吊構造の形状決定問題に関する一計算手法について

正 会 員 中 西 宏*
正 会 員 波 田 凱 夫**

1. 序 論

一般に、吊構造（ケーブル構造）の形状決定という問題は、次の条件を満足する完成状態を見出すことであるといえる。

- (a) 構造はつり合状態にあること、
- (b) 全部材に張力が作用すること（ゆるみ部材のないこと、
- (c) 完成形状が建築計画上定められた形状にできるだけ近似していること。

これらの制約条件のうち (a) および (b) は吊構造の構造特性からして自明のものであるが、条件 (c) は、上記の力学的制約条件 (a), (b) を満足する完成形状をもつ構造物がさらにその構造物の建築計画上、施工上、あるいは使用目的上の何らかの制約を受けることを示すものである。我々は既往の研究において、いくつかの節点の座標を所定の値とするつり合形状を求めること¹⁾、主吊材の節点間距離が所定の値を保っているようなつり合形状を有限変形解析を用いて求めること^{2), 10)}、あるいは任意に設定された原設計形状と完成形状との座標差をとり、そのノルムを、つり合条件を考慮しつつ最小とするように完成形状の節点座標を求めること³⁾、などの解析手法を論じたが、これらはいずれも条件 (c) を考慮にいたれたものである。吊構造の形状決定を論じた研究としては、部材の剛体運動によってつり合可能形状をまず見出し、これに最小2乗法を適用して張力を求めようとするもの⁵⁾、二方向ケーブルネットにおいて各ロープ張力の水平成分を最小2乗法により推定し、厳密なつり合条件をマトリックス変位法により、あるいは鉛直座標を未知数とするつり合方程式を解くことにより目標形状に近いつり合状態を得ようとするもの^{6), 7)}（文献6）では2方向直交ケーブルネットのみを対象としている）、また同様の目的で、原設計形状とつり合形状の鉛直座標差のノルムを最小とするように鉛直座標およびロープ張力の水平成分を決定しようとするもの⁸⁾、などがある。いずれも条件 (c) を考慮にいたれた解析手法であるといえよう。

著者らは、先に有限変形解析を用いて吊構造の形状を決定する一つの手法を提案した^{2), 10)}。その手法は原設計形状を建築計画的に任意に与え（部材の断面設計を含む）、これに有限変形解析をくり返し適用するものであるが、その際、まず変形後の部材長が原設計形状の部材長に等しくなるように各部材に導入する初張力の値を定めて、一つのつり合状態を作り、その後そのつり合状態において圧縮部材力あるいはゆるみを生ずる部材が存在する場合、逐次形状と部材力を変化させて、全部材に有効な張力が働くようにするものである。このような設計解析の流れを Fig. 1 に破線で示す（手法④）。図に示すようにこの手法は有限変形解析を利用しているため、解析の入力データとして部材の断面諸元を必要とする。

本研究は文献2)の2.2で取り扱った“部材弾性伸びによる変形の除去”の問題と同じ目的を持つもので、力学的考慮を必ずしも払わないで設定された原設計形状がまず与えられたものとし、その形状から幾何学的に算定された節点間距離を保持しつつ、つり合条件を満足する形状と部材力を決定しようとするものである。したがって、文献2)で論じたように、与えられた原設計形状がつり合不可能なものであれば、本文の手法で得られるつり合形状は、原設計形状からメカニカルな変形を生じたものとなる。ただ、本文の解析手法は文献2)のそれとは主旨を異にする。すなわち文献2)は手法④に示す

Note:> Method ④ (Ref. 2)
————> Method ⑤ (Present paper)

Fig. 1 Block flow chart of design calculus

* (株)神戸製鋼所・構造研究所・研究員

** 同上・主任研究員・工博

(昭和49年3月20日日本稿受理・討論期限昭和50年1月末日)

ように有限変形解析をくり返し適用するものであるが、その各ステップのつり合形状を原設計（節点座標既知）からの変形として扱っているのに対して、本文の手法は節点座標そのものを未知数として取り扱い、つり合方程式と節点間距離保持の制約条件式とを一群の非線型連立方程式として一挙にこれを解こうとするものである。Fig. 1 に手法 ⑥ として本文の設計解析の流れを示す。ただ Fig. 1 において原設計形状として節点座標を与えるようになっているが、ここで節点座標は次に示す 2 つの役割を果たすものにすぎないことに留意する必要がある。

(1) 保持すべき節点間距離の値を与える。

(2) 未知節点座標の初期値を与える。

したがって、本文の解析法は、前述のように原設計形状を与え、それによって規定される節点間距離を保つようにつり合形状を求めるという問題を取り扱うものであるが、見方を変えれば原設計形状を与えなくても、完成状態での節点間距離のみを与えれば、その値を保ちつつ外力とつり合うような形状を求めるという問題を解くものであるともいえる（換言すれば、前者の問題は与えられた設計形状にできるだけ近い完成形状を見出すこと、後者の問題は節点間距離のみを規定したとき、つり合形状はどのような形で得られるかを検討することであるといえる）。後者に類似した問題を取り扱ったものとして文献 4) がある。文献 4) では全部材の無応力長を与えて、これに変形解析を適用し、つり合状態を求めている（完成形状は計算の結果として得られるものであって、原設計では形状に関する制約はない）。これは結果的には原設計に対して変形解析を適用したにすぎないものと考えられる。

本文の数値解析では、D.W. Marquardt の提案する Maximum neighborhood method⁹⁾ の考え方を導入し、さらにこれを改善することにより、解析の基礎となる非線型連立方程式の有効な解析法を述べる。また問題の解の一意性についても検討を加える。具体的な計算例として 3 例を挙げているが、その内 2 例は原設計形状（節点座標、境界条件、荷重）が与えられた場合のもので、それぞれゆりみ部材が存在しないもの、およびゆりみ部材が存在するがそれを文献 2) の 2.3 の所論によって処理したものである。他の一例は原設計形状は与えず一定の節点間距離のみを規定し、これに境界条件、荷重等を与えたものである。

