回転シェルにおける非線形振動

回転シェルの非線形振動 第2報

正会員 皆 川 洋 一*

§1. 序

幾何学的非線形性を考慮した回転シェルの非線形性の特徴を第1報で調べた。この特徴を非線形運動方程式の型とそれに生起する非線形振動と関連付けると、ある外力のもとで回転シェルがどのような非線形挙動（座屈，非線形振動）を起すかが明らかとなる。本報は、これら回転シェルの非線形挙動を定性的に把えた上で、従来充分に解明されていなかったこのシェルの非線形振動を解明する。

回転シェル，特に円筒シェルの共振振動数を求める実験はいくつか報告されている^{1)~5)}。このうち，奥村等³⁾によって行われた実験について，結果を簡単に示そう。

1. 円筒シェルの横揺れ（周方向展開次数 $n=1$ ）の共振振動数に関して，実験から得られる値は線形理論値の $1/3 \sim 1/2$ 倍である。

2. 円筒下部（実験モデルは，一端固定，他端は自由でありフタが付いている）が局部座屈によりひしゃげて4本の節線が生じ，そこでの振動数は上部の振動数の2倍となっている。

柴田⁶⁾は，この現象を物理的に解釈して， $n=1$ と $n=2$ の2つのモードの連成するパラメータ励振であるという立場から，この現象を説明した。さらに，これら2つのモードに対応する膜応力解を採用した Galerkin 法を適用して得られる2自由度の非線形運動方程式を平均法を用いて解析し， $n=2$ のモードの最低固有振動数 ω_2 の $1/2$ 倍の振動数で系が共振することを示した。

皆川⁷⁾は有限要素法に基づいて誘導した多自由度系の非線形運動方程式を直接積分して，柴田の示した結果を確かめた。

ここでは，回転シェルの共振振動数が最小固有振動数の $1/3 \sim 1/2$ 倍になる現象を高調波共振現象と結びつけて解明する⁸⁾⁹⁾。

§2. 回転シェルの規準座標の特徴

幾何学的非線形性に起因する周方向展開次数の連成による回転シェルの復元力の特性を第1報で示した。次にこの復元力の特性を分類して，回転シェルの規準座標を3つの成分，すなわち基本成分，付随成分，及び同次成分

分とに分類する¹⁰⁾。

静的非線形解析及び非線形振動解析の上で，これらの規準座標が示す性質は各規準座標がどの分類に属するかによって把握することができる。このため，ここで示される回転シェルの規準座標の性質は第1報のモーダルマトリクスを構成する際の指針を与えてくれる。

(1) 基本成分

第1報(56)式で定義される回転シェルの規準座標 x_{np} が基本成分であるということは，この式で f_{np} が0でないことを意味する。

第1報の(43)，及び(56)式から， f_{np} が0でないという事は，外力を周方向へ Fourier 展開した時，外力が周方向展開次数 n の成分を有する（0ではない値を有する）ことの十分条件であることが分る。故に，次の命題が言える。

命題 1

「外力が周方向展開次数 n の成分を有することは，規準座標 x_{np} が基本成分であるための必要条件である。」

命題1の対偶を考えると，外力が周方向展開次数 n の成分を有しないならば， x_{np} は基本成分ではないことになる。基本成分に属さないならば，付随成分，同次成分は共に恒等的に0であることができる¹⁰⁾。故に，線形解析では，外力が周方向展開次数 n の成分を有する時，規準座標 x_{np} ($p=1, \dots$) を考慮すれば良いことが分る。

(2) 付随成分

第1報の(27)，(32)，及び(56)式から，次の事が言える。

命題 2

「次式のうち少なくとも1式を満たすことは，周方向展開次数 l^1 を有する規準座標が第1次付随成分であることの必要条件である。

$$l^1 = |m \pm n| \dots\dots\dots (1)$$

$$l^1 = |m' \pm m \pm n| \dots\dots\dots (2)$$

ここに， $m', m, n \in \{G\}$ 基本成分の有する周方向展開次数」

命題2を拡張すると，次の事が言える。

命題 3

「次式のうち少なくとも1式を満たすことは，周方向展開次数 l^k を有する規準座標が第 k 次付随成分である

* 鹿児島大学 講師・工博

(昭和52年4月8日日本稿受理・討論期限昭和54年11月末日)

