局所変形を考慮した棒材の一般理論 (その1)

正 会 員 松 岡 理*

正 会 員 飯 島 俊 比 古**

§1 序 文

棒材の一般理論は、James Bernoulli に始まり、以来、多くの研究がなされている。本来、三次元媒体である棒材を、その幾何学的特性、すなわち、材長に比較して断面が小さいことを利用し一次元材として扱うことが可能である。棒材を一次元材として理論を定式化するために、大きく分けて、次の3つの方法が考えられる。まず第1の方法は、ある特別な仮定、例えば、法線保持及び平面保持の仮定を設け、その仮定を用いて、未知量を一次元化し、定式化する。第2の方法は、三次元弾性論の方程式にガラーキン法を適用し、一次元化されたつり合い方程式を得る¹⁾。第3の方法は、director と呼ばれる変形可能なベクトルを採用することにより、棒材を一次元材として扱う²⁾。このほかにも、摂動法³⁾または、べき級数展開する方法⁴⁾等がある。

このように行なわれている棒材の定式化は、主に、均質な媒体の棒材に対してなされてきた。そのため、巨視的に均質で微視的に非均質である棒材を、これらの理論で解析する場合には、均質な棒材に置換する必要がある。巨視的に均質で微視的に非均質な棒材を、単純に均質な棒材に置換してしまうと、媒体が微視的に非均質であるために、棒材が本来的に持っている局所的な挙動を的確に把握することは困難となる。本論では、このような局所的な変形を本来的に持っている層状媒体、または、離散的な構造要素が一次的に配列されている棒材等に対する理論の構成を考える。

ここでは、理論の構成に際して、媒体に埋め込まれた座標を用いる。 x^3 軸は、空間曲線であり、棒の材軸とする。 x^1 及び x^2 軸は x^3 軸上で指定された直線座標系とする。媒体の変形とともに $x^i (i=1, 2, 3)$ 軸は、各々、別の直線座標系及び空間曲線に移ると仮定する。

局所的な変形を考慮した棒材の理論を構成するために、基本ベクトルの他に、director と呼ばれる変形可能なベクトルを採用する。この director は、 x^3 軸に沿って定義されており、基本ベクトルとは全く独立に変形する。また、変形前の状態で基本ベクトルと director が一致している必要はない。たとえ、変形前の状態でそれ

らが一致していたとしても、director の性質から、変形後の状態でそれらは一致しなくなる。この director は、局所変形に対応し、必要に応じて適宜採用すればよい。本論では、基本ベクトルの数に対応して、3つの director を採用した。

director の物理的な意味を示すために、壁と骨組とが剛な部材によって結ばれているモデルを考える。このような構造物を director を考えることにより、骨組の節点回転を含めた形で、棒材として扱うことが可能である。このモデルでは、局所的な変形として骨組の節点回転が考えられる。この節点回転は、壁の法線の回転とは独立であることは明白である。従って、この構造物を棒材として扱う場合には、既に述べた、基本ベクトルと director とが互いに独立して変形する、ということの一例として見る事ができる。尚、director 変形とは、それ自身の伸び及び director 相互の角度変化である。

基本ベクトルの外に、director という変形可能なベクトルを採用することにより、棒材理論の適用範囲が広がる。巨視的に一次元とみなせる構造物の解析において、その構造特性に大きく寄与する変形を抽出し、それと基本ベクトル及び director の変形とを対応付けて考えれば、この構造物を棒材として、要求される精度で近似

図—1 本論のモデルの一例

* 名古屋大学 教授・工博

** 同 大学院生

(昭和50年2月14日日本稿受理・討論期限昭和51年1月末日)

的に解析することが可能になる。

本論は、大体次の内容である。§2 では、棒材の幾何学的な関係を述べ、§3 及び §4 で変位とひずみの定義を行なう。§5 では、基本式の誘導を行ない、§6 で構成関係を得る。§7 において、§5 で得られた基本式の線型化を考え、§8 で、線型化された理論の特殊化を行なう。

ラテン文字の指標は、1~3 をとり、ギリシャ文字の指標は、1, 2 をとることとする。同じ文字が上指標と下指標とで繰り返し使用された場合には、その文字の範囲内で和をとることとする。

§2 棒材の幾何学的関係

棒材の変形前の位置ベクトル R を

$$R = R(x^1, x^2, x^3) \\ = \bar{R}(x^3) + x^\alpha A_\alpha(x^3) \quad (2.1)$$

と表わす。 x^i は、媒体に埋め込まれた座標である。 $\bar{R}$ は空間曲線であり、 x^1, x^2 は x^3 に付随した直線座標である。 x^3 軸は、材軸に一致している。基本ベクトル A_3 は、

$$A_3 = \bar{R}_{,3} \quad (2.2)$$

と定義される。 $_{,3}$ は、 x^3 による微分を示す。基本ベクトル A_i は、次の条件を満たしている。

$$[A_1 A_2 A_3] > 0 \quad (2.3)$$

共変基本ベクトルと次の関係を持つ反変基本ベクトル A^i を定義する。

$$A_i \cdot A^j = \delta_i^j \quad (2.4)$$

δ は、クロネッカーのデルタである。

基本ベクトル A_i の微分を次のように定義する。

$$A_{i,3} = W_i^j A_j \quad (2.5)$$

反変基本ベクトル A^i に対する微分は、(2.4) 及び (2.5) 式から次のように計算できる。

$$(A_i \cdot A^j)_{,3} = \delta_{i,3}^j \\ A_{i,3} \cdot A^j + A_i \cdot A^j_{,3} = 0 \\ \therefore A^j_{,3} = -W_i^j A^i \quad (2.6)$$

計量テンソルを次のように定義する。

$$A_{ij} = A_i \cdot A_j \quad (2.7)$$

$$A^{ij} = A^i \cdot A^j \quad (2.8)$$

計量テンソル A_{ij} を用いて、 W_{ij} を次のように定義する。

$$W_{ij} = W_i^k A_{kj} \quad (2.9)$$

次に、director D_i を導入する。director は、 x^3 軸に沿って定義されている。また、これは基本ベクトル A_i と一致している必要はない。 D_i の成分表示を次のように行なう。

$$D_i = D_{ij} A^j = D_i^j A_j \quad (2.10)$$

§3 変 位

棒材の変形後の位置ベクトル r を

$$r = r(x^1, x^2, x^3) \\ = \bar{r}(x^3) + x^\alpha a_\alpha(x^3) \quad (3.1)$$

と表わす。変形後の基本ベクトル a_3 は、

$$a_3 = \bar{r}_{,3} \quad (3.2)$$

と定義される。

director D_i は、変形後 d_i になる。先に述べたように、director D_i は、基本ベクトル A_i に一致している必要はない。変形前の状態で、director D_i が基本ベクトル A_i に一致していたとしても、基本ベクトル系の変形と director 系の変形は独立に生ずるので、一般には、変形後の状態では一致しなくなる。 d_i の成分表示を次のように行なう。

$$d_i = d_{ij} a^j = d_i^j a_j \quad (3.3)$$

(3.3) 式の a^i は、変形後の反変基本ベクトルであり、 a^i と a_i の間には、(2.4) 式と同じ関係がある。変形後の共変基本ベクトル a_α は、(3.7) 式で定義される。

