TRANSVERSELY-ISOTROPY の集中荷重の問題

その 2. Boussinesq の問題

正会員 松 岡 理*
正会員 勅使川原 誠 司**

1. 序

本論文における Boussinesq の問題とは、回転に関して方向性を持たない軸に垂直な自由平面上の一点に、回転軸方向の集中荷重が作用する場合の問題を指すものとする。

均質等方弾性体における Boussinesq の問題²⁾は、Kelvin の解を基本 Galerkin ベクトルの成分に採用し、これから無限体の種々のひずみ核 (Nuclei of strain) を合成し、その重ね合わせによって、1885 年に解かれた。ひずみ核は、単一力 (single force)、二重力 (double force)、モーメントを有する二重力 (double force with moment) である Galerkin ベクトルで表示されている。

この半無限弾性体の境界面に垂直方向の集中力が作用する Boussinesq の問題を、異方性体として扱ったものが、1900 年 Michell¹⁰⁾ によって示された。また、Michell の解を用いて Barden¹¹⁾ は垂直、せん断応力と表面垂直変位を求めている。これは、Transversely-isotropy の 5 個の弾性係数を、平面応力状態 ($\sigma_y=0$) の下で、純せん断状態に対して、せん断応力 τ_{xz} が作用応力に等しい ($\sigma_z=-\sigma_x$) という仮定のもとで 4 個に減じて解いている。さらに、地盤を異方性として扱ったものには、1935 年に発表された Wolf¹²⁾ の解がある。この解の基本的な仮定は、ポアソン比がすべての方向に等しいとしていることである。

ここでは、ひずみエネルギー正値と、支配方程式が楕円型である条件のもとに、5 個の弾性係数間の関係を定め、Fourier 変換により得られた前報²⁴⁾の基本解から、問題に適した軸対称のひずみ核を合成し、基本解と合成解の重ね合わせで Transversely-isotropy の Boussinesq の問題を解くことにする。

この問題に適したひずみ核として、次の二種類が考えられる。

一つは、原点において回転軸に垂直に作用する圧縮中心、図 2-1 (a) であり、他の一つは、図 2-1 (b) に示すものである。

尚、文中の記号、式は前報 (その 1) を引き続き使用

図 2-1 ひずみ核

する。

2. 解の合成

序で述べた解の合成法について述べる。Boussinesq の問題は、半無限弾性体の境界面上に垂直 (回転軸) 方向の荷重が作用するものであり、等方性体と同様、基本解 (1-39), (1-40) 式と境界条件を満足させる合成解との組み合わせで解くことができる。

境界条件は、特異点である原点を除いて、 $z=0$ で $\sigma_z = \sigma_{rz} = 0$ となる。基本解 (1-40) 式より、 $z=0$ における σ_z, σ_{rz} を求めると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \sigma_{rz} &= ae \left\{ a \left(-\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) + c(-c_1 + c_2) \frac{1}{r^2} X_3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-40)'$$

従って、 σ_z, σ_{rz} が $z=0$ において、それぞれ、0, $(1/r^2)$ となる解が必要であり、序で述べた 2 つのひずみ核はこれを満足する合成解となる。今、図 2-1 (a) のひずみ核による解を合成解 I、図 2-1 (b) のひずみ核による解を合成解 II とすれば次のようになる。

合成解 I

基本解 2) の $X_1 \neq 0, X_2 = X_3 = 0$ において

$$IX_1, JX_1 \text{ を } X_1 \int I_x dz, X_1 \int J_x dz$$

$X_1 = X_3 = 0, X_2 \neq 0$ において

$$IX_2, JX_2 \text{ を } X_2 \int I_y dz, X_2 \int J_y dz$$

として両者を加え、 $X_1 = X_2 = A_1'$ とすれば回転軸に対称な合成解が得られる。ここで、 z に関する積分は、条件を満たす解とするために基本解と元 (dimension) を合

* 名古屋大学教授・工博   ** 中部工業大学助手
(昭和 52 年 1 月 10 日 日本稿受理・討論期限昭和 53 年 2 月末日)