本報 Fig. 1 手法 ⑥ の流れに従って完成状態が得られたならば、これによって部材諸元を設計することにより実際の吊構造の施工に必要な部材無応力長が容易に得られるから、この無応力長をもつ部材を適宜組み合わせ、所定の載荷を行うことにより、制約条件 (a), (b), (c) を満足する完成状態が得られる。

2. 形状決定のための基礎方程式の誘導

序論で述べたように節点間距離（原設計形状を与えることにより、あるいは完成状態での節点間距離のみを規定することによる）が保持されるという制約条件の下につり合状態にある完成形状の節点座標を決定することを考える。

以下の解析においてはつぎの記号を用いる。

X, Y, Z : 完成形状の節点座標

$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$: 原設計形状の節点座標

P : 部材力

L_0 : 保持すべき節点間距離

F_i : 第 i 節点の集中荷重 (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} はそれぞれ第 i 節点における X, Y, Z 方向の荷重を示す)

m : 第 m 部材に関する添字

M : 総部材数

f : 構造物の自由度

文献 2) の 2.2 で取り扱った部材弾性伸びを消去するくり返しを限りなく行くと、その究極においては Fig. 2 の第 i 節点で次式を満足する状態が得られる。

Fig. 2 Equilibrium at a joint i

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^N \frac{P_m}{L_{0m}} \Delta X_m - F_{ix} &= 0 \\ \sum_{m=1}^N \frac{P_m}{L_{0m}} \Delta Y_m - F_{iy} &= 0 \\ \sum_{m=1}^N \frac{P_m}{L_{0m}} \Delta Z_m - F_{iz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$L_{1m} = L_{0m} \dots\dots\dots (2)$$

式 (1) はつり合条件を、式 (2) は部材には弾性伸びが生じていないことを表わす。ここで、 $\Delta X_m, \Delta Y_m, \Delta Z_m$ はそれぞれ各座標成分における第 m 部材の両端節点座標（完成形状）の差を示し、また

$$L_{1m} = \sqrt{\Delta X_m^2 + \Delta Y_m^2 + \Delta Z_m^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$L_{0m} = \sqrt{\Delta \bar{X}_m^2 + \Delta \bar{Y}_m^2 + \Delta \bar{Z}_m^2} \dots\dots\dots (4)$$

である。 $\Delta \bar{X}_m, \Delta \bar{Y}_m, \Delta \bar{Z}_m$ はそれぞれ原設計形状における第 m 部材の両端節点座標の差を表わす。

序文で述べたように文献 2) ではこのような状態を有限変形解析を用いた反復計算によって求めたが、その究極の状態のみに着目すれば、完成形状における節点座標および部材力はつり合方程式と座標のみの関係式（以下

節点間距離保持の式と呼ぶ)から決定し得る。したがって部材力 P および節点座標 X を未知数として、つり合方程式および節点間距離保持の式を次のように書くことができる。

$$\phi_i(P_0, X) = 0 \quad i=1, \dots, f \dots\dots\dots (5)$$

$$\varphi_m(X) = 0 \quad m=1, \dots, M \dots\dots\dots (6)$$

式 (5) と (6) は吊構造完成時のつり合状態における部材力 P_0 (M 個) と境界を除く節点座標 X (f 個) に関する非線型連立方程式であり、これを直接解くことによってすべての未知数を決定することができる。ただし一意的な解が存在しない場合がある。これについては 3.2. で述べる。また本報のように完成状態に解析の基礎を置く場合、計算に先立って部材の伸び剛性 EA を与える必要がない。外力 F と節点間距離 L_0 を与えて式 (5) と (6) を連立に解くことにより、つり合状態での部材力が決定されるから、その値に応じて部材断面諸元を定めればよく、部材の設計は極めて容易となる。

なお、形状に関する制約条件(節点間距離保持の条件)の与え方によっては、それを完全に満足するようにつり合状態が求められない場合がもちろんあり得る。原設計として幾何学的に成り立ち得る全体形状が与えられた場合には、そこで規定される節点間距離を保持するつり合状態が必ず得られるが、全体形状に考慮を払わないで、節点間距離のみを任意に与えると、たとえば Fig. 3 a) のような全く不合理な制約条件を課する結果となる場合がある。このような不合理な制約の場合を列記すると、

(i) Fig. 3 a) の場合のように、ある境界から他の境界につながる全節点間距離の総和が両境界の最短距離より短い場合、

(ii) Fig. 3 b) の場合のように、主吊材 (L_{01}, L_{02}) と押え材 (L_{03}, L_{04}) 等の数方向のケーブルを有する構造で、個々のケーブル長が過大または過小となって主吊材と押え材の交点としての節点を形成し得ない場合 (図の場合押え材が短かすぎて主吊材にとどかない)、

(iii) Fig. 3 c) に示す構造は不静定構造であるが、

Fig. 3 Examples of unreasonable configuration condition

このような、外的または内的不静定構造では、全節点間距離を任意に設定することはできない (図の場合 3 本の部材については節点間距離を任意に与え得るが、残りの 1 本では任意に与えられない)。

原設計形状が幾何学的に可能な形で与えられる場合や簡単な構造物の場合では、保持すべき節点間距離として妥当な値を設定することができ、(i) および (ii) に示す不合理な制約となることは少ない。しかし複雑な構造物あるいは前記 (iii) のような外的または内的不静定構造について、節点間距離 L_{0m} を規定してつり合形状を求める場合、その形状に対する制約 L_{0m} が不合理なものとなる可能性がある。しかしながら、このような場合でも次章 3. で述べる数値計算法によって、不合理な節点間距離の値を規定しても、その値に最も近く、かつ合理的な形状を形成する様な最終のつり合状態を求めることができる。したがって結果的には本文の解析法によれば、形状に関していかなる制約条件を与えようとも

① その制約条件が幾何学的に合理的なものであれば、その条件を満足し、

② その制約条件が不合理なものであっても、そこで規定される値に最も近い節点間距離をもつ合理的な形状を有する最終のつり合状態を得ることができる。

なお、いうまでもないことであるが、上記の解析では序論で述べた制約条件 (b) (すべての部材力は張力) には考慮を払っていない。したがって式 (5), (6) を解いたときに圧縮部材力が発生する可能性はもちろん存在する。このような圧縮部材が発生したときには、文献 2) の 2.3 で述べた手法によりこれを処理して、すべての部材に有効な張力を働かせればよい。ただし、そのためには本章の解析が終った段階で、部材断面諸元を設定せねばならない。Fig. 1 の手法 ③ にはこのような計算の流れが示されている。

