塑性率と累積塑性率に基づく線形累積損傷度の 期待値の推定における減衰の影響

EFFECT OF DAMPING ON EVALUATION EXPECTATION OF LINEAR CUMULATIVE DAMAGE FACTOR FROM DUCTILITY FACTOR AND CUMULATIVE DUCTILITY FACTOR

桜庭 潮理^{*1}, 岡野 創^{*2}, 日下 彰宏^{*3}

Shiori SAKURABA, Hajime OKANO and Akihiro KUSAKA

This report deals with the effect of damping on evaluation expectation of linear cumulative damage factor from ductility factor and cumulative ductility factor. In the evaluation of the linear cumulative damage factor, wave number and the probabilistic distribution of peak amplitudes are required. The wave number is evaluated referring to the closed form equation developed by Matsushima (1992)⁵⁾. The probabilistic distribution of peak amplitudes is inferred from the displacements of center of oscillation per cycle. The displacement of center of oscillation is considered to follow the gamma distribution. The expectation of linear cumulative damage factor is given by single stochastic integral.

Keywords: Ductility factor, Cumulative ductility Factor, Linear cumulative damage rule, Perfectly elasto-plastic,

Displacement of center of oscillation, Gamma distribution

塑性率, 累積塑性率, 線形累積損傷則, 完全弾塑性, 履歴中心の移動, ガンマ分布

1. はじめに

既報¹⁾では, 減衰のない完全弾塑性系の塑性率と累積塑性率を用いた線形累積損傷度の期待値の推定方法を検討した。以下にその要点をまとめる。

線形累積損傷則で損傷度の期待値を計算するためには累加すべきピークの波数とその振幅分布が必要になる。波数については, 松島(1991)²⁾が求めた完全弾塑性系の陽な解を簡略化した式を用いて, 塑性率と累積塑性率から求めた。ピークの振幅分布については, 破断に関与するような大振幅領域では履歴中心の移動が支配的になることから, 1等価周期あたりの履歴中心の移動量から正側と負側のピークの振幅差を推定する方法を用いた。完全弾塑性系では履歴中心の移動量は履歴吸収エネルギーに比例するが, 履歴吸収エネルギーについてはガンマ分布に従うという予想がある³⁾。定常状態では, 完全弾塑性系の履歴吸収エネルギーは入力エネルギーに等しい。入力エネルギーについては, 地動がホワイトノイズの場合, 線形であるか非線形であるかを問わず入力エネルギーの期待値と分散は一意に求まる⁴⁾。したがって, 履歴中心の移動量の分布を表すガンマ分布の母数は, 入力エネルギーの期待値と分散から決定することができる。以上のようにして求めたガンマ分布は, 数値実験により求めた分布と, 非線形性の強い大振幅領域で良く一致することが確認された。履歴中心の移動量からピーク振幅の確率分布を推定すれば,

線形累積損傷度の期待値は期待値積分で与えられる。

既報では減衰を考慮していなかったことから, 本論において速度に比例する粘性減衰がある場合への拡張を試みる。粘性減衰係数は, 弾性剛性に比例する場合を想定する。

粘性減衰のあるバイリニア型履歴をもつ1自由度系のランダム応答についても松島(1992)⁵⁾が陽な解を導出しているのので, これを参照する。適用にあたり, 松島⁵⁾の理論解は収束計算を必要とするため, 塑性率と累積塑性率から波数を簡略に計算するという目的に適さず, 数値実験への適合度もやや不十分であったことから, 実用に適した近似式を求める。この近似式を用いると, 塑性率と累積塑性率から, 建物強度で基準化された単位時間あたりの入力強度が求まる。入力強度と累積塑性率の関係から継続時間が推定され, 継続時間は等価周期を用いて波数に換算される。

1等価周期あたりの履歴中心の移動量の分布を表すガンマ分布の母数は, 入力エネルギーが履歴中心の移動と粘性減衰によって消費されることを考慮し, 入力エネルギーから粘性減衰の消費分を差し引いて, 履歴中心の移動量に関する母数を決定する。

2. 線形累積損傷則

既報¹⁾に示したように, Manson Coffin 型の疲労則を用いると線形累積損傷則⁶⁾による損傷度 D_f は下のようになら与えられる。

*1 千葉大学 大学院生

*2 千葉大学 教授・博士(工学)

*3 株式会社小堀二研究所 博士(工学)

Grad. Student of Chiba University

Prof. of Chiba University, Dr.Eng.