致させるための操作であり、原点 (0, 0, 0) を除き弾性体内の領域で特異性を与えることは許されないので積分領域は $[-\infty, 0]$ と考える。また、このひずみ核は、 x 、 y 面内の二重力 (double force) による圧縮中心 (center of compression) であり、等方性体の Boussinesq の解では、直交する三方向の二重力を組み合わせたものを圧縮中心としている。

従って、(1-20) 式の変位成分は、 $A_1 = 2 A_1'$ として

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= - \left(e \int d'I_{,x} dz + dI_{,xz} \right) A_1 \\ u_2 &= - \left(e \int d'I_{,y} dz + dI_{,yz} \right) A_1 \\ u_3 &= (c+e) d'IA_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-1)$$

円筒座標で変位、応力を表わせば (2-2) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= - \left(e \int d'I_{,r} dz + dI_{,rz} \right) A_1 \\ &= \alpha \left[e \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + d \frac{z}{r} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right] A_1 \\ u_\theta &= 0 \\ u_z &= (c+e) d'IA_1 \\ &= -\alpha (c+e) \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) A_1 \\ \sigma_r &= \left\{ -a \left(e \int d'I_{,rr} dz + dI_{,rrz} \right) \right. \\ &\quad \left. - b \frac{1}{r} \left(e \int d'I_{,r} dz + dI_{,rz} \right) + c(c+e) d'I_{,z} \right\} A_1 \\ &= -\alpha \left[(a-b) e \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} + (a-b) d \frac{z}{r^2} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - a e z \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + (ad - c^2 - ce) z \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right] A_1 \\ \sigma_\theta &= \left\{ -b \left(e \int d'I_{,rr} dz + dI_{,rrz} \right) \right. \\ &\quad \left. - a \frac{1}{r} \left(e \int d'I_{,r} dz + dI_{,rz} \right) + c(c+e) d'I_{,z} \right\} A_1 \\ &= \alpha \left[(a-b) e \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} + (a-b) d \frac{z}{r^2} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + b e z \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - (bd - c^2 - ce) z \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right] A_1 \\ \sigma_z &= -e \left(c \int d'I_{,zz} dz - d d'I_{,z} \right) A_1 \\ &= \alpha e z \left[c \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) + d \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right] A_1 \\ \sigma_{rz} &= e (c d'I_{,r} - d I_{,rrz}) A_1 \end{aligned} \right\}$$

$$= \alpha e r \left[c \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) + d \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right] A_1 \dots\dots\dots (2-2)$$

合成解 II

基本解 1) の $X_1 = X_2 = 0$, $X_3 \neq 0$ において

$$IX_3 \text{ を } X_3 \int d'Idz^2$$

とすれば軸対称な合成解となる。 z に関する二重積分は基本解と元を合致させるためであり、積分領域は合成解 I 同様 $[-\infty, 0]$ である。これは、等方性体の Boussinesq の解では用いられなかったひずみ核である。

$X_3 = A_2$ とおけば (1-20) 式は

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (c+e) D_x D_z \int \int d'Idz^2 A_2 \\ u_2 &= (c+e) D_y D_z \int \int d'Idz^2 A_2 \\ u_3 &= -(a d' + e D_z^2) \int \int d'Idz^2 A_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-3)$$

