等分布荷重を受ける有孔弾性平板の 曲げに関する解析的研究

第1報 偏心円孔を有する正方形弾性平板

正会員 岩 原 昭 次*

§ 1. 緒 言

開孔を有する弾性平板に面外荷重が作用すると、周知の如く、応力集中が開孔部近傍に起きる。開孔を有する無限弾性平板の応力集中については、既往の研究から、定量的かつ定性的な結果が報告されているが、開孔を有する有限弾性平板（有孔弾性平板^(注1)）の応力集中の程度及び分布域等を含めた曲げ性状は開孔の形状、大きさ及び位置等の諸要因により大きく異なり、定量的にはいまだ不明の点が多い。

この研究は、外力として等分布荷重を扱い、円孔や矩形孔等の開孔をもつ有孔弾性平板の、応力集中をも含めた曲げ性状を解析的に明らかにし、かつその資料を得ることを目的とする。

開孔を有する無限弾性平板の応力集中問題に対して、Savin¹⁾ や山崎等²⁾の研究に見られるように、Mushkelishvili 法が多々適用されている。その場合における此の解法の特徴は、写像関数を媒介として開孔縁を単位円周上に写し、その円周に関する一境界値問題に帰着させる点にある。

本研究では、上述の解法を更に拡張させて、有孔弾性平板という複連結領域問題の解析に適用した。即ち、外部周辺が単位円周上に、開孔縁が単位円半径より小さいある半径の円周上に写されるような写像関数を作成し、有孔弾性平板の内外部周辺の境界値問題を円環領域の境界値問題に帰着させ、これに Mushkelishvili 法を展開した。この解法は、既往の研究で適用されている有限要素法^{3)~7)}、差分法^{8), 9)}、フーリエ級数法^{10), 11)}（たわみの一般式をフーリエ級数で表示する方法）及び選点法^{12), 13)}と較べて、次のような特徴をもつ。

(1) たわみの一般表示式が二つの複素応力関数によって一意的に表わされるため、境界条件式を解くのに一貫した手法が適用できる。

(2) たわみ・曲げモーメント等の諸数値は、内外部

境界条件共厳密に解くため、精度良く求まる。

(3) 演算は若干繁雑となるが、巾級数の乗算が主であるので、機械的に行うことができる。

なお、開孔の大きさ及び開孔縁と外部周辺との板幅が板厚に比して十分大であると見做して、Poisson-Kirchhoff の仮定¹⁴⁾に基づく薄板曲げ理論を用いた。

第1報は、正方形の対角線上に偏心円孔を有する正方形弾性平板を扱い、円孔の大きさと位置の変化による曲げ形状を、次の諸点から解析的に明らかにする。

- (1) 平板全体の曲げモーメント・たわみ分布
- (2) 円孔縁の接線方向曲げモーメント分布
- (3) 平板の主要点の曲げモーメントとたわみ値
- (4) 円孔縁の曲げモーメントのポアソン比による影響

§ 2. 主な記号

D : 板剛度 $= Et^3/2(1-\nu^2)$

E : ヤング係数

ν : ポアソン比

t : 板厚

L : 正方形の一辺の長さ

r : 偏心円孔の半径

e : 正方形の中心から偏心円孔の中心までの距離

P : 単位面積当りに作用する荷重密度

w_0 : 等分布荷重が作用する時のたわみの基礎微分方程の特解

w : たわみ

θ_n, M_n, Q_n : 法線方向の回転角, 曲げモーメント, せん断力

θ_s, M_s, Q_s : 接線方向の回転角, 曲げモーメント, せん断力

M_{ns} : ねじりモーメント

$i = \sqrt{-1}$: 純虚数

$\zeta = \rho e^{i\theta}$: (ρ, θ) は ζ 平面の極座標

$\bar{\zeta} = \rho e^{-i\theta}$: ζ の共役な複素数

$\sigma = e^{i\theta}$: 平面の単位円周 ($|\zeta|=1$ の場合)

$\zeta_1 = \rho_1 e^{i\theta}$: ζ 平面の半径 ρ_1 の円の円周を表わす

* 東京都立大学 大学院生

(昭和53年9月4日本稿受理・討論期限昭和54年9月末日)

(注1) 開孔を有する弾性平板は、開孔を有する有限弾性平板と無限弾性平板とに大別されるが、ここでは単に前者を有孔弾性平板と呼ぶ。

$z(\zeta)$: 写像関数

μ : 正方形の大きさを決めるための実数定数

r : 偏心円孔の位置を決めるためのパラメータ

c_n : 写像関数の実数係数

$g(\zeta)$: 写像関数の一回微分の分数関数で $1/z'(\zeta)$

$e_n: g(\zeta)$ の実数係数

A_n, a_n, B_n, b_n, X, Y : 複素応力関数の未定係数

$\dot{A}_n, \dot{a}_n, \dot{X} = \mu A_n, \mu a_n, \mu^2 X$

§ 3. 写像関数 (図-1 参照)

ζ 平面の単位円内部とその中心 O_1 を ω 平面の単位円内部とその実軸上の任意点 r に移すような写像関数は (1) 式で示される。

$$\omega = (\zeta + r) / (r\zeta + 1) \quad (\text{但し, } |r| < 1) \quad \dots\dots (1)$$

(1) 式は ζ 平面の円環領域 R_1 を ω 平面の偏心円孔を有する領域 R_2 に写すことと同意味である。

また ω 平面の単位円内部とその中心 O_2 を Z 平面の正方形内部とその中心 O_3 に写す写像関数は Schwarz-Christoffel 変換を使って (2) 式となる。

$$Z = \int_0^\omega \frac{\mu}{\sqrt{1-\omega^4}} d\omega \quad \dots\dots (2)$$

その際、単位円内の O_2 を中心にもつ同心円群は、その半径が比較的小さい間は、正方形内部で近似的に O_3 を中心にもつ円と見做され得る閉曲線群を描く。この時、点 r は実軸上のある点 β に写される。

(1) 式を (2) 式に合成させると形式的に (3) 式のように表示できる。(3) 式より ζ 平面の領域 R_1 は Z 平

$$Z = z(\zeta) \quad \dots\dots (3)$$

面の領域 R_3 に写される。円周 S_1 の半径が比較的小さい間は正方形内の閉曲線 S_3 も近似的に円を描く。 S_3 が円と見做せられる時 (これを偏心円と称す)。その半径 r と中心 $(e, 0)$ は r と ρ_1 によって決まる。点 β は (r, e) に何等関係せず、解析には必要とされない。

(3) 式の中級数展開式は、まず (2) 式を (4) 式の上

$$Z = \mu \sum_{n=0}^{\infty} J_n \cdot \omega^{4n+1} \quad \dots\dots (4)$$

$$\text{但し, } J_0 = 1, J_n = \frac{(2n-1)!}{(4n+1)n! \cdot 2^n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

うに Taylor 展開し、この (4) 式に (1) 式を二項展開した (5) 式を代入することにより得られる。

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} (1-r^2)(-r)^{n-1} \cdot \zeta^n \quad \dots\dots (5)$$

即ち、(3) 式は形式的に (6) 式のような正巾級数の展開式となる。

$$Z = z(\zeta) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n \quad \dots\dots (6)$$

但し、 μ は

$$\frac{L}{\sqrt{2}} = \mu \int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^4}}$$

より、 $\mu = 0.53935 L$ となる。

一例として、 $r=0.4$ 、次数 n の最大項番号を 100 で

図-1 写像変換

図-2 写像図 ($r=0.4$)

打ち切った場合の (6) 式から得られる写像図を図-2 に示す。

偏心円の半径 r とその中心 $(e, 0)$ はパラメータ r と ρ_1 を種々変えることによって得られる写像図より決められる。ここでは、 $1 > r > 0$ とし、偏心円の中心は正側の対角線上にあるものとする (図-1 (3))。

図-3 に (r, e) と (r, ρ_1) の関係を示す。 r の値は近似的に偏心円を描く閉曲線 S_3 (図-1) 上の点の曲率半径を求めて、

$$\frac{\text{最大曲率半径} - \text{平均曲率半径}}{\text{平均曲率半径}} < 2\%$$

が満される時の平均曲率半径の値をとった。また、 e の値はその偏心円の中心から正方形の中心迄の距離をとった。

尚、 $dZ/d\zeta = z'(\zeta)$ の分数関数 $g(\zeta) = 1/z'(\zeta)$ の巾級数

$$g(\zeta) = \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} e_m \zeta^m \quad \dots\dots (7)$$

は次のようにして求められる。(6) 式と (7) 式とより、

$$\begin{aligned} g(\zeta) z'(\zeta) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \zeta^{n-1} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m (m-n+1) e_n c_{m-n+1} \cdot \zeta^m \end{aligned}$$

