LIMIT ANALYSIS OF BEAM-COLUMN CONNECTIONS (VI)

(Cruciform Connections of Wideflange Members
Subjected to Weak-Axis Bending and Axial Force)

by Dr. Hisashi TANAKA* Akio FUKUSHIMA**
Members of A.I.J.

§ 1. Introduction

In the previous papers¹⁾, the authors analyzed the yield moments of wideflange beam connections to wideflange columns and to box columns subjected to strong axis bending.

In this paper, the authors deal with the connections of wideflange members subjected to weak axis bending and axial force in column as shown Fig. 1.

In such a case, the bending moment of column is carried by both flange of column and a part of the axial force is directly transmitted by the column-web, and moreover, the bending moment of beam concentrates upon the beam-flanges. Thus, we may analyze the column-flange in the state shown in Fig. 2.

Fig.-1 Type and Dimensions of Connection

Fig.-2 Statically Admissible Stress Field

The bending moment M and the axial force N acting upon the column-flange are related to the bending moment $\mathfrak{M}$ and axial force $\mathfrak{N}$ acting upon the whole column as follows :

$$M = \mathfrak{M}/2 \dots\dots\dots (1.1)$$

$$N = (\mathfrak{N} - \sigma_0 A_w)/2 \quad \text{for } \mathfrak{N} > \sigma_0 A_w \dots\dots\dots (1.2 a)$$

$$\text{or} \quad N = 0 \quad \text{for } \mathfrak{N} \leq \sigma_0 A_w \dots\dots\dots (1.2 b)$$

where σ_0 denotes yield stress in simple tension, and A_w the sectional area of column-web.

The following are assumed in this analysis.

- (1) A plane stress is treated here, and the normal stress of the x direction vanishes. ($\sigma_x = 0$)
- (2) The material obeys to the von Mises' yield condition.

From the assumption (1) the equilibrium equations are

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \tau} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.3)$$

and from the assumptions (1) and (2) the yield condition is given by

* Prof., Inst. of Indu. Sci., Univ. of Tokyo

** Assist., Inst. of Indu. Sci., Univ. of Tokyo

$$\sigma_y^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_0^2 \quad (1.4)$$

§ 2. Statical Analysis

To obtain a statically admissible stress field, the column-flange is divided into several regions ($y \geq 0$) by the discontinuity lines as shown in Fig. 2, and the stress components shown in Table-1 are assumed.

The stresses in Table-1 satisfy the equilibrium conditions (1.3), the discontinuity conditions of stresses on each boundary, and the yield condition (1.4).

Therefore, these are statically admissible. Fig. 3 shows the stress distribution at $y=0$ and $y=\alpha b$.

From the above statically admissible stress-field, the bending moment M and the axial force N are obtained as

$$\begin{aligned} M &= 2t \int_{\xi b}^b \sigma_y x dx \\ &= 2\sigma_0 b^2 t \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)^2 \\ &\quad \times \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \xi \sin \frac{\sqrt{3}}{\alpha} (1-\xi) - \cos \frac{\sqrt{3}}{\alpha} (1-\xi) \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} N &= 2t \int_0^{\xi b} \sigma_y dx \\ &= 2\xi \sigma_0 b t \cos \frac{\sqrt{3}}{\alpha} (1-\xi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

where parameter ξ is taken for following ranges :

$$1 \geq \xi \geq 0 \quad \text{for} \quad \alpha \geq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \quad (2.3a)$$

$$1 \geq \xi \geq 1 - \frac{\alpha\pi}{2\sqrt{3}} \quad \text{for} \quad \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \geq \alpha \geq 0 \quad (2.3b)$$

§ 3. Kinematical Analysis

1. Analysis for Case A

Let us assume that plastic flow occurs closely inside of the beam-flange with unit width as shown in Fig. 4 and it produces the shearing strain-rate $\dot{\gamma}$ and the normal strain-rate $\dot{\epsilon}_y$ simultaneously.