Kobori Research Complex Inc., Dr.Eng.

$$D_f = C^{-1/\beta} \sum_{i=1}^v \eta_i^{1/\beta} \quad (1)$$

ここで、

$v = t/T_0$: 時間 t を弾性時の固有周期 T_0 で基準化した波数
 $\eta_i \equiv x_i/\Delta_y$: i レベルの無次元振幅, x_i は変形, Δ_y は降伏変形
 C, β : Manson Coffin 型の疲労則の係数

上式から明らかなように、ランダム応答から線形累積損傷度の期待値 $\bar{D}_f$ を求めるためには、波数の期待値 $\bar{v}$ と振幅 η の確率分布を知る必要がある。

3. 波数の推定

本章では、塑性率と累積塑性率の期待値から、応答の波数を推定する方法を検討する。鉄骨造純ラーメンを念頭に、Fig.1 に示すような完全弾塑性のバイリニア型履歴を持つ 1 自由度系を想定し、系は弾性剛性に比例する粘性減衰をもつものとした。

3.1 松島⁵⁾の近似解の概略

松島⁵⁾は、Fig.1 に示す履歴特性を持つ 1 自由度系がホワイトノイズを受けた場合の解を求めた。系には速度に比例する粘性減衰があるものとし、粘性減衰係数 c は弾性剛性に比例するものを想定した。以下で、本論の展開で必要となる部分を中心にその概要を紹介する。

Fig.1 Bilinear hysteresis with zero plastic stiffness

松島⁵⁾は、変位応答 x を、履歴中心の移動量 x_c と、履歴中心まわりの振動成分 x_0 の和として表した。これを降伏変位 Δ_y で無次元化すると、

$$\eta = \eta_c + \eta_0 \quad (2)$$

無次元振幅の最大値の期待値は

$$|\bar{\eta}|_{\max} = p_R \sigma_\eta \quad (3)$$

と表せる。ここで、 σ は標準偏差を表す。 σ_η は近似的に次式で表される。

$$\sigma_\eta = \sqrt{\frac{\pi \xi}{2h} (1 - e^{-4\pi h \nu})} \quad (4)$$

ここで、 h は減衰定数を表す。 ξ は建物強度で基準化した単位時間あたりの入力強度で、次式で定義される。

$$\xi \equiv \omega_0 S_0 / a_y^2 \quad (5)$$

ω_0 は 1 自由度系の固有円振動数、 S_0 はホワイトノイズのパワースペクトル密度、 $a_y (= \omega_0^2 \Delta_y)$ は降伏加速度を表す。

また、 p_R はピークファクターで、近似的に次式で表される。

$$p_R = \sqrt{2} f(h\nu) \quad (6)$$

ここで、

$$f(h\nu) = \sqrt{0.424 + \ln(4\pi h\nu + 1.78)} \quad (7)$$

である。式(6)、(7)で与えられる関数は Rosenblueth らによる減衰応

答の補正係数⁷⁾に相当する。弾性限界における時間 t_0 を無次元化した波数 ν_0 は $|\bar{\eta}|_{\max} = 1$ となるような波数で、 $p_R \sigma_\eta = 1$ より求めることができる。

履歴中心まわりの振動成分 x_0 を近似的にある等価円振動数 ω_e をもつ正弦振動であるとし、等価な期待周期 $T_e (= 2\pi/\omega_e)$ あたりのエネルギーの釣り合いは、

$$\bar{x}_{pl} a_y + 2h\omega_0 V_{\dot{x}} \frac{2\pi}{\omega_e} = \pi S_0 \frac{2\pi}{\omega_e} \quad (8)$$

である。ここで、 $\bar{x}_{pl}$ は 1 等価周期 T_e 間での累積塑性変形の期待値、 $V_{\dot{x}}$ は速度 $\dot{x}$ の分散を表す。

降伏後は $\dot{x}_0$ は振幅 $\omega_e (\bar{x}_{pl}/4 + \Delta_y)$ の正弦振動をしているとみなし、履歴ループがその中心に関して対称で、ループの対角線の勾配が ω_e^2 に対応するものとする、

$$\omega_e^2 = \frac{4a_y}{\bar{x}_{pl} + 4\Delta_y} \quad (9)$$

と与えられる。等価円振動数 ω_e の低下率 $\alpha \equiv \omega_e/\omega_0$ 、1 等価周期 T_e 間での累積塑性率 $\bar{\lambda}_1 \equiv \bar{x}_{pl}/\Delta_y$ として式(9)を無次元表現に改めると、次式が得られる。

$$\alpha^2 = \frac{4}{\bar{\lambda}_1 + 4} \quad (10)$$

また、 $\dot{x}$ の分散 $V_{\dot{x}}$ は、

$$V_{\dot{x}} = \frac{\omega_e^2}{p_{R0}^2} \left(\frac{\bar{x}_{pl}}{4} + \Delta_y \right)^2 \quad (11)$$