図-3 (r, e) と (r, ρ_1) の関係

ここで, $g(\zeta)z'(\zeta)=1$ だから

$$e_0 c_1 = 1, \sum_{n=0}^{m-1} (m-n+1) c_{m-n+1} \cdot e_n + c_1 e_m = 0$$

$$(m=1, 2, \dots)$$

これより, 次のように e_m が逐次求まる。

$$e_0 = 1/c_1, e_m = -e_0 \cdot \sum_{n=0}^{m-1} (m-n+1) c_{m-n+1} \cdot e_n$$

$$(m=1, 2, \dots)$$

§ 4. 複素応力関数

有孔弾性平板のような複連結領域での複素応力関数の一般形は Laurent 級数と喰違いを考慮した多価項とより構成される。また平板の内周辺上のある一点と外周辺上のある一点とを結ぶ切断面において, 断面力 (曲げモーメント・せん断力), たわみ及び回転角は一価連続であることが要求されるが^{(16), (17)}, ここではそれらを満たす関数として次式を採用。

$$\begin{cases} \phi'(Z) = \phi(\zeta) = X \left(\log \zeta + \frac{z(\zeta)g(\zeta)}{\zeta} \right) + \phi_*(\zeta) \\ \psi(Z) = \psi(\zeta) = Y \left(\log \zeta + \frac{z(\zeta)g(\zeta)}{\zeta} \right) + \psi_*(\zeta) \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots (8. a)$$

$$\dots\dots\dots (8. b)$$

但し,

$$\begin{cases} \phi_*(\zeta) = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n} \right) \dots\dots\dots (9. a) \\ \psi_*(\zeta) = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\zeta^n} \right) \dots\dots\dots (9. b) \end{cases}$$

ここで, Y は, 回転角に関する喰違いが起らないという条件から $Y = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n a_n$ と定めることができる。

$\phi(Z)$ と $\psi(Z)$ は (8) 式及び (9) 式より次のようになる。

$$\begin{cases} \phi(Z) = \int \phi'(Z) dZ = \int \phi(\zeta) z'(\zeta) d\zeta \\ = X z(\zeta) \log \zeta + z(\zeta) \phi_*(\zeta) - \int \phi'_*(\zeta) z(\zeta) d\zeta \\ = X z(\zeta) \log \zeta + Y \log \zeta + \phi_*(\zeta) \\ \dots\dots\dots (10. a) \\ \psi(Z) = Y z(\zeta) \log \zeta + W \log \zeta + \psi_*(\zeta) \dots\dots\dots (10. b) \end{cases}$$

但し,

$$\begin{cases} \phi_*(\zeta) = c_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ c_m A_0 + \sum_{n=1}^m \frac{m-n}{m} \right. \\ \times c_{m-n} \cdot A_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+n}{m} c_{m+n} \cdot a_n \left. \right\} \zeta^m \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{m} c_{n-1} \cdot a_{m+n-1} \cdot \frac{1}{\zeta^m} \\ \dots\dots\dots (11. a) \\ \psi_*(\zeta) = c_0 B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n B_n + \text{Const} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ c_m B_0 + \sum_{n=1}^m \right. \\ \times \frac{m-n}{m} c_{m-n} \cdot B_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+n}{m} c_{m+n} \cdot b_n \left. \right\} \zeta^m \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{m} c_{n-1} \cdot b_{m+n-1} \cdot \frac{1}{\zeta^m} \\ \dots\dots\dots (11. b) \end{cases}$$

ここで, $W = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n b_n$, Const は $\psi_*(\zeta)$ の積分定数である。 $\phi_*(\zeta)$ の積分定数は 0 とした。

$\phi''(Z)$ と $\psi''(Z)$ は次の通り。

$$\begin{cases} \phi''(Z) = X g(\zeta) \left\{ \frac{2}{\zeta} + \frac{g'(\zeta)z(\zeta)}{\zeta} - \frac{g(\zeta)z(\zeta)}{\zeta^2} \right. \\ \left. + g(\zeta) \phi'_*(\zeta) \right\} \dots\dots\dots (12. a) \\ \psi''(Z) = Y g(\zeta) \left\{ \frac{2}{\zeta} + \frac{g'(\zeta)z(\zeta)}{\zeta} - \frac{g(\zeta)z(\zeta)}{\zeta^2} \right. \\ \left. + g(\zeta) \psi'_*(\zeta) \right\} \dots\dots\dots (12. b) \end{cases}$$

尚, 写像関数及び複素応力関数の係数は全て実数であるので, 夫々の共役な関数 $\bar{z}(\bar{\zeta})$, $\bar{g}(\bar{\zeta})$ 及び $\bar{\phi}_*(\bar{\zeta})$ 等に対し,

$$\bar{z}(\bar{\zeta}) = z(\zeta), \bar{g}(\bar{\zeta}) = g(\zeta), \bar{\phi}_*(\bar{\zeta}) = \phi_*(\zeta) \dots\dots (13)$$

等の関係が成立する。

§ 5. たわみと断面力の複素表示 (図-4 参照)

等分布荷重 P を受ける場合, たわみは複素応力関数を用いれば次式で示される。

$$Dw = w_0 + \frac{1}{2} \{ Z \bar{\phi}(\bar{Z}) + \bar{Z} \phi(Z) + \psi(Z) + \bar{\psi}(\bar{Z}) \}$$

$$\dots\dots\dots (14)$$

但し,

$$w_0 = \frac{P}{64} Z^2 \cdot \bar{Z}^2 \dots\dots\dots (15)$$

図-4 座標変換

Z 平面の (n, s) 曲線座標系での回転角及び断面力の複素表示は次式である。

$$\left\{ \begin{aligned} D(\theta_n - i\theta_s) &= \left\{ \bar{Z}\Phi'(Z) + \bar{\Phi}(\bar{Z}) + \Psi'(Z) + 2\frac{\partial w_0}{\partial Z} \right\} \\ &\quad \times e^{i\phi} \\ M_n + M_s &= -(1+\nu) \left\{ 2[\Phi'(Z) + \bar{\Phi}'(\bar{Z})] + 4\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z\partial \bar{Z}} \right\} \\ M_s - M_n + i2M_{ns} &= (1-\nu) \left\{ 2[\bar{Z}\Phi''(Z) + \Psi''(Z)] \right. \\ &\quad \left. + 4\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} \right\} e^{i2\phi} \\ M_n - iM_{ns} &= -\{(1+\nu)[\Phi'(Z) + \bar{\Phi}'(\bar{Z})] \\ &\quad + (1-\nu)[\bar{Z}\Phi''(Z) + \Psi''(Z)]e^{i2\phi}\} \\ &\quad - 2\left\{ (1+\nu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z\partial \bar{Z}} + (1-\nu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} \cdot e^{i2\phi} \right\} \\ Q_n - iQ_s &= -4\left\{ \Phi''(Z) + 2\frac{\partial^3 w_0}{\partial Z^2\partial \bar{Z}} \right\} e^{i\phi} \end{aligned} \right.$$

前式に写像関数 (3) 式が導入されると, (8) 式, (10) 式より次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} D(\theta_n - i\theta_s) &= \left\{ \bar{z}(\bar{\zeta})\varphi(\zeta) + \int \bar{\varphi}(\bar{\zeta})\bar{z}'(\bar{\zeta})d\bar{\zeta} + \psi(\zeta) \right. \\ &\quad \left. + 2\frac{\partial w_0}{\partial Z} \right\} e^{i\phi} \dots\dots\dots (16. a) \\ M_n + M_s &= -(1+\nu) \left\{ 2[\varphi(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta})] + 4\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z\partial \bar{Z}} \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots (16. b) \\ M_s - M_n + i2M_{ns} &= (1-\nu) \left\{ 2[\bar{z}(\bar{\zeta})g(\zeta)\varphi'(\zeta) \right. \\ &\quad \left. + g(\zeta)\psi'(\zeta)] + 4\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} \right\} e^{i2\phi} \dots\dots\dots (16. c) \\ M_n - iM_{ns} &= -\left\{ (1+\nu)[\varphi(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta})] \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu)[\bar{z}(\bar{\zeta})\varphi'(\zeta) + \psi'(\zeta)]\bar{g}(\bar{\zeta})\frac{\zeta^2}{\rho^2} \right\} \\ &\quad - 2\left\{ (1+\nu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z\partial \bar{Z}} + (1-\nu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} \frac{\bar{g}(\bar{\zeta})}{g(\zeta)}\frac{\zeta^2}{\rho^2} \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots (16. d) \\ Q_n - iQ_s &= -4\left\{ g(\zeta)\varphi'(\zeta) + 2\frac{\partial^3 w_0}{\partial Z^2\partial \bar{Z}} \right\} e^{i\phi} \\ &\quad \dots\dots\dots (16. e) \end{aligned} \right.$$

但し, $e^{i\phi}$ と $e^{i2\phi}$ は次式である。

$$e^{i\phi} = \frac{z'(\zeta)}{|z'(\zeta)|} \frac{\zeta}{\rho} = \frac{|g(\zeta)|}{g(\zeta)} \frac{\zeta}{\rho}, \quad e^{i2\phi} = \frac{\bar{g}(\bar{\zeta})}{g(\zeta)} \frac{\zeta^2}{\rho^2}.$$

また (15) 式より

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial Z} &= \frac{P}{32} Z \cdot \bar{Z}^2, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z\partial \bar{Z}} = \frac{P}{16} Z \cdot \bar{Z} \dots\dots (17. a, b) \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} &= \frac{P}{32} \bar{Z}^2, \quad \frac{\partial^3 w_0}{\partial Z^2\partial \bar{Z}} = \frac{P}{16} \bar{Z} \dots\dots (17. c, d) \end{aligned} \right.$$