(2.1), (3.1), (2.10) 及び (3.3) 式から、巨視的な変位 V 及び director 変位 θ_i を定義する。

$$V = r - R \\ = U + x^\alpha \Omega_\alpha \quad (3.4)$$

$$\theta_i = d_i - D_i \quad (3.5)$$

ここで、

$$U = \bar{r} - \bar{R} \quad (3.6)$$

$$\Omega_\alpha = a_\alpha - A_\alpha \quad (3.7)$$

である。(3.2), (3.6) 式から、 a_3 は次のようになる。

$$a_3 = A_3 + U_{,3} \quad (3.8)$$

変位ベクトル U 、回転 Ω_α と director 変位 θ_i の成分表示を次のように行なう。

$$U = u^i a_i = u_i a^i \\ = U^i A_i = U_i A^i \quad (3.9)$$

図-2 変形前後における位置ベクトル基本ベクトル及び変位ベクトルの関係

図-3 変形前後における director と director 変位の関係

$$\begin{aligned}\Omega_\alpha &= \omega_\alpha^i a_i = \omega_{\alpha i} a^i \\ &= \Omega_\alpha^i A_i = \Omega_{\alpha i} A^i \dots\dots\dots (3.10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_i &= \theta_i^j a_j = \theta_{ij} a^j \\ &= \theta_i^j A_j = \theta_{ij} A^j \dots\dots\dots (3.11)\end{aligned}$$

変形後における基本ベクトル a_i の微分を (2.5) 式にならって、次のように定義する。

$$a_{i,3} = w_i^j a_j \dots\dots\dots (3.12)$$

変形後の計量テンソル a_{ij} 及び a^{ij} を次のように定義する。

$$a_{ij} = a_i \cdot a_j, \quad a^{ij} = a^i \cdot a^j \dots\dots\dots (3.12)$$

計量テンソル a_{ij} を用いて、(2.9) 式に従い、 w_{ij} を次のように定義する。

$$w_{ij} = w_i^k a_{kj} \dots\dots\dots (3.13)$$

§4 ひずみの定義

ひずみの定義に先立って、次の計量を定義する。

$$F_{ij} = A_i \cdot D_j \dots\dots\dots (4.1)$$

$$f_{ij} = a_i \cdot d_j \dots\dots\dots (4.2)$$

$$K_{ij} = D_{i,3} \cdot A_j \dots\dots\dots (4.3)$$

$$k_{ij} = d_{i,3} \cdot a_j \dots\dots\dots (4.4)$$

F_{ij} 及び f_{ij} は、director D_i 及び d_i の基本ベクトル A_j , a_j に対する成分を示している。従って、 F_{ij} 及び f_{ij} は、 D_{ij} と d_{ij} に一致しており、新たに記号を導入する必要はないが、ひずみと関連する量として、新たに記号を採用する。 K_{ij} , k_{ij} は、director D_i , d_i の曲率の基本ベクトル A_j , a_j に対する成分である。

以下のように、4種類の計量の変形前後の差をひずみとして定義する⁵⁾。

$$2\varepsilon_{ij} = a_{ij} - A_{ij} \dots\dots\dots (4.5)$$

$$\tau_{ij} = f_{ij} - F_{ij} \dots\dots\dots (4.6)$$

$$\kappa_{ij} = k_{ij} - K_{ij} \dots\dots\dots (4.7)$$

$$\phi_{\alpha j} = w_{\alpha j} - W_{\alpha j} \dots\dots\dots (4.8)$$

(4.5)~(4.8) 式で定義されたひずみを変形前の基本ベクトル A_i , director D_i , 変位ベクトル U , Ω_α 及び director 変位 θ_i で表現する。

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = (A_\alpha + \Omega_\alpha) \cdot (A_\beta + \Omega_\beta) - A_\alpha \cdot A_\beta \dots\dots (4.9)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = (A_\alpha + \Omega_\alpha) \cdot (A_3 + U_{,3}) - A_\alpha \cdot A_3 \dots\dots (4.10)$$

$$2\varepsilon_{3\alpha} = 2\varepsilon_{\alpha 3} \dots\dots\dots (4.11)$$

$$2\varepsilon_{33} = (A_3 + U_{,3}) \cdot (A_3 + U_{,3}) - A_3 \cdot A_3 \dots\dots (4.12)$$

$$\tau_{\alpha j} = (A_\alpha + \Omega_\alpha) \cdot (D_j + \theta_j) - A_\alpha \cdot D_j \dots\dots (4.13)$$

$$\tau_{3j} = (A_3 + U_{,3}) \cdot (D_j + \theta_j) - A_3 \cdot D_j \dots\dots (4.14)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{i\alpha} &= (D_i + \theta_i)_{,3} \cdot (A_\alpha + \Omega_\alpha) - D_{i,3} \cdot A_\alpha \\ &\dots\dots\dots (4.15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{i3} &= (D_i + \theta_i)_{,3} \cdot (A_3 + U_{,3}) - D_{i,3} \cdot A_3 \\ &\dots\dots\dots (4.16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta} &= (A_\alpha + \Omega_\alpha)_{,3} \cdot (A_\beta + \Omega_\beta) - A_{\alpha,3} \cdot A_\beta \\ &\dots\dots\dots (4.17)\end{aligned}$$

$$\phi_{\alpha 3} = (A_\alpha + \Omega_\alpha)_{,3} \cdot (A_3 + U_{,3}) - A_{\alpha,3} \cdot A_3$$

$$\dots\dots\dots (4.18)$$

ベクトルの内積で定義されたひずみは、最終的に次のようになる。

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \Omega_\alpha \cdot A_\beta + \Omega_\beta \cdot A_\alpha + \Omega_\alpha \cdot \Omega_\beta \dots\dots\dots (4.19)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \Omega_\alpha \cdot A_3 + U_{,3} \cdot A_\alpha + \Omega_\alpha \cdot U_{,3} \dots\dots\dots (4.20)$$