と書ける。ここで、 $\nu = \nu_0$ における連続性を考慮し、

$$p_{R0} = \sqrt{2} f(h\nu_0) \quad (12)$$

とする。

式(8)、(10)、(11)より、すべての量を無次元化すると、 $\bar{\lambda}_1$ は次のようになる。

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{2\pi}{\alpha^2} \left(\pi \alpha^2 \xi - \frac{2h}{p_{R0}^2} \right) \quad (13)$$

式(10)、(13)は $\bar{\lambda}_1$ と α に関する連立方程式であり、反復計算により解を得る必要がある。

振動系が塑性状態に入ってから時間を $t' (= t - t_0)$ とすると、 $t' \geq 0$ における累積塑性変形 x_e の期待値は

$$\bar{x}_e = \bar{x}_{pl} t' \frac{\omega_e}{2\pi} \quad (14)$$

であるから、上式を無次元化すると、累積塑性率 $\lambda = x_e/\Delta_y$ の期待値 $\bar{\lambda}$ は次のようになる。

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 \alpha \nu' \quad (15)$$

ここで、 ν' は t' を固有周期 T_0 で基準化した波数とする。

以後、 ν' 間で供給されるエネルギーを $a_y \Delta_y$ で除した無次元量を ε 、減衰吸収エネルギーを $a_y \Delta_y$ で除した無次元量を δ と表す。また、履歴吸収エネルギーを $a_y \Delta_y$ で除した無次元量は λ と一致する。

λ と δ の間に完全な相関があると仮定すると、標準偏差は

$$\sigma_\varepsilon = \sigma_\lambda + \sigma_\delta \quad (16)$$

である。

ε の分散 V_ε は、以下のように与えられる⁴⁾。

$$V_\varepsilon = 4\pi^2 \xi \nu' V_{\dot{\eta}} \quad (17)$$

ここで、 $\dot{\eta} = \dot{x}/(\omega_0 \Delta_y)$ である。

δ の分散は、近似的に次式で与えられる。

$$V_s = \frac{8\pi^2 h^2 v'}{\alpha} V_{\eta}^2 \quad (18)$$

式(17), (18)を式(16)に適用すると, 履歴吸収エネルギーの分散は以下の式で与えられる。

$$V_{\lambda} = 4\pi^2 v' \left(\sqrt{\xi} - h\sigma_{\eta} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \right)^2 V_{\eta} \quad (19)$$

松島⁵⁾は, 履歴中心の移動と履歴中心まわりの振動成分の最大値は無相関と仮定して, 両者の2乗和平方根で最大値を与え, 以下のような塑性率の期待値 $\bar{\mu}$ の算定式を導いた。

$$\bar{\mu} = \sqrt{2\pi^3 v' \left(\sqrt{\xi} - h\sigma_{\eta} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \right)^2 + \frac{p_{R0}^2}{\alpha^2} \sigma_{\eta}^2} \quad (20)$$

無次元速度の標準偏差 σ_{η} についても, 正弦振動を仮定した近似解を導いているが, 数値実験との適合が必ずしも十分でないとして, さらに以下のような近似式も提案している。

$$\alpha\sigma_{\eta} = 0.590 \frac{1+3.60\xi}{1+1.42h} \quad (21)$$

3.2 数値実験の追試と波数の近似解の作成

松島⁵⁾は, $\xi=0.050$ の場合についてのみ, 塑性率と累積塑性率の関係式の数値実験と近似解の比較を掲載している。本論では, $\xi=0.050$ の場合の再現性を非線形応答解析により確認した後, $\xi=0.050$ 以外の場合についても式(15), (20)を用いた塑性率と累積塑性率の関係式の妥当性を検討する。既報¹⁾と同一条件でFFTを用いてホワイトノイズを作成した。ホワイトノイズのサンプル数は300個である。数値実験においては, 十分に長い継続時間まで解析し, 波数が「0~40」までの結果をそれぞれ取り出して図化している。