である。

§ 6. 境界条件式

6.1 外周辺固定支持条件: Z 平面の境界辺 $Z=Z_1$ 上で $\theta_n + i\theta_s = 0$, 及び境界辺上のある一点 $Z=Z_0$ のたわみについて $w(Z_0) = 0$ である。この条件式の関数表示

は (18. a, b) 式であり, $Z=Z_1$ が ζ 平面の単位円周 $\zeta = \sigma$ に対応する時には (19. a, b) 式に変換される。(19. b) 式で, Z_0 に対応する点として $\zeta=1$ を採っている。またこの式は $\Psi(Z)$ の積分定数を Const 決定する為に用いられる。

$$\left\{ \begin{aligned} Z_1\bar{\Phi}'(\bar{Z}) + \Phi(Z_1) + \bar{\Psi}'(\bar{Z}) &= -2\frac{\partial w_0}{\partial \bar{Z}} \Big|_{Z=Z_1} \\ &\dots\dots\dots (18. a) \\ w(Z_0) &= 0 \dots\dots\dots (18. b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} X\sigma g(1/\sigma)z(\sigma)z(1/\sigma) + Y\sigma g(1/\sigma)z(1/\sigma) \\ + z(\sigma)\varphi_*(1/\sigma) + \Phi_*(\sigma) + \psi_*(1/\sigma) &= -2\frac{\partial w_0}{\partial \bar{Z}} \Big|_{\zeta=\sigma} \\ &\dots\dots\dots (19. a) \\ w(1) &= 0 \dots\dots\dots (19. b) \end{aligned} \right.$$

6.2 外周辺単純支持条件: 直線分で示される境界辺 $Z=Z_1$ 上でのたわみと曲げモーメントについて, $w=0$ 及び $M_n + M_s = 0$ 。その関数表示は (20. a, b) 式であり, $Z=Z_1$ が $\zeta=\sigma$ に対応する時には (21. a, b) 式に変換される。

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi'(Z_1) + \bar{\Phi}'(\bar{Z}_1) &= -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z\partial \bar{Z}} \Big|_{Z=Z_1} \dots\dots\dots (20. a) \\ \bar{Z}_1\Phi(Z_1) + Z_1\bar{\Phi}(\bar{Z}_1) + \Psi(Z_1) + \bar{\Psi}(\bar{Z}_1) \\ &= -2w_0|_{Z=Z_1} \dots\dots\dots (20. b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} X\{g(\sigma)z(\sigma)/\sigma + \sigma g(1/\sigma)z(1/\sigma)\} + \varphi_*(\sigma) + \varphi_*(1/\sigma) \\ &= -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z\partial \bar{Z}} \Big|_{\zeta=\sigma} \dots\dots\dots (21. a) \\ z(1/\sigma)\Phi_*(\sigma) + z(\sigma)\Phi_*(1/\sigma) + \psi_*(\sigma) + \psi_*(1/\sigma) \\ &= -2w_0|_{\zeta=\sigma} \dots\dots\dots (21. b) \end{aligned} \right.$$

6.3 内周辺自由境界条件: 内周辺の境界 $Z=Z_2$ 上で法線方向の曲げモーメント M_n と換算せん断力 V_n に対し, $M_n - i\int V_n ds = 0$ 。この式の関数表示は (22) 式である。

$$\begin{aligned} &\Phi'(Z_2) - \frac{3+\nu}{1-\nu}\bar{\Phi}'(\bar{Z}_2) - \{Z_2\Phi''(Z_2) + \Psi''(Z_2)\}e^{i2\phi} \\ &= 2\left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z\partial \bar{Z}} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} \cdot e^{i2\phi} \right\} \Big|_{Z=Z_2} \\ &\quad - \frac{P}{4(1-\nu)} \left(\int^{\Gamma} \bar{Z} dZ - \int^{\Gamma} Z d\bar{Z} \right) \Big|_{Z=Z_2} \dots\dots (22) \end{aligned}$$

但し, Γ は内周辺上を一周する積分路を示す。

$Z=Z_2$ が ζ 平面でのある円周 $\zeta=\zeta_1$ ($\zeta_1=\rho_1 e^{i\theta}$, $\rho_1 <$

1) に対応する時, (23) 式が誘導できる。

$$\begin{aligned} &X \left[\log \zeta_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu} \log \bar{\zeta}_1 + \frac{g(\zeta_1)z(\zeta_1)}{\zeta_1} \left(1 + \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{5-\nu}{1-\nu} \cdot \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} \right] - X \cdot \frac{1}{g(\zeta_1)} \{g'(\zeta_1)g(\zeta_1)\} \\ &\quad \times \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} \cdot z(\zeta_1) - Y \cdot \frac{1}{g(\zeta_1)} \left[\frac{g(\bar{\zeta}_1)g(\zeta_1)}{\bar{\zeta}_1} \right. \\ &\quad \times \left(2 - \frac{g(\zeta_1)z(\zeta_1)}{\zeta_1} \right) + \{g'(\zeta_1)g(\zeta_1)\} \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} \Big] \\ &\quad + \varphi_*(\zeta_1) - \frac{3+\nu}{1-\nu} \varphi_*(\bar{\zeta}_1) - \{z(\bar{\zeta}_1)\varphi'_*(\bar{\zeta}_1) + \psi_*(\zeta_1)\} \end{aligned}$$

$$\times g(\zeta_1) \frac{\zeta_1}{\zeta_1} = 2 \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z \partial \bar{Z}} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} \frac{g(\zeta_1)}{g(\zeta_1)} \frac{\zeta_1}{\zeta_1} \right\} \Big|_{\zeta=\zeta_1} \\ - \frac{P}{4(1-\nu)} \left(\int_{\Gamma'} \bar{Z} dZ - \int_{\Gamma'} Z d\bar{Z} \right) \Big|_{\zeta=\zeta_1} \dots\dots\dots (23)$$

但し、 Γ' は Γ に対応する ζ 平面での積分路である。
尚、各境界条件で、(18) 式から (19) 式への変換等に際して、(13) 式の関係が用いられている。

§ 7. 境界条件式の展開

はじめに、多価項の未定係数値 X を求める。(23) 式より単独に決めることができる。

$$\int_{\Gamma'} \bar{Z} dZ = \int_{\Gamma'} z(\rho^2/\zeta) z'(\zeta) d\zeta$$

の積分路 Γ' は ζ 平面の $|\zeta_1| = \rho_1$ で表わされる円周上を路にとる。 $\rho = \text{定数}$ 、 ζ は ρ に無関係な独立変数とし、積分後に $|\zeta_1| = \rho_1$ を代入するものとする。これにより前式は、

$$\int_{\Gamma'} z(\rho^2/\zeta) z'(\zeta) d\zeta = \mu^2 \int_{\Gamma'} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \rho_1^{2n}}{\rho^n} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \zeta^{n-1} \right) d\zeta \\ = \mu^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+n}{m} c_n c_{m+n} \cdot \rho_1^{2n} \cdot \zeta_1^m + \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2 \rho_1^{2n} \right) \right. \\ \left. \times \log \zeta_1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{m} \cdot c_n c_{m+n} \cdot \rho_1^{2(m+n)} \cdot \frac{1}{\zeta_1^m} \right\} \\ \int_{\Gamma} Z d\bar{Z} \text{ は } \int_{\Gamma'} \bar{Z} dZ \text{ の共役な関数であるから、} \\ \int_{\Gamma} \bar{Z} dZ - \int_{\Gamma'} Z d\bar{Z} = \mu^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+n}{m} c_n c_{m+n} \cdot \rho_1^{2n} \cdot \zeta_1^m \right. \\ \left. + i\theta \cdot 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2 \cdot \rho_1^{2n} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+2n}{m} \right. \\ \left. \times c_n c_{m+n} \cdot \rho_1^{2(m+n)} \cdot \frac{1}{\zeta_1^m} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

(23) 式では θ の項は消去されねばならないから、左辺と右辺の θ に関する項を等置すると、 X は (25) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{P\mu^2}{8} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2 \rho_1^{2n} \right) \\ \text{あるいは} \\ X &= -\frac{P\mu^2}{8} \cdot \bar{X} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

但し、 $\bar{X} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2 \cdot \rho_1^{2n}$ である。

次に、各境界条件式中における w_0 の導関数は以下の様に巾級数展開される。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z \partial \bar{Z}} \Big|_{\zeta=\sigma} &= \frac{P}{16} z(\sigma) z(1/\sigma) = \frac{P\mu^2}{16} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sigma^n \right) \\ &\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sigma^n} \right) = \frac{P\mu^2}{16} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \sigma^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{\sigma^m} \right) \\ &\dots\dots\dots (26. a) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z \partial \bar{Z}} \Big|_{\zeta=\zeta_1} &= \frac{P}{16} z(\zeta_1) z(\rho_1^2/\zeta_1) \\ &= \frac{P\mu^2}{16} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \right) \\ &\dots\dots\dots (26. b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial \bar{Z}} \Big|_{\zeta=\sigma} &= \frac{P}{32} z(\sigma)^2 \cdot z(1/\sigma) = \frac{P}{32} z(\sigma) \cdot z(\sigma) z(1/\sigma) \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{P\mu^3}{32} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sigma^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{\sigma^m} \right) \dots\dots\dots (26. c)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} \Big|_{\zeta=\zeta_1} &= \frac{P}{32} z(\rho_1^2/\zeta_1)^2 = \frac{P\mu^2}{32} \sum_{m=0}^{\infty} r_m \cdot \frac{\rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \\ &\dots\dots\dots (26. d) \end{aligned} \right.$$