3.1 基礎方程式の数値解法

非線型連立方程式の数値解法として Newton-Raphson 法がしばしば用いられるが、この方法では問題によっては発散する場合がある。特に、本研究では式 (5) に示すつり合方程式および式 (6) の節点間距離に関する方程式を同時に解くため、初期値によってはこれらの方程式相互の異質性によって収束が非常におそくなったり、発散したりすることがある。このような不都合を解消する目的で、本文では D.W. Marquardt の提案する Maximum neighborhood method⁹⁾ の手法を Newton-Raphson 法に取り入れるとともに、以下に示すような 2 つの係数、 α (加速係数) と r (重み係数) を導入した。これによって上記の異質の方程式系が比較的容易に解かれるようになった。

まず式 (5) を行列表示して、

$$\Phi_A = A \cdot P_0 - F \dots\dots\dots (7)$$

と書く。ここで、 A は部材の方向余弦を要素とする行列 ($f \times M$)、 P_0 は部材力のベクトル ($1 \times M$)、 F は外力のベクトル ($1 \times f$) である。さらに式 (6) より φ_m を次のように改めて定義し、

$$\begin{aligned}\varphi_m &= L_{1m}^2 - L_{0m}^2 \\ &= \Delta X_m^2 + \Delta Y_m^2 + \Delta Z_m^2 - L_{0m}^2 \quad m=1, \dots, M\end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) の φ_m をベクトル表示して Φ_B と表わす。

いま、Newton-Raphson 法における Jacobian 行列を J とし、未知量の修正ベクトルを $\Delta\varphi_N = [\Delta\varphi_{NA} \quad \Delta\varphi_{NB}]^T$ とすると、Newton-Raphson 法は、

$$J^i \Delta\varphi_N^i = \begin{bmatrix} \Phi_A^i \\ \Phi_B^i \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} X^{i+1} &= X^i + \Delta\varphi_{NA}^i \\ P_0^{i+1} &= P_0^i + \Delta\varphi_{NB}^i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と書ける (添字 i はくり返し回数を示す)。さらに式 (9) の両辺に $(J^i)^T$ を左から乗じ、

$$D^i \Delta\varphi_N^i = (J^i)^T \begin{bmatrix} \Phi_A^i \\ \Phi_B^i \end{bmatrix}$$

とする。ここで $D^i = (J^i)^T (J^i)$ である。

Maximum neighborhood method では任意の正の数 λ を導入し、

$$(D^i + \lambda E) \Delta\varphi^i = (J^i)^T \begin{bmatrix} \Phi_A^i \\ \Phi_B^i \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} X^{i+1} &= X^i + \Delta\varphi_A^i \\ P_0^{i+1} &= P_0^i + \Delta\varphi_B^i \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

を解くことを考える。式 (11) より得られる修正ベクトル $\Delta\varphi$ の方向は、 $\lambda=0$ および $\lambda=\infty$ にそれぞれ対応して Newton-Raphson 法における修正ベクトルと Steepest Descent 法における修正ベクトルの方向を示すものと考えることができる。 λ の値は収束に影響を及ぼすものであるが、有効な決定法はないようである。本文では式 (11) を行列 D の対角要素が 1 となるように変換し、 λ を 0 から 1 の間で経験的にとった。またこの手法の特長は正の係数 λ により行列 J あるいは D が特異となる場合においても修正ベクトルを有効に決定することができる。

本文では式 (11) で得られる修正ベクトル $\Delta\varphi$ に係数 α を乗じたものを未知量の修正値と考えるが、 α としては Φ_A^{i+1} と Φ_B^{i+1} のノルムの平方和を最小とするようなものを選ぶ。

式 (11) より求まる $\Delta\varphi^i$ に α を乗じ、 Φ_A^{i+1} を求めると、

$$\begin{aligned}\Phi_A^{i+1} &= (A + \alpha A') (P_0 + \alpha P_0') - F \\ &= A' P_0' \alpha^2 + (A' P_0 + \alpha P_0') \alpha + \Phi_A^i\end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで、 A' はくり返し回数 i 回目の修正ベクトルによる方向余弦変化を要素とする $f \times M$ の行列で

あり、 P_0' は初張力の修正ベクトルである。

同様に Φ_B^{i+1} についても、

$$\begin{aligned}\Phi_B^{i+1} &= (\Delta X_m + \alpha \Delta X_m')^2 + (\Delta Y_m + \alpha \Delta Y_m')^2 \\ &\quad + (\Delta Z_m + \alpha \Delta Z_m')^2 - L_{0m}^2 \\ &= (\Delta X_m'^2 + \Delta Y_m'^2 + \Delta Z_m'^2) \alpha^2 \\ &\quad + 2(\Delta X_m \Delta X_m' + \Delta Y_m \Delta Y_m' + \Delta Z_m \Delta Z_m') \alpha \\ &\quad + \Phi_B^i \quad (m=1, \dots, M)\end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここで、 $\Delta X_m'$ 、 $\Delta Y_m'$ 、 $\Delta Z_m'$ はそれぞれ第 m 部材の両端節点座標に対応する座標修正値の差を示す。

式 (14) を行列表示して

$$\Phi_B^{i+1} = B_1 \alpha^2 + B_2 \alpha + \Phi_B^i \quad (15)$$

と書く。ここに B_1 、 B_2 はともに $1 \times M$ のベクトルである。

係数 α は次式で定義される関数 $g(\alpha)$ を最小にするような値として決定される。

$$\begin{aligned}g(\alpha) &= \|\Phi_A^{i+1}\|^2 + r \|\Phi_B^{i+1}\|^2 \\ &= c_1 \alpha^4 + c_2 \alpha^3 + c_3 \alpha^2 + c_4 \alpha + c_5\end{aligned} \quad (16)$$