Fig.2 に非線形解析から求めた塑性率と累積塑性率の期待値の関係を示す (数値実験結果は, 図中では MCS : Monte Carlo Simulation と表記, 以下同様)。近似解(15), (20)を Fig.2 中に実線で示した。Fig.2 より, 松島(1992)⁵⁾に掲載された $\xi=0.050$ の場合と比較すると, 数値実験の再現性は十分であることが確認された。しかし, 近似解は ξ が 0.050 より小さい側で塑性率を過大評価, ξ が 0.050 より大きい側で過小評価の傾向が認められる。そこで, 数値実験により良く適合するように修正を行う。

Fig.2 Relationship between expectations of ductility factor and cumulative ductility factor

まず, 等価円振動数の低下率 α は, 数値実験との適合性を高めるために, 既報¹⁾に従い, 以下のように与える。

$$\alpha = 1 - 1.12\xi \quad (22)$$

以後, α は式(22)を用いて表すものとする。

次に弾性限界における波数 ν_0 の修正を行う。松島⁵⁾によると, 式(3)~(7)より ν_0 は以下の関係式を満たす ν として導出できるが, 収束計算が必要となる。

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{0.424 + \ln(4\pi h\nu + 1.78)} \cdot \sqrt{\frac{\pi\xi}{2h} (1 - e^{-4\pi h\nu})} = 1 \quad (23)$$

Newton-Raphson 法により導出した ν_0 を Fig.3 に示すと, h の影響をほとんど受けないことが確認できた。また, ν_0 は ξ に反比例すると考えられるので, 以下の近似式で表すことにする。

$$\nu_0 = \frac{0.025}{\xi} \quad (24)$$

近似式(24)は Fig.3 中に実線で示す。

Fig.3 Semi-empirical expression of wave number of elastic limit

次に σ_{η} であるが, 式(21)を参考にして, ξ に関する1次式で表し, 係数の適値を反復代入法で決定すると次式が得られた。

$$\sigma_{\eta} = 0.60 \frac{1+6.98\xi}{1+2.25h} \quad (25)$$

数値実験の結果と近似式(25)の比較を Fig.4 に示す。

Fig.4 Semi-empirical expression of standard deviation of velocity

次に, 累積塑性率と波数の関係式の修正を行う。累積塑性率と波数の関係は, $\bar{\lambda}_1$ を用いて式(15)のように表される。 α と $\bar{\lambda}_1$ は式(10), (13)で表されるが, これらは解析的に解くことはできず, 反復計算が必要となる。松島は, $\dot{x}_0$ が正弦振動していると仮定して $\bar{\lambda}_1$ の値を評価しているが, これを, 一般的な等価円振動数低下率を用いて評価し, 反復計算を用いずに $\bar{\lambda}_1$ の値を求める。式(11)を式(8)に代入し整理すると, 次式のようになる。

$$\bar{\lambda}_1 + 4\pi h \frac{\alpha}{p_{R0}^2} \left(\frac{\bar{\lambda}_1}{4} + 1 \right) = 2\pi^2 \frac{\xi}{\alpha} \quad (26)$$

これを $\bar{\lambda}_1$ について解く。

$$\bar{\lambda}_1 = - \left(4 + \frac{2p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right) + 4 \sqrt{\frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} + \frac{\pi p_{R0}^2}{2h \alpha^2} \xi + \frac{1}{4} \left(\frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right)^2} \quad (27)$$

式(15), (27)より累積塑性率の期待値 $\bar{\lambda}$ は次式で表される。

$$\bar{\lambda} = \left[- \left(4 + \frac{2p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right) + 4 \sqrt{ \frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} + \frac{\pi p_{R0}^2}{2h \alpha^2} \xi + \frac{1}{4} \left(\frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right)^2 } \right] \alpha \nu' \quad (28)$$

ここで、 ν' は塑性変形が生じてからの継続時間 t' を固有周期 T_0 で基準化した波数である。式(28)と数値実験との比較を Fig.5 に示す。 ξ と h の値を変更させても、数値実験と概ね一致する結果が得られている。

Fig.5 Relationship between expectation of cumulative ductility factor and wave number

最後に、塑性率 $\bar{\mu}$ と累積塑性率 $\bar{\lambda}$ の関係式を見直す。既報¹⁾で導いた近似式を参照し、減衰の影響を考慮して、次式のように与えた。

$$\bar{\mu} = a \frac{1 + b\xi \sqrt{\bar{\lambda} + d}}{1 + ch} \quad (29)$$

ここで、 a, b, c, d は定数である。反復代入法で適値を求めると、

$$a = 0.99, b = 8.86, c = 2.18, d = 0.57 \quad (30)$$

と得られた。数値実験と式(29)の比較を Fig.6 に示す。Fig.2 と比較して、全体的に適合度が改善されている。式(29)は ξ に関する 1 次式で表されるため、塑性率と累積塑性率の関係が分かれば、入力強度の指標 ξ を求めることができる。