但し、

$$\epsilon_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{m+n}, \quad \lambda_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{m+n} \cdot \rho_1^{2n}, \\ \alpha_m = \sum_{n=0}^m \epsilon_n c_{m-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n c_{m+n}, \quad \beta_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \cdot \epsilon_{m+n-1}, \\ r_m = \sum_{n=0}^m c_n c_{m-n}$$

7.1 (19) 式の展開：(19.a) 式中の諸関数の積は (6)

式、(7) 式及び (9.a) 式から、次の乗算ができる。

$$z(\sigma) \varphi_*(1/\sigma) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sigma^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\sigma^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sigma^n \right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} A_n + \sum_{n=1}^m c_{n-1} \cdot a_{m-n+1} \right) \sigma^m \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n A_{m+n}}{\sigma^m} \dots\dots\dots (27)$$

$$\sigma g(1/\sigma) z(\sigma) z(1/\sigma) = \mu \left(e_0 \epsilon_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e_{n+1} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_{m+n-1} \cdot e_n \sigma^m + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e_{m+n+1} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{m+1} e_{n-1} \cdot \epsilon_{m-n+2} \right) \frac{1}{\sigma^m} \right) \dots\dots\dots (28)$$

$$\sigma g(1/\sigma) z(1/\sigma) = (e_0 c_0) \sigma + (e_1 c_0 + e_0 c_1) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m+1} \frac{c_n e_{m-n+1}}{\sigma^m} \dots\dots\dots (29)$$

(19.a) 式に (9.b), (11.a), (26.c), (28) 及び (29) の諸式を入れて、整理し、係数比較を行う (注2) と、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} B_0 &= -\frac{P\mu^4}{16} \alpha_0 - \left\{ \dot{X} \left(e_0 \epsilon_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e_{n+1} \right) + \dot{Y} (e_1 c_0 + e_0 c_1) \right. \\ &\quad \left. + 2 c_0 \dot{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \dot{A}_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \dot{a}_n \right\} \dots\dots\dots (20. a) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_m &= -\frac{P\mu^4}{16} \beta_m - \left\{ \dot{X} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e_{m+n+1} + \sum_{n=1}^{m+1} e_{n-1} \cdot \epsilon_{m-n+2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dot{Y} \left(\sum_{n=0}^{m+1} c_n e_{m-n+1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \dot{A}_{m+n} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{m} c_n \dot{a}_{m+n} \right\} \quad (m=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (30. b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_1 &= -\frac{P\mu^4}{16} \alpha_1 - \left\{ \dot{X} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e_n \right) + \dot{Y} e_0 c_0 + 2 c_1 \dot{A}_0 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} \dot{A}_n + c_0 \dot{a}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_{n+1} \dot{a}_n \right\} \\ &\dots\dots\dots (30. c) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_m &= -\frac{P\mu^4}{16} \alpha_m - \left\{ \dot{X} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n \epsilon_{m+n-1} \right) + 2 c_m \dot{A}_0 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} c_{m+n} \dot{A}_n + \sum_{n=1}^m \frac{m-n}{m} c_{m-n} \cdot \dot{A}_n \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+n}{m} c_{m+n} \dot{a}_n + \sum_{n=1}^m c_{n-1} \dot{a}_{m-n+1} \right\} \\ &\quad (m=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (30. d) \end{aligned} \right.$$

(注 2) 巾級数表示の方程式を恒等的に満足させるために、各次数の係数を 0 とおく演算方法 (文献 15))。

但し, $\dot{X} = \mu^2 X$, $\dot{Y} = \mu Y$, $\dot{A}_m = \mu A_m$, $\dot{a}_m = \mu a_m$ である。

次に, (19.b) 式については, (10.a) 式及び (10.b) 式を入れると,

$$z(1)\phi_*(1) + \psi_*(1) + w_0|_{\zeta=1} = 0$$

となるから, これに (11.a, b) 式を入れて積分定数 Const を演算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Const} = & -\frac{P\mu^4}{16} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \right)^4 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \right) \\ & \times \left\{ c_0 \dot{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \dot{a}_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_m \dot{A}_0 + \sum_{n=1}^m \frac{m-n}{m} c_{m-n} \dot{A}_n \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m+n}{m} c_{m+n} \dot{a}_n + \frac{1-n}{m} c_{n-1} \dot{a}_{m+n-1} \right) \right] \right\} \\ & - \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \right) B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^m \frac{m-n}{m} c_{m-n} B_n \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m+n}{m} c_{m+n} b_n + \frac{1-n}{m} c_{n-1} b_{m+n-1} \right) \right] \right\} \\ & \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

7.2 (21) 式の展開: (21.a) 式の第1項は

$$g(\sigma)z(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m \sigma^m \dots\dots\dots (32)$$

但し, $v_m = \sum_{n=0}^m c_{m-n} e_n$

とおけば,

$$\frac{g(\sigma)z(\sigma)}{\sigma} + \sigma g(1/\sigma)z(1/\sigma) = 2v_1 + (v_0 + v_2)\sigma$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} v_{m+1} \sigma^m + (v_0 + v_2) \frac{1}{\sigma} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{v_{m+1}}{\sigma^m}$$

上式で正巾級数と負巾級数との同一次数の係数は等しいから, 負巾級数の項を省略して次のように表わす。

$$\left\langle \frac{g(\sigma)z(\sigma)}{\sigma} + \sigma g(1/\sigma)z(1/\sigma) \right\rangle = 2v_1 + (v_0 + v_2)\sigma + \sum_{m=2}^{\infty} v_{m+1} \sigma^m \dots\dots\dots (33)$$

左辺の $\langle \rangle$ は0次と正巾級数の項のみを記すことを意味する。同様に, (26.a) 式及び (9.a) 式より,

$$\left\langle \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z \partial \bar{Z}} \right\rangle_{\zeta=\sigma} = \frac{P\mu^2}{16} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sigma^m \dots\dots\dots (34)$$

$$\langle \varphi_*(\sigma) + \varphi_*(1/\sigma) \rangle = \frac{1}{\mu} \left\{ 2A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + a_m) \sigma^m \right\} \dots\dots\dots (35)$$

となるから, (33)~(35) 式を (21.a) 式に入れて整理し, 係数比較すると次のようになる。

$$\begin{cases} \dot{A}_0 = \frac{P\mu^4}{16} (-\varepsilon_0 + 2v_1 \bar{X}) \dots\dots\dots (36.a) \\ \dot{A}_1 = \frac{P\mu^4}{8} \{-\varepsilon_1 + (v_0 + v_2) \bar{X}\} - \dot{a}_1 \dots\dots\dots (36.b) \\ \dot{A}_m = \frac{P\mu^4}{8} (-\varepsilon_m + v_{m+1} \bar{X}) - \dot{a}_m \quad (m=2, 3, \dots) \dots\dots\dots (36.c) \end{cases}$$

次に (21.b) 式に

$$\begin{aligned} \left\langle z(1/\sigma) \phi_*(\sigma) + z(\sigma) \phi_*(1/\sigma) \right\rangle = & 2 \left\{ \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \right) \dot{A}_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{l} c_n c_{l+n} \dot{A}_l + \sum_{l=1}^{\infty} \left(c_0 c_l + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l+n}{n} c_n c_{l+n} \right) \dot{a}_l \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{k+n} \right) \dot{A}_0 + \sum_{l=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k-l+n}{k+n} c_n c_{k-l+n} \dot{A}_l + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{l+n} c_n c_{k+l+n} \dot{A}_l \right. \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{k+l+n} c_n c_{l+n} \dot{A}_{k+l} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{k+l}{k} c_0 c_{k+l} + c_k c_l + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k+l+n}{k+n} c_n c_{k+l+n} + \frac{l+n}{n} c_{k+n} c_{l+n} \right) \right] \dot{a}_l \\ & \left. \left. - \sum_{l=2}^{k+1} \sum_{n=1}^{l-1} \frac{n}{l-n} c_n c_{k-l+n} \dot{a}_l - \sum_{l=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{l+n}{k-n+1} c_{n-1} c_{l+n} \dot{a}_{k+l+1} \right\} \sigma^k \right. \\ \left\langle \Psi_*(\sigma) + \Psi_*(1/\sigma) \right\rangle = & 2 \left(c_0 B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n + \text{Const} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k B_0 + \sum_{l=1}^k \frac{k-l}{k} c_{k-l} B_l + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{k+l}{k} c_{k+l} b_l \right. \\ & \left. - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{k} c_l b_{k+l} \right) \sigma^k \\ \left\langle z(\sigma)^2 z(1/\sigma)^2 \right\rangle = & \mu^4 \left\{ \left(\varepsilon_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^k \varepsilon_n \varepsilon_{k-n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_{k+n} \right) \sigma^k \right\} \end{aligned}$$