ここに、

$$\begin{aligned}c_1 &= \|A' P_0'\|^2 + r \|B_1\|^2 \\ c_2 &= 2\{A' P_0', (A' P_0 + \alpha P_0')\} + 2r(B_1, B_2) \\ c_3 &= \|(A' P_0 + \alpha P_0')\|^2 + 2(A' P_0', \Phi_A^i) \\ &\quad + r\{\|B_2\|^2 + 2(B_1, \Phi_B^i)\} \\ c_4 &= 2\{(A' P_0 + \alpha P_0'), \Phi_A^i\} + 2r(B_2, \Phi_B^i) \\ c_5 &= \|\Phi_A^i\|^2 + r \|\Phi_B^i\|^2\end{aligned}$$

である。よって係数 α の値は $\frac{dg}{d\alpha} = 0$ より

$$4c_1 \alpha^3 + 3c_2 \alpha^2 + 2c_3 \alpha + c_4 = 0 \quad (17)$$

の根のうち、 $g(\alpha)$ を最小にするものを選ぶ。なお $\alpha=1$ 、 $\lambda=0$ の場合は、Newton-Raphson 法 (式 (9)) の修正ベクトルをそのまま使用することを意味する。

r は 2 つのノルムの平方値 $\|\Phi_A^{i+1}\|^2$ と $\|\Phi_B^{i+1}\|^2$ の大きさをそろえるための正の係数であり、その値は Fig. 4 の流れ図における Loop 2 によって定められる。すなわち図の Loop 1 ではまず $r=0$ とおいて、つり合方程式の収束をめざし、これが達成されたならば Loop 2 へ移って r の値を 2 つのノルムの平方値の比として与える。これによってつり合状態が乱されるなら再び Loop 1 へもどる。このようなくり返し計算で 2 つのノルムの平方値 $\|\Phi_A^i\|^2$ 、 $\|\Phi_B^i\|^2$ に収束条件を満足させることによって最終の完成状態 (Fig. 4 の Equilibrium state (A)) が決定される。

以上は幾何学的に合理的な原設計形状、あるいは節点間距離が与えられた場合の解法であるが、前章 2. で述べたような不合理な形状の制約条件を与えた場合には、 $\|\Phi_B^i\|^2 < \epsilon_B$ を満足させることはできない。しかしながらこの制約をゆるめればつり合条件のみを満足するある形状が得られるはずである。すなわち、その場合には $\|\Phi_B^i\|^2 < \epsilon_B$ を満足しなくても、くり返し計算の結果、

Fig. 4 Flow chart of computation

$\|\Phi_B\|^2$ が一定値に収束するようになる。したがって、そのような収束の判定が Fig. 4 の※)で行われ、最終的なつり合状態 (Fig. 4 の Equilibrium state (B)) が得られる。このつり合状態における形状は幾何学的に成立し得るものであることはもちろん、その節点間距離の値が制約条件で規定された値に最も近いものであることが Φ_B の定義より明らかである。

3.2 解の一意性について

本節においては解の一意性について検討する。この問題については一般につきの言うことができる。

「3.1 で述べた数値計算において解が得られたとする。そのとき Jacobian 行列 J が特異となる場合、解は一意的でない。ただし外的、内的不静定構造にあっては J は常に特異である。」

さらにこれを詳述すると、

1. 外的、内的不静定構造においては J の Jacobian は常に 0 であり、解は一意的でない。よって得られる部材力の解は初期値の影響を受ける。

2. 静定構造、不安定構造においても、解の収束とともに J の Jacobian が限りなく 0 に近づくような場合には部材力の解は一意的でなく、初期値の影響を受ける。

またいずれの場合も 3.1 の計算法で求まる節点座標の解は一意的である。このように部材力に対する解が一意的でない場合においても 3.1 の数値計算により、初期値の近傍で 1 つの解が得られることは言うまでもない。

静定構造で解が一意的でない場合の具体的な例を

Fig. 5

Fig. 5 の構造で示す。この構造は自由度 6、部材数 6 の静定構造であり、その形状はつり合いおよび節点間距離に関する条件を満たして得られた解であるとする。部材 25, 36 は Y 軸に平行であるとし、

$$\Delta X_1 = X_2 - X_1 = X_5 - X_4$$

$$\Delta X_2 = X_3 - X_2 = X_6 - X_5$$

$$\Delta Y_1 = Y_2 - Y_1$$

$$\Delta Y_2 = Y_3 - Y_2$$

$$\Delta Y_3 = Y_4 - Y_5$$

$$\Delta Y_4 = Y_5 - Y_6$$

$$\Delta Y_5 = Y_5 - Y_2$$

$$\Delta Y_6 = Y_6 - Y_3$$

とすると、行列 J の Jacobian を 0 とする条件は次のいずれかが成り立つことである。

$$\Delta X_1 = 0, \Delta X_2 = 0, \Delta Y_5 = 0, \Delta Y_6 = 0$$

$$\Delta Y_2 \Delta Y_3 - \Delta Y_1 \Delta Y_4 = 0$$

4. 計算例

本文の理論解析法の内容を具体的に説明し、またその実用性を明らかにするために 3 種の解析モデルについて数値計算を行った。以下に、原設計形状が与えられたくら型吊屋根およびケーブルトラス、ならびに節点間距離について不合理な制約が与えられたくら型吊屋根の 3 例に関する形状決定計算の結果を示す。

4.1 解析モデル

計算例 1: これは Fig. 6 に示すような原設計形状が与えられたくら型吊屋根で、その形状は文献 2) の計算例 1 におけるものと同一である。節点の座標は個々の架線を放物線で近似することによって与えられている。荷重は屋根面上の等分布荷重 40 kg/m^2 を節点集中荷重に換算したものである。Table 1 の左半部に節点荷重および原設計形状の節点座標を示す。

計算例 2: Fig. 7 に示すような原設計形状は主吊材および押え材の形状を放物線で近似することによって与えられている。荷重は主吊材の名節点のみに働くものと

し、中央節点で 2t, その他の節点では 1t とした。Table 3 に荷重と節点座標を示す。なお、このような構造では一部の部材に圧縮力が生ずることが容易に推定される。

計算例 3: 本計算例は原設計において幾何学的な形状を設定したものではなく、制約条件として完成状態における節点間距離のみを与えたものである。なお境界および荷重は計算例 1 と同じものとし、節点間距離は全ての