円筒座標による変位、応力は (2-4) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= (c+e) \int d'I_{,r} dz A_2 \\ &= -\alpha (c+e) \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} A_2 \\ u_\theta &= 0 \\ u_z &= - \left(a \int \int d'Idz^2 + e d'I \right) A_2 \\ &= -\alpha \left\{ a \left(\frac{1}{c_1^3 v_1} - \frac{1}{c_2^3 v_2} \right) - e \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} A_2 \\ \sigma_r &= \left\{ a(c+e) \int d'I_{,rr} dz + b(c+e) \frac{1}{r} \int d'I_{,r} dz \right. \\ &\quad \left. - c \left(a \int d'Idz + e d'I_{,z} \right) \right\} A_2 \\ &= \alpha \left[(a-b)(c+e) \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} - a e z \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - c e z \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right] A_2 \\ \sigma_\theta &= \left\{ b(c+e) \int d'I_{,rr} dz + a(c+e) \frac{1}{r} \int d'I_{,r} dz \right. \\ &\quad \left. - c \left(a \int d'Idz + e d'I_{,z} \right) \right\} A_2 \\ &= \alpha \left[-(a-b)(c+e) \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + (ac - bc - be) z \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - c e z \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right] A_2 \\ \sigma_z &= - \left\{ (ad - c^2 - ce) \int d'Idz + d e d'I_{,z} \right\} A_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha z \left[(ad - c^2 - ce) \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - de \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right] A_2 \\
\sigma_{rz} &= e \left(c \int d' d' I_{,r} dz - d d' I_{,r} \right) A_2 \\
&= \alpha e r \left[a \left(\frac{1}{c_1^3 v_1^3} - \frac{1}{c_2^3 v_2^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + c \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) \right] A_2 \\
&\dots\dots\dots (2-4)
\end{aligned}$$

3. Boussinesq の解

以上の結果により, Transversely-isotropy の Boussinesq の問題は, 基本解と 2 種類の合成解, すなわち, x, y 面内で圧縮核を持つ場合のポテンシャルを z について 1 回積分した (2-2) 式, 及び, $X_1 = X_2 = 0, X_3 \neq 0$ の場合の基本解を z について 2 回積分し, x, y の 2 次元ラプラスアンを作用させた (2-4) 式との組み合わせで解くことができる。それぞれの組み合わせ解を示せば次のとおりである。

3-1 基本解と合成解 I

(1-39), (1-40), (2-2) 式より, 変位, 応力は次式となる。

$$\begin{aligned}
u_r &= -\alpha(c+e) \frac{z}{r} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) X_3 \\
&\quad + \alpha \left[e \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + d \frac{z}{r} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right] A_1 \\
u_\theta &= 0 \\
u_z &= \alpha \left\{ a \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) - e \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right\} X_3 \\
&\quad - \alpha(c+e) \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) A_1 \\
\sigma_r &= \alpha z \left\{ -(a-b)(c+e) \frac{1}{r^2} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + ae \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) + ce \left(\frac{c_1^3}{v_1^3} - \frac{c_2^3}{v_2^3} \right) \right\} X_3 \\
&\quad - \alpha \left[(a-b)e \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} + (a-b)d \frac{z}{r^2} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right. \\
&\quad \left. - ae z \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + (ad - c^2 - ce) z \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right] A_1 \\
\sigma_\theta &= \alpha z \left\{ -(a-b)(c+e) \frac{1}{r^2} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (bc + be - ac) \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + ce \left(\frac{c_1^3}{v_1^3} - \frac{c_2^3}{v_2^3} \right) \right\} X_3 \\
&\quad + \alpha \left[(a-b)e \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \left. - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} + (a-b)d \frac{z}{r^2} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \\
&\quad \left. + be z \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - (bd - c^2 - ce) z \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right] A_1 \\
\sigma_z &= \alpha z \left\{ (c^2 + ce - ad) \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + de \left(\frac{c_1^3}{v_1^3} - \frac{c_2^3}{v_2^3} \right) \right\} X_3 \\
&\quad + \alpha e z \left\{ c \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) + d \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right\} A_1 \\
\sigma_{rz} &= -\alpha e r \left\{ a \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) + c \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right\} X_3 \\
&\quad + \alpha e r \left\{ c \left(\frac{1}{c_1 v_1^3} - \frac{1}{c_2 v_2^3} \right) + d \left(\frac{c_1}{v_1^3} - \frac{c_2}{v_2^3} \right) \right\} A_1 \\
&\dots\dots\dots (2-5)
\end{aligned}$$

