立 体 ト ラ ス 平 版 の 解 析

—その1・版の有効剛性と方程式—

正 会 員 日 置 興 一 郎*
同 坂 寿 二**

1. 序

立体トラス平版の応力解析には、厳密解法として変形法がある。この解析法は節点の変位を未知数として連立一次方程式を立てる方法で、一般には未知数が多くなり、電子計算機によって応力が求められている。しかし、この構造物の全体的座屈や振動問題などを含めた構造計画の段階では、より簡単に全体の力学的性質を把握できる方法が望まれる。そこで本論では、このような離散的対象物である立体トラス平版を、そのまま比較できる変位、換算して比較できる断面力・剛性について、対応する連続版として解析的に取り扱い、その平版の力学的性質を大づかみに知ろうとするものである。そして、ここでは、立体トラス平版を取り扱う場合、ウェブ材の影響をも考慮するために、まず剪断変形を含めた異方性版について論じて、次に、具体的に、2・3の立体トラス平版について、対応する異方性版としての有効剛性とその方程式について論じる。

2. 仮 定

(i) トラスには節点だけに集中荷重がかかり、版にはトラス節点に対応する面積になだらかな分布荷重としてかかる。

(ii) 上下弦材の網目は、荷重の隣接節点間での変動性およびスパンに較べ充分細かくて、巨視的に均質性が認められるものとする。

(iii) 微小変形弾性論

3. 記 号

図-1

座 標： x_1-x_2 が版面に平行な直交座標系添 字： $i, j, k, l=1, 2$

総和記号：同じ項の中で上添字，下添字に同じ記号が

あるものは総和 ($i, j, k, l=1, 2$) をとる。微分記号： $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i} = \partial_i f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{,ij} = \partial_{ij} f$ u_i ： x_i 方向の変位 w ： z 方向の変位 φ_i ： $z-x_j$ 面 (x_i ：一定) の平均的回転変位。なお、 $i \neq j$ ε_{ij} ： x_1-x_2 面での面内歪 κ_{ij} ： M^{ij} に対応する変形 τ_i ：面外方向の剪断歪 N^{ij} ：版の面内力 M^{ij} ：版の曲げ・ねじりモーメント Q^i ：版の剪断力 (法線方向) D^{ijkl} ：版の面内伸び剛性テンソル K^{ijkl} ：版の曲げ剛性テンソル S^{ij} ：版の剪断剛性テンソル R_{NM}^{ijkl} ：版の伸びと曲げの相関剛性テンソル $R_{NQ}^{ij,k}$ ：版の伸びと剪断の相関剛性テンソル $R_{MQ}^{ij,k}$ ：版の曲げと剪断の相関剛性テンソル A ：部材の断面積 E ：ヤング係数

4. 前断変形を含めた異方性版の方程式

(i) 弾性条件

$$\begin{bmatrix} M^{ij} \\ N^{ij} \\ Q^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{ijkl} & R_{MN}^{ijkl} & R_{MQ}^{ij,k} \\ R_{NM}^{ijkl} & D^{ijkl} & R_{NQ}^{ij,k} \\ R_{QM}^{ij,k} & R_{QN}^{ij,k} & S^{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{kl} \\ \varepsilon_{kl} \\ \tau_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

これは厚さ方向の非均質性も入れた、より広い意味での異方性版の式である。

(ii) 運動学的条件

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \\ \kappa_{ij} &= (\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i})/2 \\ \tau_i &= \varphi_i - w_{,i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

なお、Yi-Yuan Yu の方法¹⁾ によるものも、Reißner の方法²⁾ によるものも、この形にモデル化すれば、同じであって、本法ではどちらも含んでいる。

(iii) 仕事式

* 大阪市立大学教授・工博

** 同大学院学生

(昭和43年8月2日本稿受理、討論期限昭和44年6月末日)

全ポテンシャルは歪エネルギーと荷重ポテンシャルの和である。

$$W = \frac{1}{2} \iiint \left\{ (\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i})/2, (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \varphi_i - w_{,i} \right\} \times \begin{Bmatrix} K^{ijk1} & R_{MN}^{ijk1} & R_{MQ}^{ijk1} \\ R_{NM}^{ijk1} & D^{ijk1} & R_{NQ}^{ijk1} \\ R_{QM}^{ijk1} & R_{QN}^{ijk1} & S^{i,k} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{k,l} + \varphi_{l,k})/2 \\ (u_{k,l} + u_{l,k})/2 \\ \varphi_k - w_{,k} \end{Bmatrix} - (p^i u_i + \mathfrak{M}^i \varphi_i + p^3 w) dx_1 dx_2 dx_3 \dots (3)$$