部材について 5m とした。これは Fig. 6 より明らかなように幾何学的に成り立ち得ない不合理な制約条件であり、2. で述べた不合理な制約 (i) および (ii) に該当するものである。

なお、いずれの計算例においてもモデルの 1 軸あるいは 2 軸対称性を考慮して計算を簡単にしている。

また、Fig. 4 に示す収束条件として、各計算例とも $\varepsilon_A = 10^{-4}t^2$, $\varepsilon_B = 10^{-2}m^2$, $\varepsilon_C = 10^{-6}m^2$ とした。

4.2 解析結果

計算例 1: Table 1 の右半部に完成時の部材力の初期値と解、および原設計形状と完成形状の節点間距離を示す。Table 1 で明らかなように原設計形状と完成形状における節点座標の差は最大 -18 mm にすぎず、また Table 2 に示すように節点間距離は原

Table 2 Member forces and joint distances (Example 1)

Member	Member force (t)		Joint distance (m)		Member	Member force (t)		Joint distance (m)	
	Initial	Solution	Original	Final		Initial	Solution	Original	Final
1	50.0	69.311	5.019	5.018	26	4.0	4.105	5.184	5.184
2	50.0	69.212	5.011	5.011	27	4.0	4.032	5.112	5.112
3	50.0	69.138	5.006	5.006	28	4.0	3.992	5.057	5.057
4	50.0	69.088	5.002	5.002	29	4.0	3.963	5.021	5.021
5	50.0	69.065	5.000	5.000	30	4.0	3.948	5.002	5.002
6	35.0	37.239	5.059	5.059	31	4.0	6.046	5.105	5.105
7	35.0	37.066	5.036	5.036	32	4.0	5.989	5.064	5.064
8	35.0	36.935	5.018	5.018	33	4.0	5.956	5.033	5.033
9	35.0	36.848	5.007	5.007	34	4.0	5.933	5.012	5.012
10	35.0	36.806	5.001	5.001	35	4.0	5.921	5.001	5.001
11	26.0	28.899	5.101	5.101	36	4.0	7.721	5.062	5.062
12	26.0	28.674	5.061	5.061	37	4.0	7.677	5.038	5.038
13	26.0	28.502	5.031	5.031	38	4.0	7.648	5.019	5.019
14	26.0	28.389	5.011	5.011	39	4.0	7.628	5.007	5.007
15	26.0	28.333	5.001	5.001	40	4.0	7.620	5.001	5.001
16	23.0	25.641	5.131	5.131	41	4.0	7.925	5.042	5.042
17	23.0	25.384	5.080	5.080	42	4.0	7.893	5.025	5.025
18	23.0	25.187	5.040	5.040	43	4.0	7.873	5.013	5.013
19	23.0	25.055	5.015	5.015	44	4.0	7.859	5.005	5.005
20	23.0	24.992	5.002	5.002	45	4.0	7.851	5.001	5.001
21	23.0	24.365	5.142	5.142	46	4.0	12.149	5.036	5.036
22	23.0	24.098	5.086	5.086	47	4.0	12.117	5.022	5.022
23	23.0	23.892	5.044	5.044	48	4.0	12.097	5.011	5.011
24	23.0	23.759	5.016	5.016	49	4.0	12.082	5.004	5.004
25	23.0	23.694	5.002	5.002	50	4.0	12.075	5.000	5.000

Table 3 Loads and joint coordinates (Example 2)

Joint	Load	Original shape		Equilibrium shape	
		X	Y	X	Y
1	0 t	0 m	0 m	0 m	0 m
2	1.0	5.0	1.8	4.999	1.800
3	1.0	10.0	3.2	10.000	3.200
4	1.0	15.0	4.2	15.000	4.200
5	1.0	20.0	4.8	20.000	4.800
6	1.0	25.0	5.0	25.000	5.000
7	1.0	0	15.0	0	15.000
8	1.0	7.5	12.45	7.500	12.450
9	1.0	12.5	11.25	12.500	11.250
10	1.0	17.5	10.45	17.500	10.450
11	1.0	22.5	10.05	22.500	10.050
12	1.0	25.0	10.05	25.000	10.050

Fig. 6 Example 1: Saddle-shaped cable net

Fig. 7 Example 2: Cable truss

Table 1 Loads and joint coordinates (Example 1)

Joint	Load	Original shape (m)			Final shape (m)		
		X	Y	Z	X	Y	Z
1	0	5.0	0	-1.8	5.0	0	-1.8
2	0	10.0	0	-3.2	10.0	0	-3.2
3	0	15.0	0	-4.2	15.0	0	-4.2
4	0	20.0	0	-4.8	20.0	0	-4.8
5	0	25.0	0	-5.0	25.0	0	-5.0
6	0	0	5.0	0	0	5.0	0
7	1.049	5.0	5.0	-1.368	4.998	5.000	-1.374
8	1.036	10.0	5.0	-2.432	10.000	5.000	-2.429
9	1.029	15.0	5.0	-3.192	15.000	5.000	-3.190
10	1.037	20.0	5.0	-3.643	20.000	5.000	-3.647
11	0.518	25.0	5.0	-3.800	25.000	5.000	-3.799
12	0	0	10.0	0	0	10.0	0
13	1.028	5.0	10.0	-1.032	4.998	10.000	-1.043
14	1.021	10.0	10.0	-1.835	10.000	9.999	-1.830
15	1.016	15.0	10.0	-2.408	15.000	10.000	-2.405
16	1.021	20.0	10.0	-2.752	20.000	10.000	-2.750
17	0.511	25.0	10.0	-2.367	25.000	10.000	-2.365
18	0	0	15.0	0	0	15.0	0
19	1.017	5.0	15.0	-0.792	4.998	15.000	-0.807
20	1.011	10.0	15.0	-1.403	10.000	15.000	-1.405
21	1.009	15.0	15.0	-1.848	15.000	15.000	-1.847
22	1.010	20.0	15.0	-2.118	20.000	14.999	-2.112
23	0.505	25.0	15.0	-2.200	25.000	15.000	-2.200
24	0	0	20.0	0	0	20.0	0
25	1.010	5.0	20.0	-0.648	4.998	20.000	-0.666
26	1.007	10.0	20.0	-1.152	10.000	20.000	-1.152
27	1.005	15.0	20.0	-1.512	15.000	20.000	-1.514
28	1.003	20.0	20.0	-1.728	20.000	20.000	-1.733
29	0.502	25.0	20.0	-1.800	25.000	20.000	-1.802
30	0	0	25.0	0	0	25.0	0
31	0.503	5.0	25.0	-0.600	4.998	25.000	-0.615
32	0.502	10.0	25.0	-1.067	10.000	25.000	-1.064
33	0.501	15.0	25.0	-1.400	15.000	25.000	-1.397
34	0.501	20.0	25.0	-1.600	20.000	25.000	-1.600
35	0.500	25.0	25.0	-1.667	25.000	25.000	-1.666