を入れて係数比較すると, 次の一群の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \right) \dot{A}_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n c_{n+1} \right) \dot{A}_1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{l} c_n c_{l+n} \dot{A}_l + \sum_{l=1}^{\infty} \left(c_0 c_l + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l+n}{n} c_n c_{l+n} \right) \dot{a}_l \right. \\ \left. + c_0 B_0 + \sum_{l=1}^{\infty} c_l b_l + \text{Const} = \frac{P\mu^4}{64} \left(\varepsilon_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 \right) \dots\dots\dots (37.a) \right. \\ 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n+1} \right) \dot{A}_0 + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (c_n + c_{n+2}) c_n \right\} \dot{A}_1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{l+n} (c_{l+n+1} + c_{l+n-1}) c_n \dot{A}_l + \left\{ 2 c_0 c_2 + c_1^2 \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} c_n c_{n+2} + \frac{n+1}{n} c_{n+1}^2 \right) \right\} \dot{a}_1 + \left\{ 3 c_0 c_3 + c_1 c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+1} c_n c_{n+3} + \frac{n+2}{n} c_{n+1} c_{n+2} \right) - c_0 c_1 \right\} \dot{a}_2 \\ + \sum_{l=3}^{\infty} \left\{ (l+1) c_0 c_{l+1} - (l-1) c_0 c_{l-1} + c_1 c_l + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l+n+1}{n+1} c_n c_{l+n+1} + \frac{l+n}{n} c_{n+1} c_{l+n} \right) \right\} \dot{a}_l + c_1 B_0 + 2 c_2 b_1 \\ + \sum_{l=2}^{\infty} \{ (l+1) c_{l+1} - (l-1) c_{l-1} \} b_l = -\frac{P\mu^4}{16} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} \right) \dots\dots\dots (37.b) \right. \\ 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{k+n} \right) \dot{A}_0 + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k+n-1}{k+n} c_n c_{k+n-1} + \frac{n+1}{n+2} c_{n+1} c_{k+n+2} \right) \right\} \dot{A}_1 + \sum_{l=2}^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k-l+n}{k+n} c_n c_{k-l+n} \dot{A}_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{l+n} c_n c_{k+l+n} \dot{A}_l + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k+l+n} c_n c_{l+n} \dot{A}_{k+l} + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{k+l}{k} c_0 c_{k+l} + c_k c_0 \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k+l+n}{k+n} c_n c_{k+l+n} + \frac{l+n}{n} c_{k+n} c_{l+n} \right) \dot{A}_l - \sum_{l=2}^{k+1} \sum_{n=1}^{l-1} \frac{n}{l-n} c_n c_{k-l+n} \dot{A}_l - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \frac{l+n}{k+n-1} c_{n-1} c_{l+n} \dot{A}_{k+l+1} \\
& + c_k B_0 + \sum_{l=1}^k \frac{k-l}{k} c_{k-l} B_l + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{k+l}{k} c_{k+l} b_l - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{k} c_l b_{k+l} = -\frac{P\mu^4}{32} \left(\sum_{n=0}^k \varepsilon_n \varepsilon_{k-n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_{k+n} \right) \\
& (k=2, 3, 4, \dots) \dots\dots\dots (37. c)
\end{aligned}$$

前式で (37. a) 式は積分定数 Const を決めるのに用いる。

7.3 (23) 式の展開: (23) 式に (24) 式を入れ, 両辺に $g(\zeta_1)$ を乗じると次式を得る。

$$-YG(\zeta_1) + g(\zeta_1)\varphi_*(\zeta_1) - \frac{3+\nu}{1-\nu} g(\zeta_1)\varphi_*(\bar{\zeta}_1) - \{z(\bar{\zeta}_1)\varphi_*'(\zeta_1) + \varphi_*'(\zeta_1)\}g(\zeta_1)g(\bar{\zeta}_1) \frac{\zeta_1}{\bar{\zeta}_1} = Q(\zeta_1) \dots\dots\dots (38)$$

但し, $G(\zeta_1)$ 及び $Q(\zeta_1)$ は次の通りである。

$$G(\zeta_1) = \frac{g(\bar{\zeta}_1)g(\zeta_1)}{\bar{\zeta}_1} \left(2 - \frac{g(\zeta_1)z(\zeta_1)}{\zeta_1} \right) + g'(\zeta_1)g(\zeta_1) \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\zeta_1)}{\bar{\zeta}_1} \dots\dots\dots (39. a)$$

$$\begin{aligned}
Q(\zeta_1) = & 2 \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z \partial \bar{Z}} g(\zeta) + \frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} g(\bar{\zeta}) \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right\}_{\zeta=\zeta_1} + g(\zeta_1) \left[-\frac{P\mu^2}{4(1-\nu)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+2n}{m} c_n c_{m+n} \rho_1^{2n} \zeta_1^m \right. \right. \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+2n}{m} c_n c_{m+n} \frac{\rho_1^{2(m+n)}}{\zeta_1^m} \left. \right\} - X \left\{ -2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \log \rho_1 + \frac{g(\zeta_1)z(\zeta_1)}{\zeta_1} \left(1 + \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} \right) \right. \\
& \left. \left. - \frac{5-\nu}{1-\nu} \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} \right\} \right] + X g'(\zeta_1)g(\bar{\zeta}_1) \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} \cdot z(\zeta_1) \dots\dots\dots (39. b)
\end{aligned}$$

$G(\zeta_1)$ と $Q(\zeta_1)$ は次の諸展開式を用いて求める。

$$\begin{cases} g(\zeta_1)z(\zeta_1) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m \zeta_1^m, & g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \\ g'(\zeta_1)g(\zeta_1) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{m=0}^{\infty} s_m \zeta_1^m, & g(\zeta_1)g(\bar{\zeta}_1) = \frac{1}{\mu^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} o_m \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{o_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \right) \\ g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)z(\zeta_1) = \mu \left(\sum_{m=0}^{\infty} {}_1v_m \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{{}_2v_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \right), & g(\bar{\zeta}_1)z(\zeta_1) = \sum_{m=0}^{\infty} {}_3e_m \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{{}_4e_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \end{cases}$$

$$\text{但し, } v_m = \sum_{n=0}^m e_n c_{m-n}, \quad s_m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e_{m-n} e_{n+1}, \quad o_m = \sum_{n=0}^{\infty} e_n e_{m+n} \rho_1^{2n}, \quad {}_1v_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} v_n \rho_1^{2n},$$

$${}_2v_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v_{m+n} \rho_1^{2n}, \quad {}_3e_m = \sum_{n=0}^{\infty} e_n c_{m+n} \rho_1^{2n}, \quad {}_4e_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_{m+n} \rho_1^{2n}$$

即ち, $G(\zeta_1)$ は次のようになる。

$$G(\zeta_1) = \frac{1}{\mu^2} \frac{1}{\rho_1^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} {}_1u_m \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{{}_2u_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \right) \dots\dots\dots (40)$$

${}_1u_m$ と ${}_2u_m$ は次の通り。

$$\begin{cases} {}_1u_0 = 2 o_1 \rho_1^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-v_n o_n + \rho_1^2 s_n \cdot {}_4e_{n+1}) \rho_1^{2n} \\ {}_1u_m = 2 o_{m-1} - v_0 o_m + \sum_{n=0}^{m-1} (s_{m-n-1} \cdot {}_3e_n - v_{m-n} o_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (s_{m+n+1} \cdot {}_4e_n - v_{m+n} o_n) \rho_1^{2n} \quad (m=1, 2, \dots) \\ {}_2u_m = 2 o_{m+1} \rho_1^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_1^2 \cdot s_n \cdot {}_4e_{m+n+1} - v_n o_{m+n}) \rho_1^{2n} \quad (m=1, 2, \dots) \end{cases}$$

また, $Q(\zeta_1)$ 式において

$$\begin{aligned}
& -\frac{P\mu^2}{4(1-\nu)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+2n}{m} c_n c_{m+n} \rho_1^{2n} \zeta_1^m - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+2n}{m} c_n c_{m+n} \frac{\rho_1^{2(m+n)}}{\zeta_1^m} \right\} - X \left\{ -2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \log \rho_1 \right. \\
& + \frac{g(\zeta_1)z(\zeta_1)}{\zeta_1} \left(1 + \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} \right) - \frac{5-\nu}{1-\nu} \cdot \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} \left. \right\} = -\frac{P\mu^2}{8(1-\nu)\rho_1^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} {}_3v_m \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{{}_4v_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \right)
\end{aligned}$$