(iv) 釣合方程式

$$\left. \begin{aligned} N^{ij}_{,j} + p^i &= 0 \\ M^{ij}_{,j} - Q^i + \mathfrak{M}^i &= 0 \\ Q^i_{,i} - p^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

この方程式に式(1), (2)を代入して変位で表わし, マトリックス表示をすると

$$\begin{Bmatrix} D^{1jk1} \partial_{jk} & D^{1jk2} \partial_{jk} & R_{NM}^{1jk1} \partial_{jk} + R_{NQ}^{1jk1} \partial_j \\ D^{2jk1} \partial_{jk} & D^{2jk2} \partial_{jk} & R_{NM}^{2jk1} \partial_{jk} + R_{NQ}^{2jk1} \partial_j \\ R_{MN}^{1jk1} \partial_{jk} - R_{QN}^{1jk1} \partial_k & R_{MN}^{1jk2} \partial_{jk} - R_{QN}^{1jk2} \partial_k & K^{1jk1} \partial_{jk} + R_{MQ}^{1jk1} \partial_j - R_{QM}^{1jk1} \partial_k - S^{11} \\ R_{MN}^{2jk1} \partial_{jk} - R_{QN}^{2jk1} \partial_k & R_{MN}^{2jk2} \partial_{jk} - R_{QN}^{2jk2} \partial_k & K^{2jk1} \partial_{jk} + R_{MQ}^{2jk1} \partial_j - R_{QM}^{2jk1} \partial_k - S^{21} \\ -R_{QN}^{1jk1} \partial_{ik} & -R_{QN}^{1jk2} \partial_{ik} & -R_{QM}^{1jk1} \partial_{ik} - S^{1i} \partial_i \\ R_{NM}^{1jk2} \partial_{jk} + R_{NQ}^{1jk2} \partial_j & & -R_{NQ}^{1jk1} \partial_{jk} \\ R_{NM}^{2jk2} \partial_{jk} + R_{NQ}^{2jk2} \partial_j & & -R_{NQ}^{2jk1} \partial_{jk} \\ K^{1jk2} \partial_{jk} + R_{MQ}^{1jk2} \partial_j - R_{QM}^{1jk2} \partial_k - S^{12} & & -R_{MQ}^{1jk1} \partial_{jk} + S^{1k} \partial_k \\ K^{2jk2} \partial_{jk} + R_{MQ}^{2jk2} \partial_j - R_{QM}^{2jk2} \partial_k - S^{22} & & -R_{MQ}^{2jk1} \partial_{jk} + S^{2k} \partial_k \\ -R_{QM}^{1jk2} \partial_{ik} - S^{i2} \partial_i & & S^{ik} \partial_{ik} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p^1 \\ -p^2 \\ -\mathfrak{M}^1 \\ -\mathfrak{M}^2 \\ -p^3 \end{Bmatrix} \dots (5)$$

立体トラス平版について, この連続版に対応する有効剛性をすべて求めることにより, 式(5)の方程式が表わせる。

なお, この方程式を一つの未知数の方程式にまとめ, その未知数から全未知数を求める方法は既に発表してある³⁾。

5. 有効剛性と方程式

立体トラス平版を連続版として解析的に取り扱う場合, ウェブ材の剛性を考慮し, 前章で述べた剪断変形を含めた異方性版として扱い, その場合の有効剛性を求める。そして, この有効剛性が求まると版の方程式が導かれる。