Table 4 Initial values and solutions of member forces and joint distances (Example 2)

Member	Member force (t)		Joint distance (m)
	Initial value	Solution	
Primary cable	1	17.313	5.314
	2	16.716	5.192
	3	16.178	5.099
	4	15.850	5.036
	5	15.606	5.004
Secondary cable	6	4.326	7.922
	7	4.449	5.142
	8	4.386	5.064
	9	4.400	5.016
	10	4.482	2.500
Hanger cable	11	0.100	10.940
	12	0.100	9.582
	13	0.100	8.429
	14	0.100	7.480
	15	0.100	6.731
	16	0.100	6.178
	17	0.100	5.835
	18	0.100	5.635

設計形状と完成形状とで極めて良好な一致をみている。なお文献 2) の計算例 1 では節点座標の差は最大 80 mm で本計算例のそれよりかなり大きい。その原因はもちろん計算手法や収束判定条件の相違によるものであるが、具体的には以下の事が考えられる。

(1) 文献 2) の手法では、部材弾性伸びを消去するルーチンと全部材に有効な張力が働く構造系を見出すルーチンとがある。計算例 1 では後者のルーチンの収束を考慮して、部材弾性伸びを消去すべき部材を主吊材 (Primary cable) に限っている。本文の計算手法では主吊材と押え材 (Secondary cable) との区別はしない。

(2) 文献 2) の計算例 1 では、部材弾性伸びを消去するくり返し計算を 5 回で打ち切っており、一部の部材に弾性伸びがまだ残っている。

一方、部材力は Table 2 に示すように全て張力で、文献 2) での値より大きくなっている。これも上記 (1)、(2) の理由によるものであるが、いずれにしても本文の手法の方が、文献 2) よりも厳しい形状制約条件を課している結果に他ならない。本計算例ではただ 1 回のくり返しで、Fig. 4 に示す Equilibrium state (A) に収束したものであり、このときの α は 1.004 であった。文献 2) の手法にくらべて本文の手法が優れた収束性をもつことがわかる。ただこの例では、与えられた原設計形状が幾何学的にも、また力学的にもたまたま合理的なものであったので、原設計形状からかけはなれていない完成形状が容易に得られたものであるといえる。

計算例 2: 原設計形状と本文の所論によるつり合形状を Table 3 に、またこのつり合状態における部材力を Table 4 に示す。Table 3 より原設計形状と上記のつり合形状の節点座標は殆んど一致していることがわかるが、Table 4 に示すように若干の部材には圧縮力が作用している。すなわち、Fig. 7 のように与えた原設計形状の節点間距離を保持するような構造では、全部材に張力が作用するようなつり合状態は得られない。そこで文献 2) の 2.3 の所論にしたがって圧縮部材力进行处理し、最終的には全ての部材に張力が作用するようにすること

Table 5 Assumption of Members (Example 2)

	Diameter	Young's modulus	Sectional area
Primary cable (No.1-5)	30 mm	$1.5 \times 10^7 \text{ t/m}^2$	$4.35 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Secondary cable (No.6-10)	20	"	1.93×10^{-4}
Hanger cable (No.11-18)	16	"	1.54×10^{-4}

Table 6 Coordinates at final state (Example 2)

Joint	X	Y
1	0.000	0.000
2	5.012	1.771
3	10.012	3.179
4	15.009	4.202
5	20.002	4.868
6	25.0	5.170
7	0	15.0
8	7.365	11.936
9	12.407	10.831
10	17.436	10.144
11	22.474	9.857
12	25.0	9.856

Table 7 Member data of final state (Example 2)

Member	Member force (t)		Joint distance (m)
	Initial	Final	
1		17.853	5.316
2		17.437	5.194
3		17.192	5.101
4		17.033	5.038
5		16.932	5.007
6	2.1 t	2.469	7.977
7	2.1	2.314	5.162
8	2.1	2.236	5.076
9	2.0	2.175	5.046
10	2.0	2.206	2.526
11	1.6	0.225	10.434
12	1.6	0.245	9.149
13	1.6	0.044	8.018
14	1.6	0.162	7.122
15	1.6	0.051	6.419
16	1.6	0.145	5.867
17	1.6	0.111	5.567
18	1.6	0.025	5.324

算例では節点間距離に関して不合理な制約条件が与えられている。したがって、このような制約条件を満たすことはできないが、できるだけそれに近い状態のつり合状態を求めようとするものである。この計算例の節点座標および部材力の初期値としては計算例 1 の完成状態のものをを用いた。くり返し計算の収束状態を Fig. 9 に示す。図より明らかなように Φ_A のノルムは急速に降下してつり合条件が満足されるが、節点間距離に関する Φ_B のノルムは 7.743 で停留し、したがって与えられた制約条件そのものは満足しない。結局この例ではくり返し数 40 で Fig. 4 の Equilibrium state (B) が得られたことになる。本計算における係数 α の値は Fig. 9 に示すように $1.723 \times 10^{-4} \sim 6.855 \times 10^{-1}$ であった。

Table 8 および 9 は得られたつり合状態の節点座標と部材力をそれぞれ示すものである。Table 9 より節点間距離は制約条件として与えた値 5 m より最大 73 mm 長くなっており、また計算例 1 に比べて過大な部材力が所々に発生していることがみられる。Fig. 8 は計算例 1 と計算例 3 の完成形状を図示したものであるが、両者を比較すると、計算例 3 では計算例 1 に比べて中央部分が

Figure 1 is a log-linear plot showing the convergence of the error norm $\|E_n\|$ and the step size $\|\Delta_n\|$ versus the number of iterations. The y-axis is logarithmic, ranging from 10^{-2} to 10^1 . The x-axis is linear, ranging from 0 to 40 iterations. Two curves are shown: a solid line for $\|E_n\|$ and a dashed line for $\|\Delta_n\|$. Both curves show a general downward trend, with $\|E_n\|$ reaching approximately 10^{-2} and $\|\Delta_n\|$ reaching approximately 10^{-1} after 40 iterations.