Since the stress-strain-rate relations are

$$\sigma_y = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\sqrt{\dot{\epsilon}_y^2 + \frac{1}{3}\dot{\gamma}^2}} \sigma_0 \quad (3.1a)$$

$$\tau = \frac{\dot{\gamma}}{3\sqrt{\dot{\epsilon}_y^2 + \frac{1}{3}\dot{\gamma}^2}} \sigma_0 \quad (3.1b)$$

and the relation between the normal strain-rate $\dot{\epsilon}_y$ and the angular velocity $\dot{\kappa}$ of column, as seen in Fig. 4 (b), is

$$\dot{\epsilon}_y = (x - \xi b) \dot{\kappa} \quad (3.2)$$

the stress-strain-rate relations become

$$\sigma_y = \frac{(x - \xi b)}{\sqrt{(x - \xi b)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3}\dot{\kappa}} \right)^2}} \sigma_0 \quad (3.3a)$$

Table 1

regions	σ_y	τ
(1)	$\sigma_0 \cos \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{b} \right)$	0
(2)	$-\sigma_0 \cos \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \left(1 + \frac{x}{b} \right)$	0
(3)	$-\sigma_0 \cos \frac{\sqrt{3}}{\alpha} (1 - \xi)$	0
(4)	$\frac{\sigma_0}{\alpha b} y \cos \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{b} \right)$	$\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{b} \right)$
(5)	$-\frac{\sigma_0}{\alpha b} y \cos \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \left(1 + \frac{x}{b} \right)$	$\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \left(1 + \frac{x}{b} \right)$
(6)	$-\sigma_0 \cos \frac{\sqrt{3}}{\alpha} (1 - \xi)$	$\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{\alpha} (1 - \xi)$

Fig.-3 Stress Distributions in Column-Flange

Fig.-4 Kinematically Admissible Velocity Field in Case A.

$$\tau = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3} \dot{\kappa}} \right)}{\sqrt{(x - \xi b)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3} \dot{\kappa}} \right)^2}} \sigma_0 \quad (3.3b)$$

The bending moment M , the axial force N of the column and the flange force F of the beam can be obtained from the above equations as

$$\begin{aligned} M &= t \int_{-b}^b \sigma_y x dx \\ &= t \int_{-b}^b \frac{(x - \xi b)x}{\sqrt{(x - \xi b)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3} \dot{\kappa}} \right)^2}} \sigma_0 dx \quad (3.4a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -N &= t \int_{-b}^b \sigma_y dx \\ &= t \int_{-b}^b \frac{(x - \xi b)}{\sqrt{(x - \xi b)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3} \dot{\kappa}} \right)^2}} \sigma_0 dx \quad (3.4b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= t \int_{-b}^b \tau dx \\ &= t \int_{-b}^b \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3} \dot{\kappa}} \right)}{\sqrt{(x - \xi b)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3} \dot{\kappa}} \right)^2}} \sigma_0 dx \quad (3.4c) \end{aligned}$$

Introducing the following parameters ω_1 and ω_2 defined by

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sinh^{-1} \frac{b(1 - \xi)}{\left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3} \dot{\kappa}} \right)} \\ \omega_2 &= \sinh^{-1} \frac{b(1 + \xi)}{\left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3} \dot{\kappa}} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

eqs. (3.4a), (3.4b) and (3.4c) can be expressed as follows:

$$M = \frac{2 \sigma_0 b^2 t [\sinh(\omega_1 + \omega_2) - (\omega_1 + \omega_2)]}{(\sinh \omega_1 + \sinh \omega_2)^2} \quad (3.6a)$$

$$N = 2 \sigma_0 b t \tanh \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) \quad (3.6b)$$

$$F = \frac{2 \sigma_0 b t (\omega_1 + \omega_2)}{\sqrt{3} (\sinh \omega_1 + \sinh \omega_2)} \quad (3.6c)$$

From the relation

$$F = \frac{M}{\alpha b} \quad (3.7)$$

α is given by

$$\alpha = \frac{\sqrt{3} [\sinh(\omega_1 + \omega_2) - (\omega_1 + \omega_2)]}{(\omega_1 + \omega_2) (\sinh \omega_1 + \sinh \omega_2)} \quad (3.8)$$

2. Analysis for Case B

In case that α is comparatively small, that is, for the range indicated by [B] in Fig. 6, another velocity field shown in Fig. 5 gives better solution.