図-2 平行弦トラス

図-3 片持梁

れる。

立体トラス平版の有効剛性を求めるまえに, まず最初に, 図-2 で示した平行弦トラスの有効剛性を求める。このトラスの剛性を求めるために, 図-3 のような片持梁を考える。今, この梁の自由端の変位を $v_m (m=1, 2, 3)$ として, v_m に対応する外力を P^m と表わすと, v_m は片持梁コンプライアンス A_{mn} によって次のように示される。

$$v_m = \sum_{n=1}^3 A_{mn} P^n \dots (6)$$

又, 単位長さ当りの梁要素コンプライアンス s_{mn} は式(7)を用いて式(8)のように示される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon & \varepsilon_2 &= \gamma & \varepsilon_3 &= \kappa \\ N^1 &= N & N^2 &= Q & N^3 &= M \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

$$\varepsilon_m = \sum_{n=1}^3 s_{mn} N^n \dots (8)$$

一方, この梁の内力は

$$N^1 = P^1 \quad N^2 = P^2 \quad N^3 = P^3 + P^3 x \dots (9)$$

故に, それぞれから導いた梁の弾性エネルギー W は

$$W = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 v_n P^n = \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 s_{mn} N^m N^n dx \dots (10)$$

そこで, 式(9)を式(10)に代入して,

$$v_n = \partial W / \partial P^n$$

を用いると A_{mn} は s_{mn} の項で示される。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= s_{11}l \\ A_{12} &= s_{12}l + s_{13} \cdot \frac{l^2}{2} \\ A_{13} &= s_{13}l \\ A_{22} &= s_{22}l + s_{23}l^2 + s_{33} \cdot \frac{l^3}{3} \\ A_{23} &= s_{23}l + s_{33} \cdot \frac{l^2}{2} \\ A_{33} &= s_{33}l \quad (\text{ここに } l=rb) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 A_{mn} はトラス梁の自由端に外力 P^n を与え、その点の変位 v_m を求めることによってきまる。それを式 (11) に代入すれば s_{mn} が求まる。そして $\{s_{mn}\}$ の逆マトリックスとして剛性マトリックス $\{C^{mn}\}$ が表わされる。

$$N^m = \sum_{n=1}^3 C^{mn} \varepsilon_n \dots\dots\dots(12)$$

式 (8) と式 (12) より

$$\{C^{mn}\} = \{s_{mn}\}^{-1} \dots\dots\dots(13)$$

以上の方法で平行弦トラスの有効剛性が求められる。次に、この方法を用いて、一般によく使用されている 2・3 の立体トラス平版の有効剛性を求める。

(i) 上下の対応材が平行する直交二方向二層立体トラス平版

図-4 に示した立体トラス平版を幅 l のトラス梁として考えると、その梁の立面図は図-3 と等しくなる。そこで、図-2 に対応する各々の剛性を平面トラスの有効剛性を求める方法⁴⁾を用いて導くと

$$A_1E = A_2E = AE$$

$$A_3E = A_4E = 2A_W(1 + \cos^2\theta)^{-3/2}E \dots\dots\dots(14)$$

式 (14) を用いて、 A_{mn} を求めると

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{rb}{2A_1E}, A_{12} = 0, A_{13} = 0 \\ A_{23} &= \frac{(rb)^2}{A_1Eh^2}, A_{33} = \frac{2rb}{A_1Eh^2} \\ A_{22} &= \left(\frac{1}{A_3E \cos \theta \sin^2 \theta} + \frac{b^2}{12A_1Eh^2} \right) rb \end{aligned} \right\}$$

図-4

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{2(rb)^3}{3A_1Eh^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

式 (15) を式 (11) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{2A_1E} \\ s_{22} &= \frac{1}{A_3E \cos \theta \sin^2 \theta} + \frac{b^2}{12A_1Eh^2} \\ s_{12} &= s_{13} = s_{23} = 0 \\ s_{33} &= \frac{2}{A_1Eh^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

式 (13) に式 (16) と式 (14) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} C^{11} &= \frac{1}{s_{11}} = 2A_1E = 2AE \\ C^{33} &= \frac{1}{s_{33}} = \frac{A_1Eh^2}{2} = \frac{AEh^2}{2} \\ C^{22} &= \frac{1}{s_{22}} = \frac{3A_1E \tan^2 \theta \cdot A_3E \cos \theta \sin^2 \theta}{3A_1E \tan^2 \theta + A_3E \cos \theta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{3AE \tan^2 \theta \cdot 2A_WE \cos \theta \sin^2 \theta}{3AE \tan^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)^{3/2} + 2A_WE \cos \theta \sin^2 \theta} \\ C^{12} &= C^{13} = C^{23} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