NII-Electronic Library Service

と部材力を決定することができる。

(3) 本文の手法は構造の静定, 不静定, 安定, 不安定に関係なく適用可能である。

(4) 本文の解析法ではあらかじめ部材断面諸元を与える必要はなく, 本解析の終了後に部材の断面設計を行えば良い。したがって実際の設計計算において部材の安全率を適切に設定することができる。

(5) 本文の解析法では圧縮部材の処理は含んでいないが, 文献 2) の手法と組み合わせることによって容易にこれを処理することができる。

なお, 本文の数値計算例で使用した計算機は IBM 370 モデル 155I である。

参 考 文 献

- 1) 波田凱夫, 新家 徹, 広中邦汎, 中西 宏:「エネルギー法によるケーブル構造の解析 (第2報)」, 土木学会第 26 回年次学術講演会, 1971-10
- 2) 波田凱夫, 中西 宏:「吊構造の形状決定に関する一考察」, 建築学会論文報告集, 第 212 号, 1973-10
- 3) 波田凱夫, 中西 宏:「吊構造の形状決定に関する研究」, 建築学会大会学術講演梗概集, 1973
- 4) Argyris, J.H. and D.W. Scharpf: "Large deflection analysis of prestressed networks", J. of Str. Div.

Proc. ASCE, Vol. 98, No. ST 3, March, 1972

- 5) 真柄栄毅, 川股重也:「ワイヤー・ネットにおける形状決定問題 (リンク機構としての形状解析)」, 建築学会大会学術講演梗概集, 1972
- 6) Knudson, W.C. and A.C. Scordelis: "Cable forces for desired shapes in cable-net structures", Proc. 1971 IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames, Tokyo and Kyoto, p. 93~102, Paper No. 1-6, 1972, Architectural Institute of Japan
- 7) Ohyama, H. and S. Kawamata: "A problem of surface design for prestressed cable nets", Proc. 1971 IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames, Tokyo and Kyoto, p. 103~115, Paper No. 1-7, 1972, Architectural Institute of Japan
- 8) 田中 授, 坪田張二, 相沢 恂:「ケーブル・ネット構造物の解析 (曲面形状決定解析 および 非線形応力・変形解析)」, 建築学会大会学術講演梗概集, 1972
- 9) D.W. Marquardt: "An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters", J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 11, No. 2, June, 1963
- 10) Namita, Y. and H. Nakanishi: "A method of computation for determining the shape of cable structures", International Conference on Tension Roof Structures, Paper No. 2.1, London, 1974, IABSE

ON A COMPUTATIONAL METHOD FOR THE SHAPE DETERMINATION ANALYSIS OF TENSION STRUCTURES

By HIROSHI NAKANISHI* and
Dr. YOSHIO NAMITA**

Members of A.I.J.

1. Preface

The problem of shape determination of tension structure means to find out the completed state of cable assemblies under the conditions that (1) the structure is in a stable equilibrium, (2) every member is in tension and (3) the completed shape of the structure is well conformed to that prescribed in original design. The authors have already presented a method of practical use to deal with this problem in Refs. 2) and 10), where at first the effect of member elongation upon the whole deformation of the structure is eliminated (analysis I), then the member lengths are corrected so that every member is in tension (analysis II)—these analyses are shown in Fig. 1 as "Method A".

By the analysis in this paper, which has similar object to analysis I in Ref. 2), an equilibrium state of tension structure can be determined under the condition that the joint distances of every member at the final stage of construction are kept in the values optionally prescribed at the original design. This prescription is made usually by setting up a certain form of the structure, or sometimes state as a result of the deformation of original shape, while the former treats the joint coordinates as flow diagram of this computation.

2. Fundamental Equations

Fundamental equations are given in consideration of geometrical equilibrium condition and prescription of joint distances. Eqs. (1) denote the equilibrium condition at joint i , where N is the total number of members around joint i , and ΔX_m is the difference between joint coordinates at both ends of the m -th member in equilibrium. Eqs. (2) to (4) show the constraint of joint distances, where L_{1m} and L_{0m} mean the joint distance of the m -th member at equilibrium state and the prescribed joint distance respectively.

Eqs. (5) and (6) are simultaneous nonlinear equations with regard to member forces P_0 and joint coordinates X etc. Solution of Eqs. (5) and (6) gives every member force P_0 and joint coordinates X in an equilibrium state which satisfies the configuration condition as given by the prescription of joint distances. It should be noted that in this analysis extensional rigidities of each member need not be assumed beforehand. This fact makes it very easy to determine the sectional area of each member in structural design.

Geometrically the prescription of joint distances cannot always be done arbitrarily. Fig. 3 shows some examples of geometrically unreasonable configuration condition. It is very complicated to judge whether the prescribed joint distances L_{0m} are reasonable or not. However, by the numerical method explained in the next chapter a final state of the structure can be obtained with geometrically reasonable shape of which joint distances are made as near as possible to the prescribed values, however unreasonable they may be.

* Research Engineer of the Structural Engineering Laboratory, Kobe Steel, Ltd.

** Chief Research Engineer, the same above

As the present analysis does not assure that all members are in tension, the analysis II in Ref. 2) might be applied to the final state of the above solution, if there are found some compression members. Method B in Fig. 1 shows such a flow of computation.

3. Numerical Solution

Improved maximum neighbourhood method (Ref. 9) is adopted in order to solve Eqs. (5) and (6).