但し,

$$\begin{cases} {}_3v_0 = -\bar{X} \{ -2(1+\nu) \rho_1^2 \log \rho_1 - 4 v_1 \rho_1^2 + (1-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 \rho_1^{2n} \} \\ {}_3v_1 = -\bar{X} \{ (1-\nu) v_2 \rho_1^2 - (5-\nu) v_0 \} + \sum_{n=0}^{\infty} \{ 2(1+2n) c_n c_{n+1} \rho_1^2 - \bar{X} (1-\nu) v_n v_{n+1} \} \rho_1^{2n} \\ {}_3v_m = -\bar{X} (1-\nu) v_{m+1} \rho_1^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2(m+2n)}{m} c_n c_{m+n} \rho_1^2 - \bar{X} (1-\nu) v_n v_{m+n} \right\} \rho_1^{2n} \quad (m=2, 3, \dots) \\ {}_4v_1 = -\bar{X} \{ (1-\nu) v_0 - (5-\nu) v_2 \rho_1^2 \} - \sum_{n=0}^{\infty} \{ 2(1+2n) c_n c_{n+1} \rho_1^2 + \bar{X} (1-\nu) v_n v_{n+1} \} \rho_1^{2n} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v_m &= \bar{X}(5-\nu)v_{m+1}\rho_1^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2(m+2)n}{m} c_n c_{m+n}\rho_1^2 + \bar{X}(1-\nu)v_n v_{m+n} \right\} \rho_1^{2m} \quad (m=2, 3, \dots) \\
g'(\zeta)g(\zeta) \frac{g(\bar{\zeta}_1)z(\bar{\zeta}_1)}{\bar{\zeta}_1} z(\zeta_1) &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho_1^2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{m-1} s_{m-n+1} v_n + \sum_{n=1}^{\infty} s_{m+n+1} v_n \rho_1^{2n} \right) \zeta_1^m \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n v_{n+1} \rho_1^{2n} \right) \rho_1^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_n v_{m+n+1} \rho_1^{2n} \frac{\rho_1^{2(m+1)}}{\zeta_1^m} \right\} \\
\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z \partial \bar{Z}} \Big|_{\zeta=\zeta_1} g(\zeta_1) &= \frac{P\mu}{16} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m e_n \lambda_{m-n} + \sum_{n=1}^{\infty} e_{m+n} \lambda_n \rho_1^{2n} \right) \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e_n \lambda_{m+n} \frac{\rho_1^{2(m+n)}}{\zeta_1^m} \right\} \\
\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z^2} \Big|_{\zeta=\zeta_1} g(\bar{\zeta}_1) \frac{\zeta_1}{\bar{\zeta}_1} &= \frac{P\mu}{32} \cdot \frac{1}{\rho_1^2} \left\{ (r_0 e_0) \zeta_1^2 + (e_0 r_1 + e_1 r_0) \rho_1^2 \zeta_1 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m+2} e_n r_{m-n+2} \frac{\rho_1^{2(m+2)}}{\zeta_1^m} \right\}
\end{aligned}$$

となるから、次式を得る。

$$Q(\zeta_1) = \frac{P\mu}{32} \cdot \frac{1}{\rho_1^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} S_m \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \right) \dots \dots \dots (41)$$

但し、 S_m と T_m は次の通り。

$$\begin{aligned}
S_0 &= \left(4 \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_0 \rho_1^2 + 2 r^2 \rho_1^4 - \frac{4}{1-\nu} s v_0 \right) e_0 + 2 \rho_1^4 (e_1 r_1 + e_2 r_0) - 4 \bar{X} \rho_1^2 s_0 v_1 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} e_n \lambda_n \rho_1^2 - \frac{e_n v_n}{1-\nu} - \bar{X} \rho_1^2 s_n v_{n+1} \right) \rho_1^{2n} \\
S_1 &= \left(4 \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_1 \rho_1^2 + 2 r_1 \rho_1^2 - \frac{4 s v_1}{1-\nu} \right) e_0 + \left(4 \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_0 \rho_1^2 + 2 r_0 \rho_1^2 - \frac{4 s v_0}{1-\nu} \right) e_1 \\
&\quad - 4 \bar{X} s_0 v_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} e_{n+1} \lambda_n \rho_1^2 - \frac{e_{n+1} v_n}{1-\nu} - \bar{X} s_n v_n \right) \rho_1^{2n} \\
S_2 &= \left(4 \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_2 \rho_1^2 + 2 r_0 - \frac{4 s v_2}{1-\nu} \right) e_0 + 4 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_1 \rho_1^2 - \frac{s v_1}{1-\nu} \right) e_1 + 4 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_0 \rho_1^2 - \frac{s v_0}{1-\nu} \right) e_2 \\
&\quad - 4 \bar{X} (s_1 v_0 + s_0 v_1) + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} e_{n+2} \lambda_n \rho_1^2 - \bar{X} s_{n+1} v_n - \frac{e_{n+1} v_n}{1-\nu} \right) \rho_1^{2n} \\
S_m &= 4 \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} e_m \lambda_0 \rho_1^2 - \frac{e_0 s v_m}{1-\nu} + \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} e_n \lambda_{m-n} \rho_1^2 - \frac{e_{m-n} s v_n}{1-\nu} - \bar{X} s_{m-n-1} v_n \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} e_{m+n} \lambda_n \rho_1^2 - \frac{e_{m+n} v_n}{1-\nu} - \bar{X} s_{m+n-1} v_n \right) \rho_1^{2n} \right\} \quad (m=3, 4, \dots) \\
T_m &= 2 \rho_1^4 \left(\sum_{n=0}^{m+2} e_n r_{m-n+2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} 4 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} e_n \lambda_{m+n} \rho_1^2 - \frac{e_n v_{m+n}}{1-\nu} - \bar{X} \rho_1^2 s_n v_{m+n+1} \right) \rho_1^{2n} \quad (m=1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

次に、(38) 式の左辺の諸関数の積を展開する。

$g(\zeta_1)\varphi_*(\zeta_1)$ と $g(\zeta_1)\varphi_*(\bar{\zeta}_1)$ に対しては (7) 式と (9.a) 式より

$$g(\zeta_1)\varphi_*(\zeta_1) = \frac{1}{\mu^2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m e_{m-n} A_n + \sum_{n=1}^{\infty} e_{m+n} a_n \right) \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_{n-1} a_{m+n-1}}{\zeta_1^m} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

$$g(\zeta_1)\varphi_*(\bar{\zeta}_1) = \frac{1}{\mu^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e_n \rho_1^{2n} A_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_{m+n} \rho_1^{2n} A_n + \sum_{n=1}^m \frac{e_{m-n} a_n}{\rho_1^{2n}} \right) \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e_n \rho_1^{2n} A_{m+n} \frac{\rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \right\} \dots (43)$$

また、

$$z(\bar{\zeta}_1)g(\bar{\zeta}_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m}, \quad g(\zeta_1)z(\bar{\zeta}_1)g(\bar{\zeta}_1) = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m \zeta_1^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m \rho_1^{2m}}{\zeta_1^m} \right)$$

但し、 $h_m = \sum_{n=0}^m c_{m-n} e_n$, $d_m = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e_{m+n} \rho_1^{2n}$, $f_m = \sum_{n=0}^{\infty} h_{m+n} e_n \rho_1^{2n}$ を用いれば、

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta_1^2}{\rho_1^2} g(\zeta_1)z(\bar{\zeta}_1)\varphi_*'(\zeta_1) &= \frac{1}{\mu^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \zeta_1^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \rho_1^{2n}}{\zeta_1^n} \right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} \zeta_1^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1) a_{n-1}}{\zeta_1^n} \right\} \frac{\zeta_1^2}{\rho_1^2} \\
&= \frac{1}{\mu^2 \rho_1^2} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{m-2} (n+1) d_{m-n-2} A_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (m+n-1) f_n \rho_1^{2n} A_{m+n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n d_{m+n-1} a_n \right] \zeta_1^m \right. \\
&\quad \left. + \zeta_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_n \rho_1^{2n} A_n - \sum_{n=1}^{\infty} n d_n a_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} n f_{n+1} \rho_1^{2(n+1)} A_n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_n a_{n+1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n f_{m+n+1} \rho_1^{2(m+n+1)} A_n - \sum_{n=1}^m n f_{m-n+1} \rho_1^{2(m-n+1)} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} (m+n+1) d_n a_{m+n+1} \right] \frac{1}{\zeta_1^m} \right\} \dots \dots \dots (44)
\end{aligned}$$

また $g(\zeta_1)g(\bar{\zeta}_1)$ の展開式と (9.b) 式とより

$$\frac{\zeta_1^2}{\rho_1^2} g(\zeta_1)g(\bar{\zeta}_1)\psi_*'(\zeta_1) = \frac{1}{\mu^3 \rho_1^2} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{m-2} (n+1) o_{m-n-2} B_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (m+n-1) o_n \rho_1^{2n} B_{m+n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n \theta_{m+n-1} b_n \right] \zeta_1^m \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \zeta_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n o_n \rho_1^{2n} B_n - \sum_{n=1}^{\infty} n o_n b_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} n o_{n+1} \rho_1^{2(n+1)} B_n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) o_n b_{n+1} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n o_{m+n+1} \rho_1^{2(m+n+1)} B_n - \sum_{n=1}^m n o_{m-n+1} \rho_1^{2(m-n+1)} b_n - \sum_{n=0}^{\infty} (m+n+1) o_n b_{m+n+1} \right] \frac{1}{\zeta_1^m} \} \dots\dots\dots (45)
\end{aligned}$$