そこで、このトラス平版の x_1 方向の歪と断面力の剛性には、ウェブ材の剛性が上述のように影響すると考えて、その剛性を式 (17) の梁要素剛性と等しいとすると、

$$\left. \begin{aligned} ID^{1111} &= C^{11}, \quad IK^{1111} = C^{33}, \quad IS^{11} = C^{22} \\ IR_{NM}^{1111} &= C^{13} = 0, \quad IR_{QN}^{11 \cdot 1} = C^{12} = 0, \quad IR_{QM}^{1 \cdot 11} = C^{23} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

次に、このトラス平版は x_1 方向と x_2 方向とが同じ性質をもち、かつ x_1 軸と x_2 軸に対称であることより、 x_2 方向の剛性および二方向の相関剛性がきまる。なお、この平版は $M^{12} = M^{21}$ を満足する。

$$\left. \begin{aligned} K^{1111} &= K^{2222}, \quad K^{1211} = K^{1222} = 0 \\ D^{1111} &= D^{2222}, \quad D^{1211} = D^{1222} = 0 \\ S^{11} &= S^{22}, \quad S^{12} = 0 \\ R_{NM}^{1111} &= R_{NM}^{2222} = R_{NM}^{1211} = R_{NM}^{1222} = 0 \\ R_{QN}^{1 \cdot 11} &= 0, \quad R_{QM}^{1 \cdot 11} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

x_1 方向に単位歪を与え、 x_2 方向の移動を固定した状態での応力を出して剛性を求めると

$$D^{1122} = 0, \quad K^{1122} = 0, \quad R_{NM}^{1122} = 0 \dots\dots\dots(20)$$

次に、45° 回転させたものについて同様に行ない、テンソル変換則⁴⁾を用いると、

$$D^{1111}|_{45^\circ} = \frac{AE}{l} + \frac{2 \cos^3 \theta A_WE}{(1 + \cos^2 \theta)^{3/2} l} = \frac{1}{2} D^{1111} + D^{1212} \dots\dots\dots(21)$$

式 (18) を用いると

$$D^{1212} = \frac{2 \cos^3 \theta A_WE}{(1 + \cos^2 \theta)^{3/2} l} \dots\dots\dots(22)$$

同様に

$$K^{1212} = 0, \quad R_{NM}^{1212} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

以上より、すべての剛性が求まった。この結果、ウェ
ブ材の剛性を考えることによって面内剪断剛性 D^{1212} が*

$$\begin{bmatrix} D^{1111}\partial_{11} + D^{1212}\partial_{22} & D^{1212}\partial_{12} & 0 \\ D^{1212}\partial_{12} & D^{1212}\partial_{11} + D^{2222}\partial_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K^{1111}\partial_{11} - S^{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S^{11}\partial_1 \\ 0 & 0 & -S^{22}\partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p^1 \\ -p^2 \\ -M^1 \\ -M^2 \\ -p^3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(24)$$

この方程式をみるとウェブ材を考慮しても Scheibe 作用と Platte 作用が分離していることがわかる。

(ii) 上下面トラスはそれぞれ等しい材が直交した二方向トラスで、両者が互いに 45° の角をなす二層立体トラス平版。

この図-5 のトラス平版は図-4 のトラス平版と同じように平行弦トラスの有効剛性を求める方法が利用できる。そこで式 (14) に対応する式を平面トラスの有効剛性を求める方法を用いて導くと

図-5

$$\left. \begin{aligned} A_1 E &= \frac{\sqrt{2}}{2} a E & A_2 E &= A E \\ A_3 E &= A_4 E = A_W E \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

$$\begin{aligned} C^{11} &= \frac{s_{33}}{s_{11}s_{33} - s_{13}^2} = (A_1 + A_2)E = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a + A \right) E \\ C^{13} &= -\frac{s_{13}}{s_{11}s_{33} - s_{13}^2} = (A_2 - A_1) \frac{Eh}{2} = \left(A - \frac{\sqrt{2}}{2} a \right) \frac{Eh}{2} \\ C^{12} &= C^{23} = 0 \\ C^{33} &= \frac{s_{11}}{s_{11}s_{33} - s_{13}^2} = (A_2 + A_2) \frac{Eh^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a + A \right) \frac{Eh^2}{4} \\ C^{22} &= \frac{1}{s_{22}} = \frac{1}{\frac{1}{A_3 E \cos \theta \sin^2 \theta} - \frac{1}{3 A_1 E \tan^2 \theta} + \frac{2}{3 A_2 E \tan^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta} - \frac{\sqrt{2}}{3 a E \tan^2 \theta} + \frac{2}{3 A E \tan^2 \theta}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(28)$$

