to control the transient response more effectively, we propose TMDs with initial displacement, that is, dampers whose springs are stretched until the release moment.

In our previous study, we focused on the considerably high modal damping ratio of the second mode compared to the first mode based on the relationship between the TMD damping ratio and the modal damping ratio of a two-degree-of-freedom model. And we proposed the design formulas for the optimal tuning and damping ratios and the initial displacement to attain high control performance under impulse loading. The proposed design formulas are based on the principle that by giving the specific TMD initial displacement under the specific structural initial condition the structural response of the first mode with low modal damping is eliminated while the structural response of the second mode with high modal damping is only oscillated. But the physical meaning of the design formula for TMD initial displacement is not clear because it is an approximate solution based on the perturbation method.

Then, we formulated the equation for initial conditions to release TMD initial displacement from the theoretical free vibration solution and showed its physical meaning clearly. We studied about TMD initial displacement and structural conditions to release initial displacement using the complex plane, and we showed that the initial structural condition to oscillate only the second mode was limited to a neighborhood of $\dot{x}_0 \neq 0, x_0 = 0$. On the other hand, we proved that, by dividing one TMD into plural TMDs that have different natural frequencies, any initial structural conditions to release TMDs became possible.

In this paper, firstly, we analytically study the effect of different settings of two TMDs tuning ratios on TMD initial displacements to eliminate the first modal response with the lowest modal damping and structural responses for free vibration using a basic three-degree-of-freedom model. Next, we decompose the initial condition to modal eigenvectors on the complex plane and study the interrelationship between each initial condition of a main mass and two TMDs. Then, we show the reason why different settings of TMDs tuning ratios affect the TMD initial displacements to eliminate the first modal response and the structural responses. Finally, by using the energy indicator “TMD power flow” that shows an additional TMD damping effect proposed by Soong, T.T. and Dargush, G.F., we study the control performance of TMDs with different tuning ratios condition.

(2016 年 12 月 16 日原稿受理, 2017 年 5 月 10 日採用決定)