Fig.6 Relationship between expectations of ductility factor and cumulative ductility factor

等価円振動数の波数 ν'_e は $\nu'_e = \alpha \nu'$ であるため、式(28)より等価波数は以下のように与えられる。

$$\nu'_e = \bar{\lambda} / \left[- \left(4 + \frac{2p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right) + 4 \sqrt{ \frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} + \frac{\pi p_{R0}^2}{2h \alpha^2} \xi + \frac{1}{4} \left(\frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right)^2 } \right] \quad (31)$$

ここで、 α は式(22)で与える。

4. ピークの振幅分布の推定

速度が反転する時点ピークと定義し、ピークの振幅分布について考える。

4.1 1 等価周期あたりの履歴中心の移動量の確率分布

1 等価周期内での履歴中心の移動は、厳密には正負の両方向に生じることもあるが、多くの場合では一方向にのみ生じる。そこで、本論では、1 等価周期内での履歴中心の移動は一方向にのみ生じると考えることにする。

既報¹⁾では、履歴中心の移動が起こった場合、履歴中心が移動した側では必ず降伏変形 Δ_y を加えたものがピーク振幅となり、反対側では降伏変形 Δ_y かそれ以下の変形を加えたものがピーク振幅となるため、履歴中心の移動量の確率分布が分かれば、ピークの振幅分布をある程度の精度で予測できると考えた。本論でもこの方法を採用する。

完全弾塑性のバイリニア型履歴では、非線形領域では履歴中心の移動量は履歴吸収エネルギーに比例する。履歴吸収エネルギーの期待値と分散は、それぞれ式(28)と式(19)で与えられている。既報¹⁾では、エネルギーはガンマ分布型に従うと仮定して検討しており、本論でもこの方法を踏襲する。無次元化した 1 等価周期あたりの履歴中心の移動量 $\hat{\eta}_c$ の絶対値がガンマ分布に従うとすると、確率密度は次式で与えられる。

$$f_{\hat{\eta}_c}(\hat{\eta}_c) = \frac{n(n|\hat{\eta}_c|)^{k-1} e^{-n|\hat{\eta}_c|}}{\Gamma(k)} \quad (32)$$

n, k は分布パラメータで、期待値と分散を用いてそれぞれ以下のように入力される。

$$n = \frac{E[|\hat{\eta}_c|]}{V[|\hat{\eta}_c|]} \quad (33)$$

$$k = \frac{E[|\hat{\eta}_c|]^2}{V[|\hat{\eta}_c|]} \quad (34)$$

1 等価周期あたりの履歴中心の移動量の期待値と分散は、等価円振動数の低下率を考慮すると、式(19), (28)より、

$$E[|\hat{\eta}_c|] = - \left(4 + \frac{2p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right) + 4 \sqrt{ \frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} + \frac{\pi p_{R0}^2}{2h \alpha^2} \xi + \frac{1}{4} \left(\frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right)^2 } \quad (35)$$

$$V[|\hat{\eta}_c|] = 4\pi^2 \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\xi} - h\sigma_\eta \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \right)^2 V_\eta \quad (36)$$

となる。無次元速度の分散 V_η は式(25)より与える。

Fig.7,8 に数値実験から求めた 1 等価周期あたりの履歴中心の移動量 $\hat{\eta}_c$ の確率分布とガンマ分布の比較を示す。実際には、 ξ は 0.025, 0.050, 0.075, 0.100 の 4 通り、 h は 0.00, 0.01, 0.02, 0.05, 0.10 の 5 通りの計 20 通りについて検討した。Fig.7 では、 $\xi = 0.050$ とし、 h を 0.01, 0.02, 0.05, 0.10 の 4 段階に変化させた場合を、Fig.8 では $h = 0.02$ とし、 ξ を 0.025, 0.050, 0.075, 0.100 の 4 段階に変化させた場合を示す。

また、図中の実線で式(32)～(36)を用いた、減衰吸収エネルギーを考慮したガンマ分布を示し、点線で減衰吸収エネルギーを考慮しないガンマ分布を示した。減衰吸収エネルギーを考慮した履歴中心の移動量の予測分布は、数値実験から求めた分布とよく一致していることが分かる。