が得られる。(38) 式に (40)~(45) 式を入れて、係数比較を行うと、次の一群の関係式が誘導される。

$$\begin{aligned}
& -\dot{Y}_1 u_0 - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \rho_1 e_0 \dot{A}_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+\nu}{1-\nu} e_n + n f_{n+1} \right) \rho_1^{2(n+1)} \dot{A}_n + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_1^2 e_n + n d_{n-1}) \dot{a}_n \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} n o_{n+1} \rho_1^{2(n+1)} B_n + \sum_{n=1}^m n o_{m-n+1} b_n = \frac{P \mu^4}{32} S_0 \dots\dots\dots (46. a) \\
& -\dot{Y}_1 u_1 - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \rho_1^2 e_1 \dot{A}_0 + \rho_1^2 \left(e_0 - f_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu} e_2 \rho_1^2 \right) \dot{A}_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3+\nu}{1-\nu} \rho_1^2 e_{n+1} + n f_n \right) \rho_1^{2n} \dot{A}_n \\
& + \left(\rho_1^2 e_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu} e_0 + d_1 \right) \dot{a}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (\rho_1^2 e_{n+1} + n d_n) \dot{a}_n - \sum_{n=1}^{\infty} n o_n \rho_1^{2n} B_n + \sum_{n=1}^{\infty} n o_n b_n = \frac{P \mu^4}{32} S_1 \dots\dots\dots (46. b) \\
& -\dot{Y}_1 u_m + \sum_{n=0}^m \rho_1^2 e_{m-n} \dot{A}_n - \sum_{n=0}^{m-2} (n+1) d_{m-n-2} \dot{A}_{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+\nu}{1-\nu} e_{m+n} \rho_1^{2(n+1)} \dot{A}_n - \sum_{n=1}^{\infty} (m+n-1) f_n \rho_1^{2n} \dot{A}_{m+n-1} \\
& - \sum_{n=1}^m \frac{3+\nu}{1-\nu} \frac{e_{m-n} \rho_1^2}{\rho_1^{2n}} \dot{a}_n + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_1^2 e_{m+n} + n d_{m+n-1}) \dot{a}_n - \sum_{n=0}^{m-2} (n+1) o_{m-n-2} B_{n+1} \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} (m+n-1) o_n \rho_1^{2n} B_{m+n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n o_{m+n-1} b_n = \frac{P \mu^4}{32} S_m \quad (m=2, 3, 4, \dots) \dots\dots\dots (46. c) \\
& -\dot{Y}_2 u_m - \sum_{n=1}^{\infty} n f_{m+n+1} \rho_1^{2(n+1)} \dot{A}_n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+\nu}{1-\nu} e_n \rho_1^{2(n+1)} \dot{A}_{m+n} + \sum_{n=1}^m \frac{n f_{m-n+1} \rho_1^2}{\rho_1^{2n}} \dot{a}_n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_1^2 e_n}{\rho_1^{2m}} \dot{a}_{m+n} \\
& + \sum_{n=0}^m \frac{(m+n+1) d_n}{\rho_1^{2m}} \dot{a}_{m+n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n o_{m+n+1} \rho_1^{2(n+1)} B_n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n+1) o_n}{\rho_1^{2m}} b_{m+n+1} \\
& + \sum_{n=1}^m \frac{n o_{m-n+1} \rho_1^2}{\rho_1^{2n}} b_n = \frac{P \mu^4}{32} T_m \quad (m=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (46. d)
\end{aligned}$$

§ 8. 数値計算方法の概略

8.1 外周辺固定支持条件の場合: $B_m (m=0, 1, 2, \dots)$

と $b_m (m=1, 2, \dots)$ は (30.a, b, c, d) 式より $\dot{A}_m (m=0, 1, 2, \dots)$ と $\dot{a}_m (m=1, 2, \dots)$ とで表わされるので、その式を (46.a, b, c, d) 式に代入し B_m と b_m を消去すれば数値計算における未知数を $\dot{A}_m$ と $\dot{a}_m$ のみに軽減できるが、ここでは、(30.a, b) 式を (46.a, b, c, d) 式に代入して、 B_m のみを消去する方法をとる。その結果、 $\dot{A}_m, \dot{a}_m, b_m$ に関する無限元連立一次方程式が導かれる。

数値計算精度の検討として、 $r=0.15L, e=0.15L$ の場合を取上げ、表—1 に示す。表中の M_{AS}, w_A 等の諸記号は図—11 及び図—12 の記号位置の曲げモーメント・たわみ値である。

表—1 周辺固定支持条件の解析精度
($r/L=e/L=0.15, \nu=0$, (6) 式及び (7) 式の打ち切り項番号 $n=100$)

項 数	M_{AS}	M_{BS}	M_{CL}	M_{DL}	w_A	w_B	
$\dot{A}_m$ ($m=0,1,$...)	$\dot{a}_m, \dot{b}_m$ ($m=1,2,$...)	単位($\times 10^{-2}$)			10^{-4} /B		
25	10	1.957	1.640	-4.792	-5.014	4.79	11.19
30	15	1.957	1.640	-4.322	-4.617	4.42	11.40
35	20	1.428	2.674	-4.342	-4.940	4.62	11.54
40	25	1.395	2.633	-4.243	-4.730	4.70	11.62
45	30	1.395	2.633	-4.424	-4.814	5.02	11.93
50	35	1.395	2.633	-4.372	-4.808	4.76	11.67
55	40	1.395	2.633	-4.339	-4.748	4.95	11.86
X_1 60	45	1.395	2.633	-4.376	-4.756	4.99	11.91
X_0 48	24	1.395	2.633	-4.328	-4.843	4.90	11.82
誤差 $\frac{X_i - X_0}{X_i}$ (%)		0.0	0.0	+1.1	-1.8	+1.8	+0.8

ト・たわみ値である。

また、(6) 式及び (7) 式の係数は無限項まで考慮しなければならないが、電算機の入力の都合上いずれも $n=100$ 項迄で打ち切っている。その結果、本解析は図—2 に示すような隅の丸められた正方形に対する解析となる。しかしながら、これによって隅の丸められていない正方形の場合の解析結果とはその丸められた境界付近のみに差異が生じるのみで、その他の領域では当然のごとく差異が生じない。

後節の一連の数値解析において採用した未定係数は、都立大電算機 (FACOM 230-45 S) の記憶容量制限のため、 $\dot{A}_m$ に対しては $m=0, \sim, 48, \dot{a}_m$ と b_m に対しては $m=1, \sim, 24$ を採用し、97 元連立一次方程式を解いて、その値を決定した。この採用項数による曲げモーメント・たわみ値は表—1 に示すように、 $\dot{A}_m (m=0, \sim, 60), \dot{a}_m$ 及び $b_m (m=1, \sim, 45)$ の場合の諸数値に対していずれも $\pm 2\%$ 以内の誤差であり、工学的に許容される精度であると思われる。

なお、積分定数 Const は全ての未定係数値の決定後、(31) 式から求まる。

3.2 外周辺単純支持条件の場合: (36.b, c) 式を (37.b, c) 式及び (46.a, b, c, d) 式に代入し、 $\dot{A}_m (m=1, 2, \dots)$ を消去する。その結果 $B_m (m=0, 1, 2, \dots), \dot{a}_m$ 及び $b_m (m=1, 2, \dots)$ に関する無限元連立一次方程式が誘導できるが、ここでは 8.1 で述べたのと全く同様に解析精度が十分満されているとして、未定係数は B_m に対し $m=0, \sim, 48, \dot{a}_m$ と b_m に対し $m=1, \sim, 24$ を採

用し、97 元連一次方程式を解いてその値を決定した。

なお、 $\dot{A}_0$ は (36.a) 式より単独に、Const は全ての未定係数の決定後 (37.a) 式から求まる。

§ 9. 数値解析

図—5 曲げモーメントとたわみ分布
(固定支持, $r=0.1L$, $e=0.15L$, $\nu=0$)

図—6 曲げモーメントとたわみ分布
(固定支持, $r=0.1L$, $e=0.3L$, $\nu=0$)

9.1 外周辺固定支持条件の場合：解析例として、図—5~7 に曲げモーメント及びたわみ分布を示す。 $\nu=0$ より、外周辺上で $M_s=M_{ns}=0$ が成立する。

図—6 では円孔縁の一部で負の M_s 分布が生じ、また最大たわみは正方形の中央点で生じている。

なお、8.1 で述べたように、写像関数 (6) 式は最大項番号 $n=100$ で打ち切ったため正方形の隅角部は丸められる (図—2) ので、その隅角部近傍の曲げモーメントやたわみ分布は図中に示していない。

図—8~10 に円孔縁の M_s 分布を示す。 $r/L=e/L$ 一定では $\text{DEG}=180^\circ$ (円孔縁の B 点) で M_s は最大となる。また最小となる点は、中心円孔 ($e/L=0$) を基準 ($\text{DEG}=45^\circ$) とすれば、 e/L の増加に伴い DEG の増加する方向に生じる。

r/L —一定で e/L が大きくなると、A 点の M_s は一様に減少し、B 点の M_s は、 $r/L=0.1$ で微増減する他は、一様に増加する。

$r/L=0.1$ では、 $e/L=0.3$ 及び 0.35 で円孔縁 $\text{DEG}=77^\circ$ のあたりを中心に負の M_s 分布が生じている。

図—11 に円孔縁の A 点と B 点のたわみ w_A, w_B 及び正方形の中央点のたわみ ($r/L=0.1$, $e \geq r$, 一点鎖

図—7 曲げモーメントとたわみ分布
(固定支持, $r=0.15L$, $e=0.15L$, $\nu=0$)

図—8 円孔縁の接線方向曲げモーメント
(固定支持, $r=0.1L$, $\nu=0$)

図—9 円孔縁の接線方向曲げモーメント
(固定支持, $r=0.15L$, $\nu=0$)