ここで, X_3, A_1 は平衡条件, 境界条件より決定される未定係数である。今, 境界面上の原点に, 垂直方向の外力 P が働いている場合, 平衡条件は

$z \geq 0$ において

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z dx dy = -P \dots\dots\dots (2-6)$$

境界条件は, $z=0$ で

$$\sigma_{rz} = 0 \dots\dots\dots (2-7)$$

となる。従って, (2-6), (2-7) 式より

$$\left. \begin{aligned}
2\pi a d e (c_1^2 - c_2^2) X_3 + 2\pi a c e \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) A_1 &= -P \\
-\alpha e \frac{1}{r^2} \left\{ a \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) + c(c_1 - c_2) \right\} X_3 \\
+ \alpha e \frac{1}{r^2} \left\{ c \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) + d(c_1 - c_2) \right\} A_1 &= 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-8)$$

これより X_3, A_1 が決定され, Boussinesq の解が求められた。

3-2 基本解と合成解 II

(1-39), (1-40), (2-4) 式より, 変位, 応力は次式となる。

$$\begin{aligned}
u_r &= -\alpha(c+e) \frac{z}{r} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) X_3 \\
&\quad - \alpha(c+e) \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - z \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} A_2 \\
u_\theta &= 0 \\
u_z &= \alpha \left\{ a \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) - e \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right\} X_3 \\
&\quad - \alpha \left\{ a \left(\frac{1}{c_1^3 v_1} - \frac{1}{c_2^3 v_2} \right) \right. \\
&\quad \left. - e \left(\frac{1}{c_1 v_1} - \frac{1}{c_2 v_2} \right) \right\} A_2 \\
\sigma_r &= \alpha z \left\{ -(a-b)(c+e) \frac{1}{r^2} \left(\frac{c_1}{v_1} - \frac{c_2}{v_2} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +ae\left(\frac{c_1}{v_1^3}-\frac{c_2}{v_2^3}\right)+ce\left(\frac{c_1^3}{v_1^3}-\frac{c_2^3}{v_2^3}\right)\}X_3 \\
& +\alpha\left[(a-b)(c+e)\frac{1}{r^2}\left\{\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}\right)\right.\right. \\
& \left.\left.-z\left(\frac{1}{c_1v_1}-\frac{1}{c_2v_2}\right)\right\}-aez\left(\frac{1}{c_1v_1^3}-\frac{1}{c_2v_2^3}\right)\right. \\
& \left.-ce z\left(\frac{c_1}{v_1^3}-\frac{c_2}{v_2^3}\right)\right]A_2 \\
\sigma_\theta = & \alpha z\left\{-(a-b)(c+e)\frac{1}{r^2}\left(\frac{c_1}{v_1}-\frac{c_2}{v_2}\right)\right. \\
& + (bc+be-ac)\left(\frac{c_1}{v_1^3}-\frac{c_2}{v_2^3}\right) \\
& + ce\left(\frac{c_1^3}{v_1^3}-\frac{c_2^3}{v_2^3}\right)\}X_3 \\
& +\alpha\left[-(a-b)(c+e)\frac{1}{r^2}\left\{\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}\right)\right.\right. \\
& \left.\left.-z\left(\frac{1}{c_1v_1}-\frac{1}{c_2v_2}\right)\right\}\right. \\
& \left.-(bc+be-ac)z\left(\frac{1}{c_1v_1^3}-\frac{1}{c_2v_2^3}\right)\right. \\
& \left.-ce z\left(\frac{c_1}{v_1^3}-\frac{c_2}{v_2^3}\right)\right]A_2 \\
\sigma_z = & \alpha z\left\{(c^2+ce-ad)\left(\frac{c_1}{v_1^3}-\frac{c_2}{v_2^3}\right)\right. \\
& + de\left(\frac{c_1^3}{v_1^3}-\frac{c_2^3}{v_2^3}\right)\}X_3 \\
& +\alpha z\left\{(ad-c^2-ce)\left(\frac{1}{c_1v_1^3}-\frac{1}{c_2v_2^3}\right)\right. \\
& \left.-de\left(\frac{c_1}{v_1^3}-\frac{c_2}{v_2^3}\right)\right\}A_2 \\
\sigma_{rz} = & -\alpha er\left\{a\left(\frac{1}{c_1v_1^3}-\frac{1}{c_2v_2^3}\right)\right. \\
& + c\left(\frac{c_1}{v_1^3}-\frac{c_2}{v_2^3}\right)\}X_3 \\
& +\alpha er\left\{a\left(\frac{1}{c_1^3v_1^3}-\frac{1}{c_2^3v_2^3}\right)\right. \\
& + c\left(\frac{1}{c_1v_1^3}-\frac{1}{c_2v_2^3}\right)\}A_2 \\
& \dots\dots\dots(2-9)
\end{aligned}$$