$$3\varepsilon_{3\alpha} = 2\varepsilon_{\alpha 3} \dots\dots\dots (4.21)$$

$$3\varepsilon_{33} = U_{,3} \cdot A_3 + U_{,3} \cdot A_3 + U_{,3} \cdot U_{,3} \dots\dots\dots (4.22)$$

$$\tau_{\alpha j} = \Omega_\alpha \cdot D_j + A_\alpha \cdot \theta_j + \Omega_\alpha \cdot \theta_j \dots\dots\dots (4.23)$$

$$\tau_{3j} = U_{,3} \cdot D_j + A_3 \cdot \theta_j + U_{,3} \cdot \theta_j \dots\dots\dots (4.24)$$

$$\kappa_{i\alpha} = D_{i,3} \cdot A_\alpha + \theta_{i,3} \cdot \Omega_\alpha + \theta_{i,3} \cdot A_\alpha \dots\dots\dots (4.25)$$

$$\kappa_{i3} = D_{i,3} \cdot A_3 + \theta_{i,3} \cdot U_{,3} + \theta_{i,3} \cdot A_3 \dots\dots\dots (4.26)$$

$$\phi_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha,3} \cdot A_\beta + \Omega_\beta \cdot A_{\alpha,3} + \Omega_{\alpha,3} \cdot \Omega_\beta \dots\dots (4.27)$$

$$\phi_{\alpha 3} = \Omega_{\alpha,3} \cdot A_3 + U_{,3} \cdot A_{\alpha,3} + \Omega_{\alpha,3} \cdot U_{,3} \dots\dots (4.28)$$

(4.19)~(4.28)式に、(3.4), (3.9), (3.10) 及び (3.11) 式を代入して、ひずみ ε_{ij} , τ_{ij} , κ_{ij} , ϕ_{ij} を変形前の基本ベクトルに関する成分で次のように成分表示することができる。

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} + \Omega_{\beta\alpha} + \Omega_\alpha^i \Omega_{\beta i} \dots\dots\dots (4.29)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \Omega_{\alpha 3} + U_{\alpha;3} + \Omega_\alpha^j U_{j;3} \dots\dots\dots (4.30)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{\alpha 3} \dots\dots\dots (4.31)$$

$$2\varepsilon_{33} = 2U_{3;3} + U_{i;3} U^i_{,3} \dots\dots\dots (4.32)$$

$$\tau_{\alpha j} = D_{ji} \Omega_\alpha^i + \theta_{j\alpha} + \Omega_\alpha^j \theta_j \dots\dots\dots (4.33)$$

$$\tau_{3j} = D_j^i U_{i;3} + \theta_{j3} + U_{i;3} \theta_j^i \dots\dots\dots (4.34)$$

$$\phi_{\alpha\beta} = W_{\alpha i} \Omega_\beta^i + \Omega_{\alpha\beta;3} + \Omega_{\alpha i;3} \Omega_\beta^i \dots\dots\dots (4.35)$$

$$\phi_{\alpha 3} = W_{\alpha i} U^i_{,3} + \Omega_{\alpha 3;3} + \Omega_{\alpha i;3} U^i_{,3} \dots\dots\dots (4.36)$$

$$\kappa_{i\beta} = D_{ij;3} \Omega_\beta^j + \theta_{i\beta;3} + \theta_{ik;3} \Omega_\beta^k \dots\dots\dots (4.37)$$

$$\kappa_{i3} = D_{ij;3} U^j_{,3} + \theta_{i3;3} + \theta_{ik;3} U^k_{,3} \dots\dots\dots (4.38)$$

ここで、 $;$ は A_{ij} に関する共変微分を意味する。

$$U_{i;3} = U_{i,3} - W_i^P U_P \dots\dots\dots (4.39)$$

以上のように、変形前の基本ベクトルに対する成分で表示されたひずみ—変位関係が求まった。

§5 基本式

ひずみ—変位関係 (4.29)~(4.38) を付帯条件とする汎関数 F の第一変分をとることによって、つり合い式、境界条件式及び構成式を導く。境界条件は幾何学的境界条件 (g) と力学的境界条件 (m) に分けて取り扱う。

$\sim$ は、境界で指定された値であることを示す。

ひずみエネルギー—関係 W の存在を仮定する。

$$W = W(\varepsilon_{ij}, \tau_{ij}, \kappa_{ij}, \phi_{\alpha j}) \dots\dots\dots (5.1)$$

汎関数 F は、次のように定義される。

$$\begin{aligned}F &= F(N^{ij}, Q^{ij}, \mu^{ij}, M^{\alpha j}, \varepsilon_{ij}, \tau_{ij}, \kappa_{ij}, \phi_{\alpha j}, \\ &\quad s^i, y^{\alpha j}, z^{ij}, U_i, \Omega_\alpha^i, \theta_{ij}) \\ &= \int_{c_1}^{c_2} (N^{ij} \varepsilon_{ij} + Q^{ij} \tau_{ij} + \mu^{ij} \kappa_{ij} + M^{\alpha j} \phi_{\alpha j}) \\ &\quad - \frac{1}{2} N_{\alpha\beta} + \Omega_{\beta\alpha} + \Omega_\alpha^i \Omega_{\beta i}) \\ &\quad - \frac{1}{2} N^{\alpha 3} (\Omega_{\alpha 3} + U_{\alpha;3} + \Omega_\alpha^i U_{i;3}) \\ &\quad - \frac{1}{2} N^{3\alpha} (\Omega_{\alpha 3} + U_{\alpha;3} + \Omega_\alpha^i U_{i;3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} N^{33} (2 U_{;3} + U_{i;3} U^i_{;3}) \\
& -Q^{\alpha\beta} (D_{\beta i} \mathcal{Q}_{\alpha}^i + \theta_{\beta\alpha} + \mathcal{Q}_{\alpha i} \theta_{\beta}^i) \\
& -Q^{\alpha 3} (D_3^i \mathcal{Q}_{\alpha i} + \theta_{3\alpha} + \mathcal{Q}_{\alpha i} \theta_3^i) \\
& -Q^{3\alpha} (D_{\alpha}^i U_{i;3} + \theta_{\alpha 3} + U_{i;3} \theta_{\alpha}^i) \\
& -Q^{33} (D_3^i U_{i;3} + \theta_{33} + U_{i;3} \theta_3^i) \\
& -\mu^{i\beta} (D_{ij;3} \mathcal{Q}^{jj} + \theta_{i\beta;3} + \theta_{ik;3} \mathcal{Q}_{\beta}^k) \\
& -\mu^{i3} (D_{ij;3} U^j_{;3} + \theta_{i3;3} U^k_{;3}) \\
& -M^{\alpha\beta} (W_{\beta i} \mathcal{Q}_{\alpha}^i + \mathcal{Q}_{\alpha\beta;3} + \mathcal{Q}_{\alpha i;3} \mathcal{Q}_{\beta}^i) \\
& -M^{\alpha 3} (W_{\alpha i} U^i_{;3} + \mathcal{Q}_{\alpha 3;3} + \mathcal{Q}_{\alpha i;3} U^i_{;3}) \\
& -W(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ij}, \phi_{\alpha j}) \\
& + S^i U_i + Y^{\alpha j} \mathcal{Q}_{\alpha j} + Z^{ij} \theta_{ij} \} dx^3 \\
& + \{ \tilde{s}^i U_i + \tilde{y}^{\alpha j} \mathcal{Q}_{\alpha j} + \tilde{z}^{ij} \theta_{ijm} \} c_1 \\
& + \{ s^i (U_i - \tilde{U}_i) + y^{\alpha j} (\mathcal{Q}_{\alpha j} - \tilde{\mathcal{Q}}_{\alpha j}) \\
& + z^{ij} (\theta_{ij} - \tilde{\theta}_{ij}) \} c_2 \dots \dots \dots (5.2)
\end{aligned}$$