Fig.7 Histogram of absolute non-dimensional displacements of center of oscillation in an equivalent period of response versus gamma distribution ($\xi = 0.05$)

Fig.8 Histogram of absolute non-dimensional displacements of center of oscillation in an equivalent period of response versus gamma distribution ($h = 0.02$)

5. 線形累積損傷度の推定

5.1 分離併合前のピーク系列による線形累積損傷度

まず、P/V 差法⁸⁾により分離併合を行う前のピークの振幅系列の線形累積損傷度を求める。1 等価周期あたりの P/V 絶対差 $r \equiv |P - V|$ (P と V は正側と負側の符号付きピーク振幅、以下 P/V 差と略称) は、履歴中心が移動する側に生ずる P/V 差 $\eta_{r,M}$ と、その間の弾性変

形内に止まる小さな P/V 差 $\eta_{r,S}$ からなると仮定する。

$$\eta_{r,M} = \hat{\eta}_c + \eta_L \quad (37)$$

$$\eta_{r,S} = \eta_L' \quad (38)$$

式中の η_L は、履歴中心が移動する方向に付加される η_F と、履歴中心の移動とは逆向きに付加される η_B を用いて以下のように表せる。

$$\eta_L = \eta_F + \eta_B \quad (39)$$

ここで、 $\eta_F = 1$ 、 $0 \leq \eta_B \leq 1$ より、 η_L は $1 \leq \eta_L \leq 2$ になると考えられる。

以上を代入し整理すると D_{f0} の期待値 $\bar{D}_{f0}$ は以下のように与えられる。

$$\bar{D}_{f0} = \frac{1}{2} (2C)^{-\gamma/\beta} \cdot v_e' \cdot \left\{ \int_0^\infty f_{\hat{\eta}_c}(\hat{\eta}_c) \cdot (\hat{\eta}_c + \eta_L)^{\gamma/\beta} d\hat{\eta}_c + \eta_L'^{\gamma/\beta} \right\} \quad (40)$$

上式中で η_L と η_L' は定数と仮定しているが、 η_L' は多くの場合、弾性範囲の振動で、 η_L に比べて影響が小さいことから、以下では $\eta_L = \eta_L'$ と仮定する。

Fig.9 では、Manson Coffin 型の疲労則のパラメータを $C=5$ 、 $\beta=1/3$ として、非線形解析による数値実験のアンサンブル平均から D_{f0} の期待値 $\bar{D}_{f0}$ を求め、近似解(40)と比較した。式(40)は η_L の設定に依存するので、反復代入法により適値を求めると、 $\eta_L = 1.70$ となった。この値は、既報¹⁾と同値であり、予測した $1 \leq \eta_L \leq 2$ の範囲内である。また、 ξ と h の値を変更させても、数値実験と概ね一致する結果が得られている。以上より、ガンマ分布によるピークの振幅分布の推定と本節で用いた仮定は、概ね妥当であったと判断される。

Fig.9 Expectation of linear cumulative damage factor of original peak/valley by MCS and its prediction by gamma distribution: $C=5$, $\beta=1/3$

5.2 分離併合の影響

次に、P/V 差法⁸⁾によるループの分離併合の影響について検討する。ループの分離併合による線形累積損傷度の増幅効果を、分離併合前後の線形累積損傷度の期待値の比として、次式で表す。

$$\kappa \equiv \bar{D}_f / \bar{D}_{f0} \quad (41)$$

ここで、 $\bar{D}_f$ は分離併合後の線形累積損傷度である。

既報¹⁾を参考に、 κ の近似式を以下のように与える。

$$\kappa = 1 + a_1 \cdot \xi^h \cdot (1-h)^{c_1} (v_e - 2)^{d_1} \quad (42)$$

ここで、 a_1, b_1, c_1, d_1 は定数である。反復代入法により適値を求めると、

$$a_1 = 3.61, b_1 = 1.28, c_1 = 5.17, d_1 = 0.79 \quad (43)$$

と得られた。

Fig.10 に非線形解析による数値実験から求めた κ と、近似解(42)、(43)の比較を示す。大略の傾向は表せている。

Fig.10 Amplification of expectation of linear cumulative damage factor by separation and integration using P/V difference method by MCS and empirical equation for its effect