ための必要条件である。

$$l^k = |m \pm n| \dots\dots\dots (3)$$

$$l^k = |m' \pm m \pm n| \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $m', m, n \in \{G \mid \text{基本成分の有する周方向展開次数, 及び第1次} \sim \text{第}(k-1)\text{次付随成分であるための必要条件を満たす周方向展開次数}\}$

次に、命題2、及び命題3を回転シェルの静的解析、及び非線形振動へ応用する例を示す。

a) 軸対称荷重を受ける静的解析

軸対称外力（周方向展開次数 $n=0$ ）を受ける回転シェルにおいて、規準座標 x_{0p} ($p=1, 2, \dots$) は基本成分であるための必要条件を満たす。一方、命題1、及び命題3の対偶から、周方向展開次数 $n=m$ ($m \neq 0$) を有するすべての規準座標は、基本成分及び付随成分ではない、つまり同次成分となる。

同次成分は恒等的に0であるか、0以外の解を有するならば基本パスからの分岐パスとして出現すると考えて良い。

この例に属する静的座屈問題としては、軸対称面内圧縮力（周方向展開次数 $n=0$ ）を受ける円筒シェルがダイヤモンドパターンで分岐座屈する問題、軸対称荷重を受ける球形キャップが分岐座屈する問題等がある。

b) 軸対称周期外力を受ける動的解析

次に、周方向展開次数 $n=0$ の周期外力が作用した場合の非線形振動について触れる。非線形運動方程式の定常解において、同次成分は「非線形振動(3):分岐型(2)」¹⁰⁾の振動と結びつく。この振動は従来の定式化において、パラメータ励振として扱われていた。

軸対称周期外力を受ける円筒シェル、せつ頭円錐シェル、回転HPシェル、球形キャップ等のパラメータ励振は、すべてこの例に属する。

c) 基本成分が周方向展開次数 $n=1$ の場合

基本成分が周方向展開次数 $n=1$ のモードを有する規準座標である時、命題3から周方向展開次数 $n=m$ ($m=0, 2, 3, 4, 5, \dots$) を有する規準座標は付随成分であるための必要条件を満足する。

周方向展開次数 $n=1$ のモードを有する外力を受ける円筒シェル周方向展開次数 $n=2$ (隋円化モード) が出現する現象が知られている。この現象を Brazier 効果¹¹⁾と呼んでいる。

上で示したように、周方向展開次数 $n=1$ のモードを有する外力を受ける回転シェル(円筒シェルを含む)に、一般に周方向展開次数 $n=m$ ($m=0, 2, 3, 4, \dots$) が出現して良いはずである。 $n=2$ 、及び3は第1次付随成分に属するので、特に出現し易いものと考えられる。

非線形運動方程式において付随成分に属する規準座標は、「非線形振動(1):付随型¹⁰⁾」と結びつく。この振動の数値計算を §3 で示す。

d) 基本成分が周方向展開次数 $n=l$ ($l \geq 1$) の場合
基本成分が周方向展開次数 $n=l$ ($l \geq \text{整数}$) のモードを有する規準座標である時、命題3から周方向展開次数 $n=pl$ ($p=0, 2, 3, 4, 5, \dots$) を有する規準座標は、付随成分であるための必要条件を満足する。これは c) の一般化された場合で、 $l=1$ が c) に相当する。

d) の対偶を取ると、整数列 $\{0, l, 2l, 3l, \dots\}$ に属しない整数を周方向展開次数とする規準座標は、同次成分となることが分る。

例として、 $l=2$ の場合を考える。この時、数列 $\{1, 3, 5, \dots\}$ を周方向展開次数とする規準座標はすべて同次成分となる。これら同次成分に属する規準座標は、a) 及び b) で示したように、分岐座屈、あるいは「非線形振動(3):分岐型(2)」の非線形振動¹⁰⁾と結びつく。