c_1 及び c_2 は、棒材の両端での座標値である。 S^i , $Y^{\alpha j}$ 及び Z^{ij} は、仮想変位 δU_i , $\delta \mathcal{Q}_{\alpha i}$, $\delta \theta_{ij}$ に対応する物体力である。 S^i を単に、物体力, $Y^{\alpha i}$ を macro body couple, そして, Z^{ij} を micro body couple と呼ぶことにする。

汎関数 F の第 1 変分をとる。

$$\delta F = 0 \dots \dots \dots (5.3)$$

(5.3) 式から、つり合い式、幾何学的境界条件式、力学的境界条件式及び構成方程式を得る。ひずみ-変位関係 (4.29)~(4.38) に対応するつり合い式は、次の通りである。

$$\begin{aligned}
& (N^{3\alpha} + Q^{3i} D_i^{\alpha})_{;3} + (N^{\beta 3} \mathcal{Q}_{\beta}^{\alpha})_{;3} + N^{33} U^{\alpha}_{;3} \\
& + (Q^{3i} \theta_i^{\alpha})_{;3} + (Q^{33} \theta_3^{\alpha})_{;3} + (\mu^{i3} D_i^{\alpha})_{;3} \\
& + (\mu^{i3} \theta_i^{\alpha})_{;3} + (M^{\beta 3} W_{\beta}^{\alpha})_{;3} + (M^{\beta 3} \mathcal{Q}_{\beta}^{\alpha})_{;3} \\
& = S^{\alpha} \dots \dots \dots (5.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (N^{33} + Q^{3i} D_i^3)_{;3} + (N^{\alpha 3} \mathcal{Q}_{\alpha}^3)_{;3} + N^{33} U^3_{;3} \\
& + (Q^{3i} \theta_i^3)_{;3} + (\mu^{i3} D_i^3)_{;3} + (\mu^{i3} \theta_i^3)_{;3} \\
& + (M^{\alpha 3} W_{\alpha}^3)_{;3} + (M^{\alpha 3} \mathcal{Q}_{\alpha}^3)_{;3} \\
& = S^3 \dots \dots \dots (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M^{\alpha\beta}_i - N^{\alpha\beta} - N^{\alpha\gamma} \mathcal{Q}_{\gamma}^{\beta} - N^{\alpha 3} U^{\beta}_{;3} - Q^{\alpha j} D_j^{\beta} \\
& - Q^{\alpha i} \theta_i^{\beta} - \mu^{\alpha i} D_i^{\beta}_{;3} - \mu^{\alpha i} \theta_i^{\beta}_{;3} - M^{\alpha\gamma} W_{\gamma}^{\beta} \\
& + (M^{\alpha\gamma} \mathcal{Q}_{\gamma}^{\beta})_{;3} + (M^{\alpha 3} U^{\beta}_{;3})_{;3} \\
& = Y^{\alpha\beta} \dots \dots \dots (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M^{\alpha 3}_{;3} - N^{\alpha 3} - N^{\alpha\beta} \mathcal{Q}_{\beta}^3 - N^{\alpha 3} U^3_{;3} - Q^{\alpha i} D_i^3 \\
& - Q^{\alpha i} \mathcal{Q}_i^3 - \mu^{\alpha i} D_i^3_{;3} - \mu^{\alpha i} \theta_i^3_{;3} - M^{\alpha\beta} W_{\beta}^3 \\
& + (M^{\alpha\beta} \mathcal{Q}_{\beta}^3)_{;3} - M^{\beta 3} \mathcal{Q}_{\beta}^3_{;3} + (M^{\alpha 3} U^3_{;3})_{;3} \\
& = Y^{\alpha 3} \dots \dots \dots (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{ij}_{;3} - Q^{ri} \mathcal{Q}_{rj} - Q^{ji} - Q^{3i} U^j_{;3} + (\mu^{ir} \mathcal{Q}_{rj})_{;3} \\
& + (\mu^{i3} U^j_{;3})_{;3} \\
& = Z^{ij} \dots \dots \dots (5.8)
\end{aligned}$$

幾何学的な境界条件は、以下の通りである。

$$U_i - \tilde{U}_i = 0 \dots \dots \dots (5.9)$$

$$\mathcal{Q}_{\alpha j} - \tilde{\mathcal{Q}}_{\alpha j} = 0 \dots \dots \dots (5.10)$$

$$\theta_{ij} - \tilde{\theta}_{ij} = 0 \dots \dots \dots (5.11)$$

境界での応力 s^i , $y^{\alpha j}$ 及び z^{ij} は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
s^i &= N^{i3} + N^{\alpha 3} \mathcal{Q}_{\alpha}^i + N^{33} U^i_{;3} + Q^{3j} D_j^i \\
& + Q^{3j} \theta_j^i + \mu^{j3} D_j^i_{;3} + \mu^{j3} \theta_j^i_{;3} + M^{\alpha 3} W_{\alpha}^i \\
& + M^{\alpha 3} \mathcal{Q}_{\alpha}^i_{;3} \dots \dots \dots (5.12)
\end{aligned}$$

$$y^{\alpha j} = M^{\alpha j} + M^{\alpha\gamma} \mathcal{Q}_{\gamma}^j + M^{\alpha 3} U^j_{;3} \dots \dots \dots (5.13)$$

$$z^{ij} = \mu^{ij} + \mu^{jr} \mathcal{Q}_{rj} + \mu^{i3} U^j_{;3} \dots \dots \dots (5.14)$$