Supposing that the region BCB'C' deforms with the horizontal velocity $\dot{u}$ and vertical velocity $\dot{v}$ given by

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= y \dot{\theta} \\ \dot{v} &= \frac{\xi_1}{\alpha} y \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

and that lines of AB, CD, A'B', and C'D' make discontinuous lines of velocity, the strain-rates in BCB'C' are given by

Fig. 5 Kinematically Admissible Velocity Field in Case B.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_y &= \frac{\dot{\xi}_1}{\alpha} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.10)$$

and specific power of dissipation d is then

$$d = \sigma_0 \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_y^2 + \frac{1}{3} \dot{\mathbf{r}}^2} = \sigma_0 \dot{\theta} \sqrt{\left(\frac{\dot{\xi}_1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}} \dots\dots\dots (3.11)$$

Therefore, the total power of dissipation D_1 of this part is

$$D_1 = 4 \alpha \xi_2 \sigma_0 b^2 t \dot{\theta} \sqrt{\left(\frac{\dot{\xi}_1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}} \dots\dots\dots (3.12)$$

On the discontinuous lines AB and CD, there exist only normal stress σ_0 in y direction. Therefore, referring to Fig. 5, the powers of dissipation D_2 on AB and D_3 on CD are easily given by

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= \frac{1}{2} (1 + \xi_1 - \xi_2)^2 \sigma_0 b^2 t \dot{\theta} \\ D_3 &= \frac{1}{2} (1 - \xi_1 - \xi_2)^2 \sigma_0 b^2 t \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.13)$$

Thus, the total power of dissipation D is

$$\begin{aligned} D &= D_1 + 2(D_2 + D_3) \\ &= 2 \left[2 \alpha \xi_2 \sqrt{\left(\frac{\dot{\xi}_1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}} + \xi_1^2 + (1 - \xi_2)^2 \right] \sigma_0 b^2 t \dot{\theta} \dots\dots\dots (3.14) \end{aligned}$$

On the other hand, the power of load W is

$$W = 2 N \xi_1 b \dot{\theta} + 2 F \alpha b \dot{\theta} = 2(N \xi_1 b + M) \dot{\theta} \dots\dots\dots (3.15)$$

so that M is given from equation of W to D by

$$M = \left[2 \alpha \xi_2 \sqrt{\left(\frac{\dot{\xi}_1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}} + \xi_1^2 + (1 - \xi_2)^2 \right] \sigma_0 b^2 t + N \xi_1 b \dots\dots\dots (3.16)$$

and the minimum value of M is obtained as

$$M = \frac{2 \alpha \sigma_0 b^2 t}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^2} - \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \right] \dots\dots (3.17)$$

when

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\alpha \left(\frac{N}{N_0}\right)}{\sqrt{3 \left\{ 1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 \right\}}} \\ \xi_2 &= 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{3 \left\{ 1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 \right\}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.18)$$

From the condition of $\xi_2 \geq 0$, eq. (3.17) is valid in the range of

$$\alpha \leq \sqrt{3 \left\{ 1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 \right\}} \dots\dots\dots (3.19)$$

§ 4. Conclusion

The results of the preceding analysis are graphically shown in Fig. 6 and 7, where M_0 and N_0 are the yield moment and axial force of column-flange, respectively, defined by

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= b^2 t \sigma_0 \\ N_0 &= 2 b t \sigma_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1)$$

As seen in these figures, we found that the connections cannot transmit enough the bending moment, especially when α is small.

Fig.-6 Interaction Curves of M/M_0 versus N/N_0

Fig.-7 Interaction Curves of M/M_0 versus N/N_0

References :

- 1) H. Tanaka, et al : Limit Analysis of Beam-Column Connections,
Part I , Trans. of A.I.J. No. 148, June 1968,
No. 149, July 1968,
Part II, No. 157, March 1969,
Part III, No. 159, May 1969,
No. 100, June 1969,
Part IV, No. 161, July 1969,
No. 162, Aug. 1969,
Part V, No. 163, Sept, 1969.
- 2) D.C. Drucker : The Effect of Shear on the Plastic Bending of Beams, Jour. Appl. Mech., Vol. 23, No. 4, Dec. 1956.
- 3) P.G. Hodge, Jr. : Interaction Curves for Shear and Bending of Plastic Beams, Jour. Appl. Mech., Vol. 24, Sept. 1957.