6. まとめ

既報¹⁾で用いた手法を踏襲し、減衰が有る場合の完全弾塑性のパイリニア型履歴を持つ1自由度系を対象に、塑性率と累積塑性率から線形累積損傷度を推定する方法を検討した。線形累積損傷度の期待値を推定するには、波数とピークの振幅の確率分布が必要になる。このうち、波数については、松島(1992)⁵⁾の解を参照して作成した近似式を用いて推定した。ピークの振幅は履歴中心の移動から推定し、1等価周期あたりの履歴中心の移動量はガンマ分布に基づいて推定した。ガンマ分布の母数は、入力エネルギーから減衰吸収エネルギーを除いた履歴吸収エネルギーの期待値と分散から与えられる。粘性減衰のある場合でも、履歴中心の移動量の分布とガンマ分布は、非線形性の強い大振幅側でよく一致した。

P/V 差法等で分離併合を行う前のピーク系列による線形累積損傷度は、ガンマ分布を用いた積分により精度良く予測することができた。

本論では、理論的な解を得ることを目的として塑性剛性を0とした1自由度系を仮定したが、実用を目的とする場合はより一般的な条件のもとでの検討が必要と考えられる。

参考文献

- 1) Okano, H., Kusaka, A. and Sakuraba, S.: Expectation of Linear Cumulative Damage Factor Evaluated by Ductility Factor and Cumulative Ductility Factor, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol.83 No.747, pp.669-676, 2018.5 (in Japanese)
岡野 創, 日下 彰宏, 桜庭 潮理: 塑性率と累積塑性率から推定される線形累積損傷度の期待値, 日本建築学会構造系論文集, 第 747 号, pp.669-676, 2018.5
- 2) Matsushima, Y.: Random Response of a Single-Degree-of-Freedom System with Bilinear Hysteresis, Journal of Structural and Construction Engineering

(Transactions of AIJ), No.420, pp.101-110, 1991.2 (in Japanese)

松島 豊: パイリニア型履歴をもつ1自由度系のランダム応答, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 420 号, pp.101-110, 1991.2

- 3) Hong, G. and Tanaka, H.: Hysteretic Energy Dissipation of Single-Degree-of-Freedom System Subjected to White Noise Excitation, Transactions of the Architectural Institute of Japan, No.270, pp.99-103, 1978.8 (in Japanese)
洪 起, 田中 尚: ホワイトノイズを受ける1自由度系の履歴吸収エネルギー, 日本建築学会論文報告集, 第 270 号, pp.99-103, 1978.8
- 4) Karnopp, : Power Balance Method for Nonlinear Random Vibration, Journal of Applied Mechanics (Transactions of ASME), Vol.34 pp.212-214, 1967.3
- 5) Matsushima, Y.: Effect of Damping on Seismic Response of Bilinear Hysteretic Systems, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No.436, pp.63-70, 1992.6 (in Japanese)
松島 豊: パイリニア型履歴系の地震応答に及ぼす減衰の影響, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 436 号, pp.63-70, 1992.6
- 6) Hasegawa, T., Narihara H. and Yasuda, S.: Inelastic Deformation Capacity of Steel Beams under Multi-cycle Loading and Seismic Safety Evaluation for Super-high-rise Steel Buildings, Document of Panel Discussion, Annual Meeting of AIJ, 2015.9 (in Japanese)
長谷川 孝, 成原 弘之, 安田 聡: 多数回繰返し载荷を受ける梁端部の塑性変形能力と超高層鉄骨建造物の耐震安全性の検証, パネルディスカッション資料, 日本建築学会大会, 2015.9
- 7) Rosenblueth, E. and Bustamante, J.I.: Distribution of Structural Response to Earthquakes, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, EM3, pp.75-106, 1962.6
- 8) Endo, T. and Anzai, H.: Refined Rainflow Algorithm: P/V Difference Method, Journal of The Society of Materials Science, Vol.30, No.328, pp.89-93, 1971.1 (in Japanese)
遠藤 達雄, 安在 弘幸: 簡明にされたレインフローアルゴリズム「P/V 差法」について, 「材料」, 第 30 巻, 第 328 号, pp.89-93, 1971.1

EFFECT OF DAMPING ON EVALUATION EXPECTATION OF LINEAR CUMULATIVE DAMAGE FACTOR FROM DUCTILITY FACTOR AND CUMULATIVE DUCTILITY FACTOR

Shiori SAKURABA^{*1}, Hajime OKANO^{*2} and Akihiro KUSAKA^{*3}

^{*1} Grad. Student of Chiba University

^{*2} Prof. of Chiba University, Dr.Eng.

^{*3} Kobori Research Complex Inc., Dr.Eng.