力学的な境界条件式は、次の通りである。

$$\begin{aligned}
\tilde{s}^i &= N^{i3} - N^{\alpha 3} \mathcal{Q}_{\alpha}^i - N^{33} U^i_{;3} - Q^{3j} D_j^i \\
& - Q^{3j} \theta_j^i - \mu^{j3} D_j^i_{;3} - \mu^{j3} \theta_j^i_{;3} - M^{\alpha 3} W_{\alpha}^i \\
& - M^{\alpha 3} \mathcal{Q}_{\alpha}^i_{;3} = 0 \dots \dots \dots (5.15)
\end{aligned}$$

$$\tilde{y}^{\alpha j} - M^{\alpha j} - M^{\alpha\gamma} \mathcal{Q}_{\gamma}^j - M^{\alpha 3} U^j_{;3} = 0 \dots \dots \dots (5.16)$$

$$\tilde{z}^{ij} - \mu^{ij} - \mu^{jr} \mathcal{Q}_{rj} - \mu^{i3} U^j_{;3} = 0 \dots \dots \dots (5.17)$$

構成式は、

$$N^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \dots \dots \dots (5.18)$$

$$Q^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \dots \dots \dots (5.19)$$

$$\mu^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ij}} \dots \dots \dots (5.20)$$

$$M^{\alpha j} = \frac{\partial W}{\partial \phi_{\alpha j}} \dots \dots \dots (5.21)$$

である。(5.4)~(5.7) 式は、巨視的なつり合い式であり、(5.8) 式は、director を考えることにより生じた微視的なつり合い式である。

§6 構成式

ひずみエネルギー関係 W は、二次形式で次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} ({}_1 E^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + {}_2 E^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \\
& + {}_3 E^{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl} + {}_4 E^{\alpha j \beta l} \phi_{\alpha j} \phi_{\beta l}) \\
& + {}_1 D^{ijkl} \varepsilon_{ij} \gamma_{kl} + {}_2 D^{ijkl} \varepsilon_{ij} \kappa_{kl} + {}_3 D^{ij \beta l} \varepsilon_{ij} \phi_{\beta l} \\
& + {}_4 D^{ijkl} \gamma_{ij} \kappa_{kl} + {}_5 D^{ij \beta l} \gamma_{ij} \phi_{\beta l} \\
& + {}_6 D^{ij \beta l} \kappa_{ij} \phi_{\beta l} \dots \dots \dots (6.1)
\end{aligned}$$

(6.1) 式を (5.9)~(5.22) 式に代入し、各応力 N_{ij} , Q^{ij} , μ^{ij} , $M^{\alpha j}$ の構成関係を求める。

$$\begin{aligned}
N^{ij} &= {}_1 E^{ijkl} \varepsilon_{kl} + {}_1 D^{ijkl} \gamma_{kl} + {}_2 D^{ijkl} \kappa_{kl} \\
& + {}_3 D^{ij \beta l} \phi_{\beta l} \dots \dots \dots (6.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^{ij} &= {}_1 D^{kl ij} \varepsilon_{kl} + {}_2 E^{ijkl} \gamma_{kl} + {}_4 D^{ijkl} \kappa_{kl} \\
& + {}_5 D^{ij \beta l} \phi_{\beta l} \dots \dots \dots (6.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu^{ij} &= {}_2 D^{kl ij} \varepsilon_{kl} + {}_4 D^{kl ij} \gamma_{kl} + {}_3 E^{ijkl} \kappa_{kl} \\
& + {}_6 D^{ij \beta l} \phi_{\beta l} \dots \dots \dots (6.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^{\alpha j} &= {}_3 D^{kl \alpha j} \varepsilon_{kl} + {}_5 D^{l \alpha j} \gamma_{il} + {}_6 D^{l \alpha j} \kappa_{il} \\
& + {}_4 E^{\alpha j \beta l} \phi_{\beta l} \dots \dots \dots (6.5)
\end{aligned}$$

構成係数, ${}_1 E^{ijkl}$, ${}_2 E^{ijkl}$, ${}_3 E^{ijkl}$, ${}_4 E^{ijkl}$ は、次の関係を持つ。

$${}_1 E^{ijkl} = {}_1 E^{kl ij} = {}_1 E^{ij lk} = {}_1 E^{j i k l} \dots \dots \dots (6.6)$$

$${}_2 E^{ijkl} = {}_2 E^{kl ij} \dots \dots \dots (6.7)$$

$${}_3 E^{ijkl} = {}_3 E^{kl ij} \dots \dots \dots (6.8)$$

$${}_4E^{\alpha j \beta l} = {}_4E^{\beta l \alpha j} \dots\dots\dots (6.9)$$

$${}_1D^{ijkl} = {}_1D^{jikl} \dots\dots\dots (6.10)$$

$${}_2D^{ijkl} = {}_2D^{jikl} \dots\dots\dots (6.11)$$

$${}_3D^{ij \beta l} = {}_3D^{ij \beta l} \dots\dots\dots (6.12)$$

各応力の N^{ij} , Q^{ij} , μ^{ij} , $M^{\alpha j}$ 構成関係をマトリックス表示すると,

$$\begin{pmatrix} N^{ij} \\ Q^{ij} \\ \mu^{ij} \\ M^{\alpha j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_1E^{ijkl} & {}_1D^{ijkl} & {}_2D^{ijkl} & {}_3D^{ij \beta l} \\ & {}_2E^{ijkl} & {}_4D^{ijkl} & {}_5D^{ij \beta l} \\ & \text{対称} & {}_3E^{ijkl} & {}_6D^{ij \beta l} \\ & & & {}_4E^{\alpha j \beta l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{kl} \\ \gamma_{kl} \\ \kappa_{kl} \\ \psi_{\beta l} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (6.13)$$