そこで、(i) の場合と同様に考えて x_1 方向の歪と断面力の剛性がきまる。

$$\left. \begin{aligned} lD^{1111} &= C^{11}, & lK^{1111} &= C^{33}, & lS^{11} &= C^{22} \\ lR_{NM}^{1111} &= C^{13}, & lR_{NQ}^{11 \cdot 1} &= C^{12} = 0, & lR_{QM}^{11 \cdot 1} &= C^{23} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

次に、求めた剛性を式 (5) に代入すると、

式 (25) を用いて A_{mn} を求めると

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{rb}{4E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \\ A_{12} &= \frac{(rb)^2}{4Eh} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) \\ A_{13} &= \frac{rb}{2Eh} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) \\ A_{23} &= \frac{(rb)^2}{2Eh^2} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \\ A_{33} &= \frac{rb}{Eh^2} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \\ A_{22} &= \left(\frac{1}{A_3 E \cos \theta \sin^2 \theta} - \frac{b^2}{12 A_1 E h^2} + \frac{b^2}{6 A_2 E h^2} \right) rb \\ &\quad + \frac{(rb)^3}{3 E h^2} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

式 (26) を式 (11) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{4E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right), & s_{12} &= 0, & s_{23} &= 0 \\ s_{13} &= \frac{1}{2Eh} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) \\ s_{33} &= \frac{1}{Eh^2} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \\ s_{22} &= \frac{1}{A_3 E \cos \theta \sin^2 \theta} - \frac{b^2}{12 A_1 E h^2} + \frac{b^2}{6 A_2 E h^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

式 (13) に式 (27) と式 (25) を代入すると

次に、このトラス平版は x_1 方向と x_2 方向とが同じ性質をもち、かつ x_1 軸と x_2 軸に対称であることにより、 x_2 方向の剛性および二方向の相関剛性がきまる。なお、この平版は $M^{12} = M^{21}$ を満足する。

$$K^{1111} = K^{2222}, \quad K^{1211} = K^{1222} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} D^{1111} &= D^{2222}, & D^{1211} &= D^{1222} = 0 \\ R_{NM}^{1111} &= R_{NM}^{2222}, & R_{NM}^{1211} &= R_{NM}^{1222} = 0 \\ R_{QN}^{i \cdot k l} &= 0, & R_{QM}^{i \cdot k l} &= 0 \\ S^{11} &= S^{22}, & S^{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (30)$$

このトラス平版を 45° 回転させたものについて、前述の方法と同様に単位幅の片持梁を考えると D^{1111} , K^{1111} , R_{NM}^{1111} が求まる。

$$\left. \begin{aligned} D^{1111}|_{45^\circ} &= \left(\sqrt{2} a + \frac{A}{2} \right) \frac{E}{l} \\ K^{1111}|_{45^\circ} &= \left(\sqrt{2} a + \frac{A}{2} \right) \frac{Eh^2}{4l} \\ R_{NM}^{1111}|_{45^\circ} &= \left(\frac{A}{2} - \sqrt{2} a \right) \frac{Eh}{2l} \end{aligned} \right\} \dots\dots (31)$$