未定係数 X_3, A_2 は, (2-6), (2-7) 式の関係より次の式から決定される。

$$\begin{aligned}
& 2\pi ade(c_1^2-c_2^2)X_3+2\pi\alpha(ad-c^2-ce) \\
& \cdot\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}\right)A_2=-P \\
& -\alpha e\frac{1}{r^2}\left\{a\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)+c(c_1-c_2)\right\}X_3 \\
& +\alpha e\frac{1}{r^2}\left\{a\left(\frac{1}{c_1^3}-\frac{1}{c_2^3}\right)+c\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\right\}A_2=0 \\
& \dots\dots\dots(2-10)
\end{aligned}$$

(2-5), (2-9) 式で示された解は一致する。

4. Boussinesq の解による地中応力²⁵⁾

前節で求めた (2-5), (2-9) 式は一致するので, (2-5) 式を用いて, 地中応力成分のうちでも圧密沈下量の計算

等に必要な垂直方向の成分 σ_z について等方性体の応力との比較を行い, Transversely-isotropy の地中応力状態を調べる。

(2-5) 式より

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & \{\alpha(c^2+ce-ad)X_3+\alpha deA_1\}\left(\frac{c_1z}{v_1^3}-\frac{c_2z}{v_2^3}\right) \\
& +\alpha deX_3\left(\frac{c_1^3z}{v_1^3}-\frac{c_2^3z}{v_2^3}\right)+\alpha ceA_1\left(\frac{z}{c_1v_1^3}-\frac{z}{c_2v_2^3}\right) \\
& \dots\dots\dots(2-11)
\end{aligned}$$

簡略化のため

$$\begin{aligned}
& \alpha(c^2+ce-ad)X_3+\alpha deA_1=H_1'P \\
& \alpha deX_3=H_2'P \\
& \alpha ceA_1=H_3'P
\end{aligned}
\left. \dots\dots\dots(2-12) \right\}$$

とし, さらに

$$\begin{aligned}
& H_1'c_1^2+H_2'c_1^4+H_3'=W_1 \\
& H_1'c_2^2+H_2'c_2^4+H_3'=W_2
\end{aligned}
\left. \dots\dots\dots(2-13) \right\}$$

とおけば

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & \left(\frac{P}{z^2}\right)\left[\frac{W_1}{\{c_1^2+(r/z)^2\}^{3/2}}-\frac{W_2}{\{c_2^2+(r/z)^2\}^{3/2}}\right] \\
& =\left(\frac{P}{z^2}\right)I_{PI} \dots\dots\dots(2-14)
\end{aligned}$$

ここで

$$I_{PI}=\frac{W_1}{\{c_1^2+(r/z)^2\}^{3/2}}-\frac{W_2}{\{c_2^2+(r/z)^2\}^{3/2}} \dots\dots\dots(2-15)$$

等方性体の解では^{22), 23), 26)}

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & \frac{3Pz^3}{2\pi R^5}=\left(\frac{P}{z^2}\right)\left(\frac{3}{2\pi}\right)\left\{\frac{1}{(1+r^2/z^2)^{5/2}}\right\} \\
& =\left(\frac{P}{z^2}\right)I_P \\
I_P = & f\left(\frac{r}{z}\right)=\left(\frac{3}{2\pi}\right)\left\{\frac{1}{(1+r^2/z^2)^{5/2}}\right\} \\
& \dots\dots\dots(2-16)
\end{aligned}$$