構成係数のマトリックスは, 対称になる。

§7 線型理論

この節では, 理論の線型化を考える。はじめに(4.29)~(4.38)式における非線型項を省略して, 線型化したひずみ-変位関係を求める。

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \varrho_{\alpha\beta} + \varrho_{\beta\alpha} \dots\dots\dots (7.1)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \varrho_{\alpha 3} + U_{\alpha;3} \dots\dots\dots (7.2)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{\alpha 3} \dots\dots\dots (7.3)$$

$$\varepsilon_{33} = U_{3;3} \dots\dots\dots (7.4)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = D_{\beta i} \varrho_{\alpha}^i + \theta_{\beta\alpha} \dots\dots\dots (7.5)$$

$$\tau_{\alpha 3} = D_{3i} \varrho_{\alpha}^i + \theta_{3\alpha} \dots\dots\dots (7.6)$$

$$\tau_{3\alpha} = D_{\alpha}^i U_{i;3} + \theta_{\alpha 3} \dots\dots\dots (7.7)$$

$$\tau_{33} = D_3^i U_{i;3} + \theta_{33} \dots\dots\dots (7.8)$$

$$\phi_{\alpha}^j = W_{\beta i} \varrho_{\alpha}^i + \varrho_{\alpha\beta;3} \dots\dots\dots (7.9)$$

$$\phi_{\alpha 3} = W_{\alpha i} U_{i;3} + \varrho_{\alpha 3;3} \dots\dots\dots (7.10)$$

$$\kappa_{i\beta} = D_{ij;3} \varrho_{\beta}^j + \theta_{i\beta;3} \dots\dots\dots (7.11)$$

$$\kappa_{i3} = D_{ij;3} U_{j;3} + \theta_{i3;3} \dots\dots\dots (7.12)$$

線型のひずみ-変位関係に対応するつり合い式は, (5.5)~(5.9)式の非線型項を省略することで, 得られる。

$$(N^{i\alpha} + Q^{3i} D_i^{\alpha})_{;3} + (M^{\beta 3} W_{\beta}^{\alpha})_{;3} + (\mu^{i3} D_i^{\alpha})_{;3} = S^{\alpha} \dots\dots\dots (7.13)$$

$$(N^{33} + Q^{3i} D_i^3)_{;3} + (M^{\alpha 3} W_{\alpha}^3)_{;3} + (\mu^{i3} D_i^3)_{;3} = S^3 \dots\dots\dots (7.14)$$

$$M^{\alpha\beta}_{;3} - N^{\alpha\beta} - Q^{\alpha i} D_i^{\beta} - \mu^{i\alpha} D_i^{\beta}_{;3} - M^{\alpha\gamma} W_{\gamma}^{\beta} = Y^{\alpha\beta} \dots\dots\dots (7.15)$$

$$M^{\alpha 3}_{;3} - N^{\alpha 3} - Q^{\alpha i} D_i^3 - \mu^{i\alpha} D_i^3_{;3} - M^{\alpha\beta} W_{\beta}^3 = Y^{\alpha 3} \dots\dots\dots (7.16)$$

$$\mu^{ij}_{;3} - Q^{ij} = Z^{ij} \dots\dots\dots (7.17)$$

線型理論における境界条件式も, つり合い式と同様に, 非線型の境界条件式を線型化することで得られる。幾何学的な境界条件式は, 次の通りである。

$$U_i - \tilde{U}_i = 0 \dots\dots\dots (7.18)$$

$$\varrho_{\alpha j} - \tilde{\varrho}_{\alpha j} = 0 \dots\dots\dots (7.19)$$

$$\theta_{ij} - \tilde{\theta}_{ij} = 0 \dots\dots\dots (7.20)$$

境界での応力 s^i , $y^{\alpha j}$ 及び z^{ij} は,

$$s^i = N^{i3} + Q^{3j} D_j^i + \mu^{j3} D_j^i_{;3} + M^{\alpha 3} W_{\alpha}^i \dots\dots (7.21)$$

$$y^{\alpha j} = M^{\alpha j} \dots\dots\dots (7.22)$$

$$z^{ij} = \mu^{ij} \dots\dots\dots (7.23)$$

となる。力学的な境界条件式も, (5.15)~(5.17)式から, 以下のように得られる。

$$s^i - N^{i3} - Q_j^i - \mu^{j3} D_j^i_{;3} - M^{\alpha 3} W_{\alpha}^i = 0 \dots\dots (7.24)$$

$$y^{\alpha j} - M^{\alpha j} = 0 \dots\dots\dots (7.25)$$

$$z^{ij} - \mu^{ij} = 0 \dots\dots\dots (7.26)$$

構成関係は, (6.13)式で求められており, 線型化されたひずみに対しても成立する。特殊な例として, 媒体が中心対称性の等方性である場合の構成係数について考えてみる。このときには, 独立な構成係数は非常に少なくなる。

媒体の特性から, 奇数階の構成係数テンソルは存在しない。次の構成係数は, 本来, 5階のテンソルであるので,

$${}_3D^{ij \beta l} = 0, {}_2D^{ijkl} = 0$$

$${}_5D^{ij \beta l} = 0, {}_4D^{ijkl} = 0$$

となる。残りの構成係数は, 計量テンソル A^{ij} の積の線型結合で表わされる。

$${}_1E^{ijkl} = \kappa_1 A^{ij} A^{kl} + \mu_1 A^{ik} A^{jl} + \mu_2 A^{il} A^{jk} \dots\dots (7.27)$$

$${}_2E^{ijkl} = \lambda_2 A^{ij} A^{kl} + \mu_3 A^{ik} A^{il} + \mu_4 A^{il} A^{jk} \dots\dots (7.28)$$

$${}_3E^{ijkl} = \lambda_3 A^{ij} A^{kl} + \mu_5 A^{ik} A^{jl} + \mu_6 A^{il} A^{jk} \dots\dots\dots (7.29)$$

$${}_4E^{\alpha j \beta l} = \lambda_4 A^{\alpha j} A^{\beta l} + \mu_7 A^{\alpha\beta} A^{jl} + \mu_8 A^{\alpha l} A^{j\beta} \dots\dots\dots (7.30)$$

$${}_1D^{ijkl} = d_1 A^{ij} A^{kl} + d_2 A^{ik} A^{jl} + d_3 A^{il} A^{jk} \dots\dots\dots (7.31)$$

$${}_6D^{ij \beta l} = d_4 A^{ij} A^{\beta l} + d_5 A^{i\beta} A^{jl} + d_6 A^{il} A^{j\beta} \dots\dots\dots (7.32)$$