なお、ウェブ材が D , K , R_{NM} に影響しないことと上*

$$\left[\begin{array}{ccccc} D^{1111}\partial_{11} + D^{1212}\partial_{22} & D^{1212}\partial_{12} + D^{1122}\partial_{12} & R_{NM}^{1111}\partial_{11} + R_{NM}^{1212}\partial_{22} & R_{MN}^{1212}\partial_{12} + R_{NM}^{1122}\partial_{12} & 0 \\ D^{1212}\partial_{12} + D^{1122}\partial_{12} & D^{1212}\partial_{11} + D^{2222}\partial_{22} & R_{NM}^{1212}\partial_{12} + R_{NM}^{1122}\partial_{12} & R_{NM}^{1212}\partial_{11} + R_{NM}^{1222}\partial_{22} & 0 \\ R_{MN}^{1111}\partial_{11} + R_{MN}^{1212}\partial_{22} & R_{MN}^{1212}\partial_{12} + R_{MN}^{1122}\partial_{12} & K^{1111}\partial_{11} + K^{1212}\partial_{22} - S^{11} & K^{1212}\partial_{12} + K^{1122}\partial_{12} & S^{11}\partial_1 \\ R_{MN}^{1212}\partial_{12} + R_{MN}^{1122}\partial_{12} & R_{MN}^{1212}\partial_{11} + R_{MN}^{2222}\partial_{22} & K^{1212}\partial_{12} + K^{1122}\partial_{12} & K^{1212}\partial_{11} + K^{2222}\partial_{22} - S^{22} & S^{22}\partial_2 \\ 0 & 0 & -S^{11}\partial_1 & -S^{22}\partial_2 & S^{11}\partial_{11} + S^{22}\partial_{22} \end{array} \right] \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p^1 \\ -p^2 \\ -M^1 \\ -M^2 \\ -p^3 \end{Bmatrix} \dots\dots (34)$$

(iii) 三方向二層立体トラス平版（オクタプラッテ）

図-6

(i) と同じ方法で式 (14) に対応する式を求めると

$$\left. \begin{aligned} A_1 E &= A_2 E = \frac{3\sqrt{3}}{4} AE \\ A_3 E &= 2 A_W \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \theta \right)^{3/2} E \\ A_4 E &= A_W E \end{aligned} \right\} \dots\dots (35)$$

式 (35) を用いて A_{mn} を求めると

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{rb}{2 A_1 E}, & A_{12} &= \frac{rb^2}{6 A_1 E h}, & A_{13} &= 0 \\ A_{23} &= \frac{(rb)^2}{A_1 E h^2}, & A_{33} &= \frac{2rb}{A_1 E h^2} \end{aligned} \right\}$$

*下面の平面トラスの性質を用いると

$$D^{1122} = D^{1212}, \quad K^{1122} = K^{1212}, \quad R_{NM}^{1122} = R_{NM}^{1212} \dots (32)$$

そして、式 (30), (31), (32) を用いて、テンソル変換を行なうと

$$\left. \begin{aligned} D^{1122} &= D^{1212} = \frac{\sqrt{2} a E}{2l} \\ K^{1122} &= K^{1212} = \frac{\sqrt{2} a E h^2}{8l} \\ R_{NM}^{1122} &= R_{NM}^{1212} = -\frac{\sqrt{2} a E h}{4l} \end{aligned} \right\} \dots\dots (33)$$

以上より、すべての剛性が求まった。この結果、ウェブ材の剛性は剪断剛性のみに影響し、他の剛性に影響及ぼさない。

次に、求めた剛性を式 (5) に代入すると

$$A_{22} = \left(\frac{2}{3 A_4 E \cos \theta \sin^2 \theta} + \frac{1}{3 A_3 E \cos \varphi \sin^2 \varphi} + \frac{b^2}{9 A_1 E h^2} \right) r b + \frac{2(rb)^3}{3 A_1 E h^2} \dots\dots (36)$$

式 (11) に式 (36) と式 (35) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{2 A_1 E} = \frac{2}{3\sqrt{3} A E} \\ s_{12} &= \frac{b}{6 A_1 E h} = \frac{1}{3\sqrt{3} A E \tan \theta} \\ s_{13} &= s_{23} = 0 \\ s_{33} &= \frac{2}{A_1 E h^2} = \frac{8}{3\sqrt{3} A E h^2} \\ s_{22} &= \frac{2}{3 A_4 E \cos \theta \sin^2 \theta} + \frac{1}{3 A_3 E \cos \varphi \sin^2 \varphi} + \frac{b^2}{9 A_1 E h^2} \\ &= \frac{1}{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta} + \frac{1}{3\sqrt{3} A E \tan^2 \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots (37)$$

式 (37) を式 (13) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} C^{11} &= \frac{s_{22}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} = \frac{3\sqrt{3} A E}{2} \\ &\times \left(1 + \frac{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta}{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta + 6\sqrt{3} A E \tan^2 \theta} \right) \\ C^{12} &= \frac{-s_{12}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} = -\frac{1}{2 \tan \theta} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \times \frac{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta \cdot 6 \sqrt{3} A E \tan^2 \theta}{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta + 6 \sqrt{3} A E \tan^2 \theta} \\ C^{13} &= C^{23} = 0 \\ C^{33} &= \frac{1}{s_{33}} = \frac{3 \sqrt{3} A E h^2}{8} \\ C^{22} &= \frac{s_{11}}{s_{11} s_{22} - s_{12}^2} \\ &= \frac{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta \cdot 6 \sqrt{3} A E \tan^2 \theta}{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta + 6 \sqrt{3} A E \tan^2 \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