柱はり接合部の極限解析(VI)(梗概)

弱軸曲げと軸力をうける十字形接合部

正会員 田 中 尚*
正会員 福 島 暁 男**

§ 1. は し が き

前報までは、H形断面はりとしH形断面柱および箱形断面柱の接合部が強軸曲げをうける場合について、降伏モーメントの極限解析を行ってきたが、今回は図—1に示すようなH形断面材による十字形接合部が弱軸曲げと軸力をうける場合を取扱うことにする。

このような場合には、はりの曲げモーメントははりのフランジを通じて柱フランジに集中して作用し、また柱の曲げモーメントは柱の両フランジによって伝達し、かつ柱の軸力の一部は柱ウェブで直接支えられるから、図—2に示す状態で柱のフランジを解析すればよい。

柱のフランジに作用する曲げモーメント M と軸方向力 N は式 (1.1), (1.2) で与えられる。

以下の極限解析には次の仮定を用いる。

(1) 平面応力を仮定し、かつ x 方向の垂直応力度は 0 とする。($\sigma_x = 0$)

(2) 材料は von Mises の降伏条件に従う。

仮定 (1) より釣合条件は式 (1.3) で与えられ、仮定 (1) と (2) より降伏条件は式 (1.4) で与えられる。

§ 2. 静 的 解 析

静的許容応力場を求めるために、柱フランジを不連続線により図—2に示すような領域に分け、各領域に対し表—1に示す応力の成分を仮定する。

表—1の応力は釣合条件式 (1.3)、降伏条件式 (1.4) および各領域の境界において不連続条件を満足しているから、静的許容応力場であることがわかる。図—3に $y=0$ と $y=ab$ における応力分布を示す。

上に求めた静的許容応力場より降伏モーメントおよび降伏軸方向力は ξ をパラメーターとして式 (2.1), (2.2) のように求まる。ただし、パラメーター ξ は式 (2.3) の範囲にとる。

§ 3. 運動的解析

1. 解 析 A

図—4に示すように、はりフランジの内側に単位幅をもつ不連続速度場を考え、せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ と垂直ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_y$ が同時に生ずると仮定すると、このひずみ

速度に対応する応力は式 (3.1) となる。図—4 (b) より垂直ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_y$ と柱の角速度 $\dot{\kappa}$ との関係は式 (3.2) であるから、式 (3.1) は式 (3.3) のようになる。

式 (3.3) より柱の曲げモーメント M 、軸方向力 N およびはりのフランジ力 F を求めると式 (3.4) が得られる。

式 (3.5) のように定義されるパラメーター ω_1, ω_2 を導入すると、式 (3.4) は式 (3.6) のようになる。また柱の曲げモーメント M とはりのフランジ力 F の関係は式 (3.7) であるから、これより α を求めると式 (3.8) となる。

2. 解 析 B

α が比較的小さい場合には、図—6の「B」の範囲に対して図—5に示すような速度場を仮定するとよい結果が得られる。

図において $BCB'C'$ 部分は式 (3.9) で与えられる水平速度 $\dot{u}$ と垂直速度 $\dot{v}$ をもち、 $AB, CD, A'B', C'D'$ に速度の不連続線が生ずると仮定する。

$BCB'C'$ 部分のひずみ速度は式 (3.9) より式 (3.10) で与えられ、単位エネルギー散逸率 d は式 (3.11) となるから、この部分のエネルギー散逸率 D_1 は式 (3.12) となる。

また不連続線 AB と CD 上には y 方向の垂直応力度 σ_y のみ存在するから、図—5より AB, CD におけるエネルギー散逸率をそれぞれ D_2, D_3 とすると式 (3.13) で与えられる。よって全エネルギー散逸率 D は式 (3.14) となる。

一方、荷重のなす仕事率 W は式 (3.15) であるから $W=D$ において曲げモーメント M を求めると式 (3.16) が得られる。これより M の最小値は式 (3.17) で与えられる。ただし式 (3.17) は式 (3.19) の範囲内で成立する。

§ 4. む す び

上述の解析の結果を図—6, 図—7に示す。ただし、 M_0, N_0 はそれぞれ柱フランジの降伏モーメントと降伏軸方向力であり式 (4.1) で与えられる。

図からわかるように、 α が小さい場合には接合部において曲げモーメントの伝達は著しく不十分になることがわかる。

* 東京大学教授 生産技術研究所・工博

** 東京大学・大学院生

(昭和43年11月29日日本稿受理・討論期限昭和45年月1末日)