式(6.6)~(6.10)の条件により, 次の関係を得る。

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu \dots\dots\dots (7.33)$$

$$d_2 = d_3 = d \dots\dots\dots (7.34)$$

基本ベクトルが正規直交である場合には,

$$A^{ij} = \delta^{ij} \dots\dots\dots (7.35)$$

である。(7.35)式を(7.27)~(7.32)式に代入すると, 媒体が中心対称の等方性であり, 基本ベクトルが正規直交の場合の構成式を得る。

$${}_1E^{ijkl} = \lambda_1 \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \dots\dots (7.36)$$

$${}_2E^{ijkl} = \lambda_2 \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu_3 \delta^{ik} \delta^{jl} + \mu_4 \delta^{il} \delta^{jk} \dots\dots (7.37)$$

$${}_3E^{ijkl} = \lambda_3 \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu_5 \delta^{ik} \delta^{jl} + \mu_6 \delta^{il} \delta^{jk} \dots\dots (7.38)$$

$${}_4E^{\alpha j \beta l} = \lambda_4 \delta^{\alpha j} \delta^{\beta l} + \mu_7 \delta^{\alpha\beta} \delta^{jl} + \mu_8 \delta^{\alpha l} \delta^{j\beta} \dots\dots (7.39)$$

$${}_1D^{ij \beta l} = d_1 \delta^{ij} \delta^{\beta l} + d (\delta^{ik} \delta^{jl} \delta^{\beta k}) \dots\dots\dots (7.40)$$

$${}_6D^{ij \beta l} = d_4 \delta^{ij} \delta^{\beta l} + d_5 \delta^{i\beta} \delta^{jl} + d_6 \delta^{il} \delta^{j\beta} \dots\dots (7.41)$$

以上のことから明らかなように, 独立な構成係数は, 16になる。この媒体の場合で, 特殊な拘束を加えたときの構成係数は, 次節の特殊化で考える。

§8 特殊化

この節において考える特殊化は, §6の線型理論につ

いて考える。

- (1) 変形前に director D_i が基本ベクトル A_i に一致しているとき

変形前の状態で director D_i が基本ベクトル A_i に一致しているとき, director D_i の基本ベクトル A_i による成分表示式 (2.10) より, 次のように得られる。

$$D_i = \delta_i^j A_j \dots\dots\dots (8.1)$$

このことから, director D_i の成分 D_i^j は,

$$D_i^j = \delta_i^j \dots\dots\dots (8.2)$$

となる。 r_{ij} 及び κ_{ij} のひずみ—変位関係は, (7.5) ~ (7.8), (7.11), (7.12) 式に (8.2) 式を代入することにより得られる。 ε_{ij} 及び ϕ_{aj} も併記する。

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \varrho_{\alpha\beta} + \varrho_{\beta\alpha} \dots\dots\dots (8.3)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \varrho_{\alpha 3} + U_{\alpha;3} \dots\dots\dots (8.4)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{\alpha 3} \dots\dots\dots (8.5)$$

$$\varepsilon_{33} = U_{3;3} \dots\dots\dots (8.6)$$

$$\gamma_{\alpha i} = \varrho_{\alpha i} + \theta_{i\alpha} \dots\dots\dots (8.7)$$

$$\gamma_{3i} = U_{i;3} + \theta_{i3} \dots\dots\dots (8.8)$$

$$\phi_{\alpha\beta} = W_{\beta i} \varrho_{\alpha}^i + \varrho_{\alpha\beta;3} \dots\dots\dots (8.9)$$

$$\phi_{\alpha 3} = W_{\alpha i} U^i_{;3} + \varrho_{\alpha 3;3} \dots\dots\dots (8.10)$$

$$\kappa_{ij} = \theta_{ij;3} \dots\dots\dots (8.11)$$

この場合のつり合い式も, ひずみ—変位関係と同様に (7.13) ~ (7.17) 式に (8.2) 式を代入して得られる。

$$(N^{3\alpha} + Q^{3\alpha})_{;3} + (M^{\beta 3} W_{\beta}^{\alpha})_{;3} = S^{\alpha} \dots\dots\dots (8.12)$$

$$(N^{33} + Q^{33})_{;3} + (M^{\alpha 3} W_{\alpha}^3)_{;3} = S^3 \dots\dots\dots (8.13)$$

$$M^{\alpha\beta}_{;3} - (N^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta}) - M^{\alpha\tau} W_{\tau}^{\beta} = Y^{\alpha\beta} \dots\dots\dots (8.14)$$

$$M^{\alpha 3}_{;3} - (N^{\alpha 3} + Q^{\alpha 3}) - M^{\alpha\tau} W_{\tau}^3 = Y^{\alpha 3} \dots\dots\dots (8.15)$$

$$\mu^{ij}_{;3} - Q^{ji} = Z^{ij} \dots\dots\dots (8.16)$$

幾何学的な境界条件式及び力学的境界条件式も, つり合い式と同様に, (7.18) ~ (7.26) 及び (8.2) 式から得られる。

- (2) director の変位と基本ベクトルの変位が一致しているとき

director 変位が, 巨視的な変位に従属している場合について考える。変形前に一致していた基本ベクトルと director は, 変形後も一致しており, 巨視的な変位と局所的な変位には次の関係がある。

$$\varrho_{\alpha} = \theta_{\alpha} \dots\dots\dots (8.17)$$

$$U_{;3} = \theta_3 \dots\dots\dots (8.18)$$

上記の関係をひずみ—変位関係 (7.1) ~ (7.12) に代入することにより, 各ひずみ間に次の関係がある。

$$\varepsilon_{ij} = r_{ij} \dots\dots\dots (8.19)$$

$$\phi_{aj} = \kappa_{aj} \dots\dots\dots (8.20)$$

これらの関係から, 意味のあるひずみとして, ε_{ij} , ϕ_{aj} を採用する。つり合い式は, 以下のようになる。

$$N^{3\alpha}_{;3} + (M^{\beta 3} W_{\beta}^{\alpha})_{;3} = S^{\alpha} \dots\dots\dots (8.21)$$

$$N^{33}_{;3} + (M^{\alpha 3} W_{\alpha}^3)_{;3} = S^3 \dots\dots\dots (8.22)$$

$$M^{\alpha\beta}_{;3} - N^{\alpha\beta} - M^{\alpha\tau} W_{\tau}^{\beta} = Y^{\alpha\beta} \dots\dots\dots (8.25)$$

$$M^{\alpha 3}_{;3} N^{\alpha 3} - M^{\alpha\beta} W_{\beta}^3 = Y^{\alpha 3} \dots\dots\dots (8.24)$$