The evaluation of expectation of linear cumulative damage factor based on the ductility factor and cumulative ductility factor is dealt with.

Using the Manson-Coffin's law, the linear cumulative damage factor D_f is given as follows,

$$D_f = C^{-1/\beta} \sum_{i=1}^v \eta_i^{1/\beta} \quad (1)$$

where C and β are coefficients of Manson-Coffin's law, and η is non-dimensional peak amplitude normalized by yielding deformation. Eq.(1) shows that the wave number and the probabilistic distribution of peak amplitudes are required in the evaluation of the linear cumulative damage factor.

The wave number is evaluated referring to the closed form equation for ductility factor and cumulative ductility factor which is developed by Matsushima(1992)⁵⁾. The relationship between ductility factor $\bar{\mu}$ and cumulative ductility factor $\bar{\lambda}$ is given as follows,

$$\bar{\mu} = 0.99 \frac{1+8.86\xi}{1+2.18h} \sqrt{\bar{\lambda} + 0.57} \quad (2)$$

where ξ is the ratio of the intensity of spectral density of input earthquake motion. The wave number v_e' of non-linear response is given by following equation.

$$v_e' = \bar{\lambda} / \left(- \left(4 + \frac{2p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right) + 4 \sqrt{\frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} + \frac{\pi p_{R0}^2}{2h \alpha^2} \xi} + \frac{1}{4} \left(\frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right)^2 \right) \quad (3)$$

Where $\alpha = \omega_e / \omega_0$ is the ratio of the equivalent frequency of non-linear system to the eigen frequency of linear system, which is given by following equation.

$$\alpha = 1 - 1.12\xi \quad (4)$$

The probabilistic distribution of peak amplitudes is inferred from the displacement of center of oscillation per cycle. The displacement of center of oscillation per cycle is assumed to follow the gamma distribution. The gamma distribution of non-dimensional displacement of center of oscillation per. cycle $\hat{\eta}_c$ is given as follows.

$$f_{\hat{\eta}_c}(\hat{\eta}_c) = \frac{n(n\hat{\eta}_c)^{k-1} e^{-n\hat{\eta}_c}}{\Gamma(k)} \quad (5)$$

The parameters of gamma distribution are given by following equations.

$$n = E[\hat{\eta}_c] / V[\hat{\eta}_c], \quad k = E[\hat{\eta}_c]^2 / V[\hat{\eta}_c] \quad (6)$$

$$E[\hat{\eta}_c] = - \left(4 + \frac{2p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right) + 4 \sqrt{\frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} + \frac{\pi p_{R0}^2}{2h \alpha^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{p_{R0}^2}{\pi h \alpha} \right)^2} \quad (7)$$

$$V[\hat{\eta}_c] = 4\pi^2 \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\xi} - h\sigma_{\hat{\eta}} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \right)^2 V_{\hat{\eta}} \quad (8)$$

Where $V_{\hat{\eta}}$ is the variance of non-dimensional velocity response of non-linear system. The standard deviation of non-dimensional velocity $\sigma_{\hat{\eta}} = \sqrt{V_{\hat{\eta}}}$ is given by the following semi-empirical equation.

$$\sigma_{\hat{\eta}} = 0.60 \frac{1+6.98\xi}{1+2.25h} \quad (9)$$

The distributions of the center of oscillation per cycle obtained by numerical experiment employing non-linear response analyses agree well with the gamma distribution especially in the strongly non-linear region.

The expectation of linear cumulative damage factor is given as follows.

$$\bar{D}_{f0} = \frac{1}{2} (2C)^{-1/\beta} v_e' \cdot \left\{ \int_0^\infty f_{\hat{\eta}_c}(\hat{\eta}_c) \cdot (\hat{\eta}_c + \eta_L)^{1/\beta} d\hat{\eta}_c + \eta_L'^{1/\beta} \right\} \quad (10)$$

D_{f0} is the linear cumulative damage factor of original peak/valley sequence before separation and integration using P/V difference method. η_L is sum of linear displacements followed in backward and forward of the movement of center of oscillation, and η_L' is the minor oscillation between the the major movement which accompanies the movement of center of oscillation. η_L and η_L' are both set to 1.70 as the optimum value. The prediction by eq.(10) agree well with the numerical experiment employed the non-linear response analyses.

The influence of separation and integration using P/V method is given by empirical equation based on numerical experiments.

(2018 年 10 月 10 日原稿受理, 2019 年 3 月 5 日採用決定)