そこで、(i) の場合と同様に考えて x_1 方向の歪と断面力の剛性がきまる。

$$\left. \begin{aligned} l D^{1111} &= C^{11}, \quad l K^{1111} = C^{33}, \quad l S^{11} = C^{22} \\ l R_{NM}^{1111} &= C^{13} = 0, \quad l R_{NQ}^{11 \cdot 1} = C^{12}, \quad l R_{QM}^{1 \cdot 11} = C^{23} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

次に、このトラス平版は x_1 軸に対称であることより

$$\left. \begin{aligned} D^{1211} &= 0, \quad K^{1211} = 0, \quad S^{12} = 0, \quad R_{MN}^{1211} = 0 \\ R_{MQ}^{12 \cdot 1} &= 0, \quad R_{NQ}^{12 \cdot 1} = R_{QN}^{22 \cdot 1} = R_{NQ}^{22 \cdot 2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

又、曲げ剛性にはウェブ材が影響しないことと上下面の平面トラスの性質を考慮することより

$$\left. \begin{aligned} K^{1111} &= K^{2222} = 3 K^{1122} = 3 K^{1212} \\ K^{12ii} &= 0, \quad R_{MQ}^{ij \cdot k} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

なお、このトラス形の上下の対称性から

$$R_{MN}^{2211} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

そして、このトラス平版は 120° 回転させても性質が変らないことより、テンソル変換則を用いて、

$$D^{1111} = D^{2222} = 2 D^{1212} + D^{1122}, \quad D^{12ii} = 0 \dots (43)$$

$$S^{11} = S^{22} \dots\dots\dots (44)$$

$$R_{NQ}^{12 \cdot 1} = R_{NQ}^{11 \cdot 2} = R_{NQ}^{22 \cdot 2} = 0 \text{ より}$$

$$R_{NQ}^{22 \cdot 1} = R_{NQ}^{12 \cdot 2} = -R_{NQ}^{11 \cdot 1} \dots\dots\dots (45) *$$

$$\left[\begin{array}{ccc} D^{1111} \partial_{11} + D^{1212} \partial_{22} & D^{1212} \partial_{22} + D^{1122} \partial_{12} & R_{NQ}^{11 \cdot 1} \partial_1 \\ D^{1212} \partial_{12} + D^{1122} \partial_{12} & D^{1212} \partial_{11} + D^{2222} \partial_{22} & R_{NQ}^{22 \cdot 1} \partial_2 \\ -R_{QN}^{11} \partial_1 & -R_{QN}^{22} \partial_2 & K^{1111} \partial_{11} + K^{1212} \partial_{22} - S^{11} \\ -R_{QN}^{22} \partial_2 & -R_{QN}^{12} \partial_1 & K^{1212} \partial_{12} + K^{1122} \partial_{12} \\ -R_{QN}^{11} \partial_{11} - R_{QN}^{12} \partial_{22} & -R_{QN}^{22} \partial_{22} - R_{QN}^{12} \partial_{12} & K^{1212} \partial_{12} + K^{2222} \partial_{22} - S^{22} \\ -R_{NQ}^{11 \cdot 1} \partial_{11} - R_{NQ}^{12 \cdot 2} \partial_{22} & & -S^{22} \partial_2 \\ -R_{NQ}^{12 \cdot 2} \partial_{12} - R_{NQ}^{22 \cdot 1} \partial_{12} & & \\ S^{11} \partial_1 & & \\ S^{22} \partial_2 & & \\ S^{11} \partial_{11} + S^{22} \partial_{22} & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ w \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -p^1 \\ -p^2 \\ -\mathcal{M}^1 \\ -\mathcal{M}^2 \\ -p^3 \end{array} \right] \dots\dots\dots (51)$$