Eqs. (5) is rewritten in a matrix form as Eq. (7), where A , P_0 and F are matrix of direction cosines of members, vector of member forces and vector of external forces respectively. Vector Φ_B is defined by the components given in Eq. (8). Usual Newton-Raphson method is written in the form of Eqs. (9) and (10), where J is a Jacobian matrix and $\Delta\phi_{NA}^i$ and $\Delta\phi_{NB}^i$ mean correction vectors for X and P_0 respectively (i is number of iteration).

In the algorithm of maximum neighborhood method correction vectors are given as shown in Eq. (11), where λ is an arbitrary factor to improve the convergence. Furthermore a convergence factor α is now introduced. Substitution of $\alpha \cdot \Delta\phi_A^i$ in Eq. (7) yields Eq. (13), where A' is a matrix with the variation of direction cosines of members due to the correction vector at the i -th iteration and P_0' is a correction vector for initial tension. Similarly, Eq. (14) is obtained for vector Φ_B^{i+1} , where $\Delta X_m'$ etc. mean the differences of corrected joint coordinates at the both ends of members. Eq. (15) is a matrix form of Eq. (14). α is determined by minimizing $g(\alpha)$ in Eq. (16), that is, as the root of Eq. (17). (In usual Newton-Raphson method $\lambda=0$, and $\alpha=1$.) A weight factor γ is then introduced which makes the squares of two Euclidean norms $\|\Phi_A^{i+1}\|^2$ and $\|\Phi_B^{i+1}\|^2$ uniform. γ is determined in the process LOOP 2 in Fig. 4. As is shown in Fig. 4 $\gamma=0$ in the process LOOP 1 which realizes an equilibrium state, then γ is determined in LOOP 2. By making $\|\Phi_A^i\|^2$ and $\|\Phi_B^i\|^2$ satisfy the convergence condition a final state (Equilibrium state A in Fig. 4) is determined.

In the case of geometrically unreasonable configuration condition the convergence condition $\|\Phi_B^i\|^2 < \epsilon$ in Fig. 4 cannot be satisfied. But the iterative computation makes $\|\Phi_B^i\|^2$ stationary. Such a convergence state is checked at the part marked with an asterisk in Fig. 4. The final state thus obtained is shown in the figure as Equilibrium state B, where the form of the structure is geometrically reasonable and moreover it is evident from the definition of Φ_B that the values of joint distances are made as near as possible to the prescription.

4. Numerical Examples

Example 1 : Fig. 6 shows a saddle-shaped cable net of which original shape is given by setting each joint on parabolic curves. Table 1 shows loads and joint coordinates at the original and final states of the structure. Member forces and joint distances are shown in Table 2. It is obvious that the shape of the structure at the equilibrium state is quite well conformed to the original one.

Example 2 : Fig. 7 shows a cable truss of which original shape is given by setting each joint on parabolic curves. Original and final joint coordinates and member forces in equilibrium are shown in Tables 3 and 4 respectively. Though the final shape is well conformed to the original one, there exist some compression members. Therefore, the sectional properties of members are assumed as in Table 5, and then analysis II in Ref. 2) is applied to tension these members effectively. The results of calculation are shown in Tables 6 and 7.

Example 3 : In this example the geometrical shape of the structure is not prescribed, but only the joint distances at the final state are given. The shape of the boundaries and joint loads are similar to Example 1. The value of joint distance is prescribed as 5m for every member which is obviously a geometrically unreasonable condition. Convergence of iteration is shown in Fig. 9, where it is seen that the equilibrium state is obtained very soon due to rapid convergence of $\|\Phi_A\|$, but $\|\Phi_B\|$ becomes stationary at the value 7.743, that is, the given configuration condition is not satisfied. As a result Equilibrium state (B) in Fig. 4 is obtained after 40 iterations. Tables 8 and 9 show the joint coordinates and member forces at equilibrium respectively. Difference of the shape of Examples 1 and 3 is shown in Fig. 8. Fig. 10 shows the shapes of primary and secondary cables in Examples 1 and 3.

U.D.C. 624.014.5 : 624.078

LATERAL BRACING OF STEEL BEAMS (No. 2)

—Necessary Strength and Rigidity of Lateral Bracing—

by Dr. MOTOO SAISHO, Lecturer, Kumamoto Univ., Dr.
HISASHI TANAKA, Prof., Inst. of Indu. Science, Univ.
of Tokyo, Members of A.I.J.

Many experimental studies of laterally braced steel beams have been achieved to know the rotation capacity of plastic hinge, but in most of them, the lateral movement of bracing point entirely constrained, and the effects of the rigidity of lateral brace on the rotation capacity and on the lateral bracing force have not been well established.

In this paper, the followings are investigated by finite element method based on the theory of thin-walled beam-shells of open cross section;

- (1) the relation between the rigidity of lateral bracing and the rotation capacity of plastic hinge,
- (2) the relation between the rigidity of lateral bracing and the lateral bracing force.

And from these results, the necessary rigidity and strength of lateral bracing are decided to achieve a desired rotation capacity.

U.D.C. 624.014.5 : 624.043

EQUILIBRIUM EQUATIONS OF STRAIGHT MEMBER WITH THIN-WALLED OPEN SECTION

by Dr. HISASHI TANAKA, Prof., Inst. of Indu. Science Univ.
of Tokyo KUNIAKI UDAGAWA, Assist, Inst. of Indu.
Science Univ. of Tokyo, Members of A.I.J.

Based on geometrical assumptions and principle of virtual velocity, finite displacement equilibrium equations and their boundary conditions are generally derived for thin-walled members with open section in incremental form which is usefull for elastic-plastic analysis. And the relations between resultant stress rates and velocities are also derived in both elastic and plastic ranges.

The proposed theory is a direct generalization of the elastic buckling theory established by Vlasov and it includes Vlasovs' theory as a special case.

U.D.C. 624.074.4

ON A COMPUTATIONAL METHOD FOR THE SHAPE DETERMINATION ANALYSIS OF TENSION STRUCTURES

(See Page 39)

by HIROSHI NAKANISHI, Research Engineer of the Structural
Engineering Laboratory, Kobe Steel, Ltd. and Dr. YOSHIO
NAMITA, Chief Research Engineer, the same above
Members of A.I.J.