図—10 円孔縁の接線方向曲げモーメント
(固定支持, $r=0.2L$, $\nu=0$)

線)を示す。 $r/L=0.1$ の場合では、中央点のたわみは大略 $e/L=0.175$ 以上で w_B より大きくなり、 $e/L=0.35$ で略々中実正方形平板の最大たわみに近づく。

図-12 に、円孔縁の A 点と B 点の M_s 値 (M_{AS} , M_{BS}) 及び外周辺での M_n の最大値 M_{Dn} (この位置は外周辺の一辺の中央点に生じるとは限らず、円孔位置の変化により中央点から若干ずれる)を示す。 $r/L=0.1$ の場合に、 e/L が増加すると、 M_{Dn} は中実正方形平板の外周辺の最大曲げモーメント値に近づく。

図-11 A 点と B 点のたわみ及び $r=0.1L$ の場合の平板中央点のたわみ
(固定支持, $\nu=0$, □の中は r/L の値)

図-12 A 点と B 点の M_s 及び外周辺での M_n の最大値
(固定支持, $\nu=0$, □の中は r/L の値)

図-13 ν による M_{AS} と M_{BS} の変化

図-13 に、ポアソン比 ν による M_{AS} と M_{BS} の変化を示す。 M_{BS} は直線的に増加する。 M_{AS} は、 e/L が増加すると共に、負勾配の傾向をもつ曲線を描く。

9.2 外周辺単純支持条件の場合：解析例として、図-14~16 に曲げモーメント及びたわみ分布を示す。いずれも $\nu=0$ である。 e が r に比して大きくなると、最大たわみが正方形の中央点に生じる (図-15) 傾向を示すのは外周辺固定支持の場合と同様である。

図-17~19 に円孔縁の M_s 分布を示す。 $r/L=一定$ での M_s の最大値や最小値の発生位置は外周辺固定支持の場合と同様である。

$r/L=一定$ で e/L が増加すると、一様に、 M_{BS} は微増加し、 M_{AS} は減少する。

図-20 に円孔縁の w_A , w_B 及び正方形の中央点のた

図-14 曲げモーメントとたわみ分布
(単純支持, $r=0.1L$, $e=0.15L$, $\nu=0$)

図-15 曲げモーメントとたわみ分布
(単純支持, $r=0.1L$, $e=0.3L$, $\nu=0$)

図-16 曲げモーメントとたわみ分布
(単純支持, $r=0.15L$, $e=0.15L$, $\nu=0$)

わみ ($r/L=0.1$, $e \geq r$, 一点鎖線) を示す。 $r/L=0.1$ において中央点のたわみは大略 $e/L=0.175$ 辺りから w_B より大きくなり, $e/L=0.35$ では中実正方形平板の最大たわみに略々等しくなる。

図-21 に円孔縁の M_{AS} と M_{BS} を示す。

図-22 に ν に対する M_{AS} と M_{BS} の変化を示す。 M_{AS} 及び M_{BS} は ν に対し直線的に増加している。

なお, 図-8~12, 図-17~21 で $e/L=0$ (中心円孔) のたわみと曲げモーメント値は文献 (18) を用いた。

§ 10. 結 び

複連結領域で示される有孔弾性平板に対する解法の一つとして, 本研究では Mushkelishvili 法を適用し, この解法が十分有効であることを偏心円孔を有する正方形弾性平板の解析で示した。

解析結果の要約は次の通りである。

(A) 外周辺固定及び単純支持条件に共通する曲げ性状として,

(1) 円孔縁の M_s 値は, $r/L=e/L=$ 一定の時, B

図-17 円孔縁の接線方向曲げモーメント
(単純支持, $r=0.1L$, $\nu=0$)

図-18 円孔縁の接線方向曲げモーメント
(単純支持, $r=0.15L$, $\nu=0$)

図-19 円孔縁の接線方向曲げモーメント
(単純支持, $r=0.2L$, $\nu=0$)

図-20 A 点と B 点のたわみ及び $r=0.1L$ の場合の
平板中央点のたわみ
(単純支持, $\nu=0$, □の中は r/L の値)

図-21 A 点と B 点の曲げモーメント
(単純支持, $\nu=0$, □の値は r/L)

図-22 ν による M_{AS} と M_{BS} の変化
(単純支持, □の中は e/L)

点で最大, 外周辺と最短距離にある付近の縁で最小となる。

(2) 最大たわみは偏心距離が比較的小さい間はB点で生じるが, $r/L=0.1$ の場合に, 大略 $e/L=0.175$ 以上になると正方形の中心で生じるような傾向を示す。

(B) 外周辺固定支持での性状として,

(3) 偏心距離が円孔半径に比して大きくなると, 円孔縁の一部に負の M_s 分布が生じる。

(4) 外部周辺の M_n の最大値は, 円孔の位置及び円孔半径の大きさによらず, 中実正方形平板のその値より大きくなる。

(5) $r/L=e/L$ 一定の時, 円孔縁の M_{BS} は ν に対し直線的に増加するが, M_{AS} はそうならない。

(C) 外周辺単純支持での性状として,

(6) r/L 一定の時, e/L の増加に伴い, 一様に円孔縁の M_{BS} は増加し, M_{AS} は減少する。

(7) $r/L=e/L$ 一定の時, ν に対し M_{BS} 及び M_{AS} 共直線的に増加する。

数値計算には, 都立大学電算機 FACOM 230-45 S 及び東京大学大型計算機センター HITAC 8800/8700 を利用した。

謝 辞

本研究を進めるにあたり, 御指導を頂きました便宜を与えて下さった東京都立大学教授東洋一先生, そして貴重な御助言を頂きました同大学助教授西川孝夫先生に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) G.N. Savin: 「Stress Concentration Around Holes」, Pergamon Press, New York, 1961
- 2) 山崎徳也, 後藤恵之輔: 「任意形孔をもつ無限板の曲げおよびねじりによる応力集中」, 土木学会論文報告集, 第

187 号, 1971.3

- 3) 栖原二郎: 「平板の曲げ理論」, p. 124~p. 125, コンピュータによる構造工学講座, 培風館, 昭和 47 年
- 4) 土橋由造, 内山武司: 「有限素片法—混合法—の方形有孔床版への適用」, 建築学会北海道支部第 35 回研究発表会, 昭和 46.3
- 5) 土橋由造, 内山武司: 「有限素片混合法による有孔, 細隙床版の解について (St. Venant 領域についての考察)」, 建築学会北海道支部研究発表会, 第 36 回, 昭和 46.8
- 6) L.S.D. Morley: 「A Finite Element Application of the Modified Rayleigh-Ritz Method」, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 1970
- 7) 川村教美, 須藤福三, 和田 章: 「開孔部を有するスラブについての一考察」, 建築学会大会講演梗概集, 東海, 昭和 51.10
- 8) 土橋由造: 「床版の応力に関する研究」, 昭和 36.9
- 9) 堯天義久: 「開口平板の階差方程式による近似解」, 建築学会研究報告, 33(1) 号
- 10) 榎谷栄次: 「単純支持された鉄筋コンクリート有孔スラブに関する研究」, 建築学会大会講演梗概集, 昭和 44.8
- 11) 坂田敏行: 「等分布荷重を受ける四辺支持された有孔長方形板の曲げ (中心に円孔を有する場合)」, 機械学会論文集, 39 巻 318 号, 昭和 48.2
- 12) Sekiya, T.: 「An Approximate Solution in the Problems of Elastic Plates with an Arbitrary External Form and a Circular Hole」, Proc. 5th Japan Nat. Cong. Appl. Mech., p. 95~p. 98, 1955
- 13) 山中秀男, 抱 博史: 「偏心円孔を有する円形平板の強さ」, 機械学会論文集, 28 巻 185 号, 昭和 37.1
- 14) 東 洋一, 小森清司: 「平板構造」 p. 11, 彰国社, 建築構造学大系 17 巻, 昭和 45 年
- 15) 玉 手統: 「弾性体の変形」 p. 228, コロナ社, 昭和 48.10
- 16) 鷺津久一郎: 「等方性板の曲げについて」, 機械学会論文集, 18 号 68 巻, 昭和 27 年
- 17) 森口繁一: 「2 次元弾性論」, 岩波講座, 現代応用数学, 1956
- 18) 岩原昭次: 「等分布荷重を受ける有孔弾性平板の曲げについて (第一報, 中心に円孔を有する正方形弾性平板)」, 昭和 53 年度関東支部研究報告集

SYNOPSIS

U.D.C.: 624.042: 624.073.1

ANALYTICAL STUDY ABOUT THE BENDING OF ELASTIC PLATES WITH OPENING HOLE UNDER UNIFORM LOAD

Part 1: Square Plates with Eccentric Circular Hole

by TERUZI IWAHARA, Graduate Student of Tokyo Metropolitan Univ., Member of the A.I.J.

The purpose of this paper is to explain the bending of elastic plates with opening hole analytically in application of theory of thin plate.

This analytical method used in the paper is based on a complex variable method.

Part One is for square plates with eccentric circular hole.

Boundary conditions treat the case of clamped edge and simply supported edge for a outward boundary, and free edge for a interior boundary.

Various values obtained this analysis is quantitative sufficiently.