6. 結 び

本論では、まず一般的な異方性版の剛性と方程式を示し、次に具体的に、 $2 \cdot 3$ の立体トラス平版について、ウェブ材の剛性を考慮し、一般的な異方性版としての有効剛性と方程式について論じた。そして、次のような結

$$* R_{MN}^{1111} = R_{MN}^{1112} = R_{MN}^{1122} = 0 \text{ より}$$

$$R_{MN}^{ijkl} = 0 \dots\dots\dots (46)$$

又、このトラス平版は面内剛性に関して等方性で、かつ $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$, $\epsilon_{12} = 0$ に対してはウェブ材が効かないことから、その場合のトラス要素の歪エネルギー W_1 を求めると、

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{6 l A E \epsilon_{11}^2}{l b} = \frac{2 \sqrt{3} A E}{l} \epsilon_{11}^2 \dots\dots\dots (47)$$

一方、このトラス平版に対応する連続版の要素の歪エネルギー W_2 を求めると、

$$W_2 = \frac{1}{2} D^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = (D^{1111} + D^{1122}) \epsilon_{11}^2 \dots (48)$$

故に、 $W_1 = W_2$ より

$$\begin{aligned} D^{1122} &= \frac{3 \sqrt{3} A E}{2 l} \\ &\times \left(\frac{1}{3} - \frac{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta}{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta + 6 \sqrt{3} A E \tan^2 \theta} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (49)$$

D^{ijkl} は構成各層の剛性の和である⁴⁾との観点より、 D^{1111} と D^{1122} を見ると、上下弦の層は見掛け上の面内ポアソン比 ν が $1/3$ で、ウェブ材の層は見掛け上の面内ポアソン比 ν が -1 となる。この $\nu = -1$ は理論上存在しうる値の下限にあたっている。

式 (49) を式 (43) に代入すると

$$\begin{aligned} D^{1212} &= \frac{3 \sqrt{3} A E}{2 l} \\ &\times \left(\frac{1}{3} + \frac{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta}{A_W E \cos \theta \sin^2 \theta + 6 \sqrt{3} A E \tan^2 \theta} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (50)$$

以上より、すべての剛性が求まった。この結果、ウェブ材を考慮することによって、剪断と伸びの相関剛性 R_{QN} が存在し、面内伸び剛性 D にウェブ材の剛性が影響する。

次に、求めた剛性を式 (5) に代入すると

果が得られた。

i) のトラス平版の場合、ウェブ材を考慮することによって上下弦材だけを考えた場合⁴⁾に表われなかった面内剪断剛性 D^{1212} が存在する。また、ウェブ材を考慮しても Scheibe 作用と Platte 作用が分離することがわか

った。

(i), (ii) のトラス平版は, どちらもウェブ材が立面において角度が等しく左右対称であるので剪断の項は分離する。

(ii) のトラス平版の場合, ウェブ材を考慮しても剪断剛性 S のみに影響し, 他の剛性に影響を及ぼさない。

(iii) のトラス平版の場合, ウェブ材の非対称性より剪断の項が分離せず, 伸びと剪断の相関剛性 $R_{N\theta}$ が存在し, 又, 面内伸び剛性 D_{No} にウェブ材が影響する。

参 考 文 献

- 1) Yi, Yuan. Yu: "On linear equations of anisotropic elastic plates" Q. Appl. Math. **22**, No. 4 1965 p. 357-360.
- 2) Green and Zerna: "Theoretical elasticity" Oxford Univ. Press, 1960, p. 224-229.

- 3) K. Heki and T. Habara: "Introduction of Parametric Function into Analysis of Elastic Thin Plate". Proc. 15th Japan National Congress for Appl. Mech. 1965 p. 1~4.
- 4) 日置興一郎: "異方性合平版の応力解析理論とその応用(その1, その2)", 建論報, **137**, 1967.7, p. 17-23; **138**, 1967.8, p. 7-13.
- 5) H. Heki: "On the effective rigidities of lattice plates". Recent Reserches Structural Mechanics-Contribution of Prof. Y. Tsuboi, Uno-Shoten, Tokyo, 1968 p. 37~52.
- 5) Wright, D.T.: "A continuum analysis for double space fram shells". Publ. IABSE **28** 1966 p. 593-610
- 7) 日置・坂寿二: "2・3のトラス平版の有効剛性", 建近畿研報, 1968, p. 213-216.
- 8) 日置・坂寿二: "二層立体トラス平版の有効剛性とその個材応力", 建論報大会 1968.