(2-16) 式の I_P は, 等方性体における Boussinesq の問題の影響数 (Influence factor) と呼ばれるものである。従って, (2-15) 式は Transversely-isotropy の Boussinesq の問題に対する影響数である。これらの式より明らかなように, 等方性体の影響数は弾性係数 (ポアソン比) に関係なく一定の値となるが, Transversely-isotropy の場合は, 弾性係数の値によって変わることがわかる。そこで, 前報の (1-6) 式の関係を用いて等方性体の弾性係数とポアソン比の関係を示すと

$$\begin{aligned}
\nu = 0.45 \text{ で } & a=d \doteq 3.79 E, \quad b=c \doteq 3.10 E, \quad e \doteq 0.34 E \\
\nu = 0.40 \text{ で } & a=d \doteq 2.14 E, \quad b=c \doteq 1.43 E, \quad e \doteq 0.36 E \\
\nu = 0.35 \text{ で } & a=d \doteq 1.60 E, \quad b=c \doteq 0.86 E, \quad e \doteq 0.37 E \\
& (E: \text{ヤング係数})
\end{aligned}$$

となる。

$\nu=0.45$ の時の影響数を (2-15) 式によって求めたものが表 2-1 である。この表から明らかなように, 等方性体の式から求めた値とほぼ一致している。

Table 2-1 Influence factor

r/z	Isotropy	Transversely isotropy
	I_p	$ I_p $
0.00	0.4775	0.4775
0.01	0.4774	0.4773
0.05	0.4745	0.4745
0.10	0.4657	0.4657
0.15	0.4516	0.4516
0.20	0.4329	0.4329
0.25	0.4103	0.4103
0.30	0.3849	0.3849
0.35	0.3577	0.3577
0.40	0.3295	0.3295
0.45	0.3011	0.3011
0.50	0.2733	0.2733
1.00	0.0844	0.0844
1.50	0.0251	0.0251
2.00	0.0085	0.0085
2.50	0.0034	0.0034
3.00	0.0015	0.0015
3.50	0.0007	0.0007

図 2-2 (a) 影響数の図 (1)

図 2-2 (a)~(c) は、種々の弾性係数について求めた影響数である。(a) 図は $\nu=0.4$, (b), (c) 図は $\nu=0.35$ とした時の弾性係数を変化させて影響を調べたものである。これらの図からわかることは、(a), (b) 図において、面内のせん断剛性 ($a-b$) の値が減少すれば原点下付近の圧縮応力も低下し、引張り応力を生じる場合もある。その影響は、 r/z が 1.0 を越えると小さくなり、2.0 付近では異方性の影響は殆んどなくなっている。同様に、 z 軸方向の剛性が増大すれば圧縮応力も増大し、減少すれば原点下付近で小さくなること (c) 図からわかる。

これらの現象を、垂直変位 $u_z(w)$, 垂直応力 σ_z , 半径方向変位 u_r , 半径方向応力 σ_r について示したものが

図 2-2 (b) 影響数の図 (2)

図 2-2 (c) 影響数の図 (3)

図 2-3 (a)~図 2-6 である。また、図 2-7 (a)~(c) は垂直応力の等応力線図である。この等応力線図からわかるように、 r/z が 1.0, すなわち、 z 軸と 45° の角度をなす付近を境いに、弾性係数の値の変化により、応力状態の変化も顕著となる。特に図 2-7 (c) は、集中荷重 $P=1.0\text{ t}$ の場合の $\sigma_z=0.5 \times 10^{-3}\text{ t/m}^2$ についての面内剛性の相違に対する等応力線を表わしたものである。実線は、 $\nu=0.35$ の等方性体に近い弾性体の応力線であり、破線、一点鎖線は面内剛性の低下した弾性体の応力線を示している。