構成関係は,

$$N^{ij} = {}_1E^{ijkl} \varepsilon_{kl} + {}_3D^{ij\beta l} \phi_{\beta l} \dots\dots\dots (8.25)$$

$$M^{\alpha j} = {}_3D^{kl\alpha j} \varepsilon_{kl} + {}_4E^{\alpha j\beta l} \phi_{\beta l} \dots\dots\dots (8.26)$$

上記のように得られる。媒体が中心対称性の場合には, 先に述べた理由により, 次のように構成関係が得られる。

$$N^{ij} = {}_1E^{ijkl} \varepsilon_{kl} \dots\dots\dots (8.27)$$

$$M^{\alpha j} = {}_4E^{\alpha j\beta l} \phi_{\beta l} \dots\dots\dots (8.28)$$

(7.27) 及び (7.30) 式から明らかなように, この場合の独立な構成係数は, 5 コである。

(8.23) 式において, 自由指標について交代化した式及び (8.21), (8.22), (8.24) 式が, Green 等による式²⁾に一致している。

- (3) $\varrho_{\alpha} = 0$ のとき

基本ベクトル a_{α} が, 変形前の基本ベクトル A_{α} に等しい場合について考える。すなわち, 独立な変形として, U 及び θ_i が存在し, ϱ_{α} が存在しない場合である。

また, 簡単のために, 変形前の状態で基本ベクトル A_i と director D_i が一致しているとする。

この場合の意味のあるひずみは,

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} U_{\alpha;3} \dots\dots\dots (8.29)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{\alpha 3} \dots\dots\dots (8.30)$$

$$\varepsilon_{33} = U_{3;3} \dots\dots\dots (8.31)$$

$$\gamma_{\alpha i} = U_{i;3} + \theta_{i\alpha} \dots\dots\dots (8.32)$$

$$\kappa_{ij} = \theta_{ij;3} \dots\dots\dots (8.33)$$

となる。つり合い式は, (8.12), (8.13) 及び (8.16) 式から, 次のように求まる。

$$(N^{3i} + Q^{3i})_{;3} = S^i \dots\dots\dots (8.34)$$

$$\mu^{ij}_{;3} + Q^{ji} = Z^{ij} \dots\dots\dots (8.35)$$

構成関係は,

$$N^{3j} = {}_1E^{3jkl} \varepsilon_{kl} + {}_1D^{3jkl} \gamma_{kl} + {}_2D^{3jkl} \kappa_{kl} \dots\dots\dots (8.36)$$

$$Q^{ij} = {}_1D^{kl ij} \varepsilon_{kl} + {}_2E^{ijkl} \gamma_{kl} + {}_4D^{ijkl} \kappa_{kl} \dots\dots\dots (8.37)$$

$$\mu^{ij} = {}_2D^{kl ij} \varepsilon_{kl} + {}_4D^{kl ij} \gamma_{kl} + {}_3E^{ijkl} \kappa_{kl} \dots\dots\dots (8.38)$$

となる。ここでも, 媒体が中心対称等方性であると仮定する。このとき, 構成関係 (8.36) ~ (8.38) は, 以下のようになる。

$$N^{3j} = {}_1E^{3jkl} \varepsilon_{kl} + {}_1D^{3jkl} \gamma_{kl} \dots\dots\dots (8.39)$$

$$Q^{ij} = {}_1D^{kl ij} \varepsilon_{kl} + {}_2E^{ijkl} \gamma_{kl} \dots\dots\dots (8.40)$$

$$\mu^{ij} = {}_3E^{ijkl} \kappa_{kl} \dots\dots\dots (8.41)$$

(8.34) 及び (8.35) 式は, Cohen⁶⁾ によって定式化されたつり合い式と対応が付く。

§9 ま と め

巨視的には均質であるが, 微視的には非均質である一般化された連結体に対する棒材理論の構成を試みた。具体的には, 基本ベクトル以外に, director と呼ばれる変形可能なベクトルを考えることにより, 微視的に非均質

であるために生ずる局所的な挙動を，棒材理論の中に組み入れた。

続報（その2）において，本論の構造物への適用を示す。

参 考 文 献

- 1) V.Z. Vlasov 著，奥村敏恵外共訳：薄肉弾性梁の理論，技報堂 1967
- 2) A.E. Green & N. Laws : A General Theory of Rods. Proc. R. Soc. A 293, pp. 145-155
- 3) G.E. Hay : The Finite Displacement of Thin Rods. Trans. Am. Math. Soc. 51, pp. 65-102 (1942)
- 4) 松岡 理，飯島俊比古：高次の変形を考えた棒材の理論，日本建築学会昭和年度学術講演梗概集（東北）
- 5) 松岡 理，飯島俊比古：種の一般化された連続体力学理論の相互関連についての一考察，日本建築学会論文報告集，第215号，昭和49年1月
- 6) H. Cohen : A Non-Linear Theory of Elastic Directed Curves. Int. J. Engng. Sci. Vol. 4, pp. 511-524
- 7) R.D. Mindlin : Micro-structure in Linear Elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 16, pp. 51-78 1964
- 8) A.C. Eringen & E.S. Suhubi : Nonlinear Theory of Simple Micro-elastic Solids- I, II, Int. J. Engng. Sci. Vol. 2, pp. 189-203, pp. 389-404 1964
- 9) W.T. Koiter : Couple-stresses in the Theory of Elasticity I, II Proc. Ned. Acad. Sci. B67, pp. 17-29, pp. 30-40, 1964
- 10) A.C. Eringen : Linear Theory of Micropolar Elasticity, J. Math. Mech. Vol. 15, No. 6, pp. 909-923, 1966
- 11) C. T. Sun : Microstructure Theory of a Composite Beam : ASME Series E December 1971, pp. 947-954
- 12) 松岡 理，加藤史郎，小出弘之：格子状シェル構造物の連続体理論，日本建築学会論文報告集 第184号昭和46年6月

SYNOPSIS

U.D.C. 624.043 : 624.074.4

THE GENERAL THEORY OF RODS WITH MICRO-DEFORMATIONS (Part I)

by Dr. OSAMU MATSUOKA, Prof. of Nagoya Univ. and
TOSHIHIKO IJIMA, Graduate Student of Nagoya Univ.,
Members of A.I.J.

The purpose of this paper is to formulate the general theory of rods with micro-deformations. The micro-deformations are observed in the media which are homogeneous in macroscopic but heterogeneous in microscopic. In order to take such micro-deformations into considerations, deformable directors are introduced.

Some interesting applications of this theory to many practical problems such as bucklings of vierendeel frames and plate are shown in Part-II.