5. 結 語

Transversely-isotropy の Boussinesq の問題は、基本解と合成解 I, II の組み合わせで解けることを示した。両者の解は一致する。この Boussinesq の解を、5 個

図 2-3 (a) 等方性体の垂直変位

図 2-3 (b) 異方性体の垂直変位 (1)

図 2-3 (c) 異方性体の垂直変位 (2)

図 2-4 (a) 等方性体の σ_z 図 2-4 (b) 異方性体の σ_z (1) 図 2-4 (c) 異方性体の σ_z (2)

の弾性係数について、ひずみエネルギー正值の条件と、支配方程式が楕円型となる条件に適合するもので計算したものが図 2-2 (a)～図 2-7 (c) である。これらの結果より、等方性弾性体と Transversely-isotropy では、 r/z が 1.0 以下の値を持つ時に性質の相違が顕著であり、ポアソン比の影響より、弾性係数個々の値の変化に影響され、特に、せん断剛性の値は応力、変位に大きな影響を与えることから、弾性係数の値は重要となる。

また、Boussinesq の解を応用して種々の荷重状態における地中応力を求めることができる。それについては次報で述べる。

尚、本論文の計算は、名古屋大学大型計算機センターの FACOM 230-60、中部工業大学計算機センターの FACOM 270-20/30 を利用して行なった。

図 2-5 (a) 剛性変化に対する水平変位

図 2-7 (a) 異方性体の等応力線図 (1)

図 2-5 (b) r の変化に対する水平変位

図 2-7 (b) 異方性体の等応力線図 (2)

図 2-6 剛性変化に対する σ_r

図 2-7 (c) 剛性変化に対する等応力線図

参考文献

- 2) Boussinesq, J. : Applications des potentiels á l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides elastique. Paris : Gauthier-Villars, 1885.
- 10) Michell, J.H. : The Stress Distribution in an Aelotropic Solid with Infinite Boundary Plane, Proc. London Math. Soc., Vol. 32, 1900.
- 11) Barden, M. : Stresses and Displacements in a Cross-anisotropic Soil, Géotechnique, Vol. 13, No. 3, 1963.
- 12) Wolf, K. : Ausbreitung der Kraft in der halbebene und in halbraum bei anisotropen material, Z. Angert. Math. Mech., Vol. 15, 1935.
- 22) 大崎順彦 : 基礎構造, 建築構造講座 11 卷, コロナ社.
- 23) H.G. Poulos and E.H. Davis : Elastic solutions for soil and rock mechanics, John wiley & Sons, Inc., New York. London. Sydney. Toronth, 1974.
- 24) 松岡 理, 勅使川原誠司 : TRANSVERSELY-ISOTROPY の集中荷重の問題 (その 1 基本解), 日本建築学会論文報告集 第 256 号 昭和 52 年 6 月.
- 25) 勅使川原誠司, 松岡 理 : TRANSVERSELY-ISOTROPY の集中荷重解の性状について (Boussinesq の解による地中応力—その 1), 建築学会大会 学術講演梗概集, 昭和 51 年 10 月.
- 26) Harr, M.E. : Foundations of theoretical soil mechanics. McGraw Hill, New York, 1966.
- 27) Florin, V.A. : Fundamentals of Soil Mechanics, vols. 1 and 2, Gosstroizdat, Moscow, 1959, 1961.

SYNOPSIS

U.D.C. 624.043

PROBLEMS OF CONCENTRATED FORCES ACTING ON A TRANSVERSELY-ISOTROPY

(Part II) Boussinesq's problem

by Dr. DSAMU MATSUOKA Pro. of Nagoya Univ., and SEIJI
TESHIGAWARA Research Assistant of Chubu Institute of
Tech., Members of A.I.J.

This paper is concerned with the solution of Boussinesq's problem for a transversely-isotropy.

This problem can be solved by superposition of fundamental solution and two solutions obtained by synthesis of nuclei of strain, which are symmetrical about rolling axis.

And the authors show some numerical results of this solution.