§3. 回転シェルにおける非線形振動(1):付随型

回転シェルが系の最小固有振動数より低い外力振動数で共振する現象を2個の円筒シェルを用いて解析する^{8), 9)}。2個の解析モデルを Model 1, Model 2 とする。

Model 1 は、一端固定したフタ付き円筒シェルであ

図-1 Model 1

表-1 固有振動数 (Model 1)

No. \ n	1	2	3
1	201 Hz	315 Hz	221 Hz
2	377 Hz	793 Hz	504 Hz
3	788 Hz	803 Hz	879 Hz
4	1604 Hz	1304 Hz	1199 Hz
5	1774 Hz	1744 Hz	1306 Hz

図-2 Free Vibration Modes (Model 1)

$$\begin{aligned}
 l &= 45.7 \text{ cm} \\
 d &= 15.2 \text{ cm} \\
 t &= 0.762 \text{ cm} \\
 E &= 2.11 \times 10^6 \text{ kg/cm} \\
 \nu &= 0.3 \\
 \rho &= 0.80 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4
 \end{aligned}$$

図-3 Model 2

表-2 固有振動数 (Model 2)

No.	n	1	2	3
1		2190 Hz	1452 Hz	2617 Hz
2		6557 Hz	4238 Hz	4074 Hz
3		9337 Hz	7260 Hz	6606 Hz
4		10936 Hz	9848 Hz	9493 Hz

図-4 Free Vibration Modes (Model 2)

る。このモデルの規格を図1に示す。また、このモデルを16分割して求めた固有振動数を表-1に示す。さらに、各周方向展開次数に対応する最小固有振動数 (ω_{n1} : $n=1, 2, 3$) に対応する固有振動モード (ϕ^{n1} : $n=1, 2, 3$) を図-2に示す。

Model 2は両端支持した円筒シェルである。これを図3に示す。対称性を考慮して、母線方向の長さの1/2の部分をも10等分割して求めた固有振動数を表2に示す。また、最小固有振動数に対応する固有振動モードを図4に示す。

各モデルの実際の変化は、各規準座標 (x_{n1} : $n=1, 2, 3$) の値に、対応する固有振動モードの大きさ (図2、及び図4) を乗じた値 (cm) となる。

(1) 周方向展開次数 $n=1$ のモードによる解析

Model 1において、規準座標 x_{11} に対応する非線形運動方程式は、第1報の(75)式から次式で表わされる。

$$\ddot{x}_{11} + \omega_{11}^2 x_{11} + \alpha_3 x_{11}^3 = f_{11} \cos \omega t \quad (5)$$

Model 1の ω_{11}^2 , α_3 を表3に表わす。外力振幅として次式を採用する。

図-5 Resonance Curve (Model 1)

$$f_{11} = 6.0 \times 10^4 \quad (6)$$

(5) 式の解を基本振動成分と第1次付随振動成分で次式のように構成する。

$$x_{11} = c_{11} \cos \omega t + c_{13} \cos 3 \omega t \quad (7)$$

(7) 式の解を仮定して得られる(5)式の共振曲線を図-5に示す。この数値解析モデルで(5)式の小線形項の影響は小さく、3倍の高調波振動はごく狭い領域でしか立ち上らなかったため、この共振を図-5に描かなかった。非線形項の影響は、主共振領域 ($\omega/\omega_{11}=1.0$ の近傍) の共振曲線を hardening にするという形としても表われていない。つまり、このモデルは、1自由度としては、非線形性が小さい。

(2) $n=1$ のモードと $n=2$ のモードの連成 (その1)

円筒シェルで規準座標 x_{11} と x_{21} との連成を考え、 x_{11} に対応するモードに周期外力を作用させると、第1報の(77)式から、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{x}_{11} + \omega_{11}^2 x_{11} + 2\alpha_1 x_{11} x_{21} + 2\alpha_2 x_{11} x_{21}^2 + \alpha_3 x_{11}^3 \\
 = f_{11} \cos \omega t \\
 \ddot{x}_{21} + \omega_{21}^2 x_{21} + \alpha_4 x_{11}^2 + 2\alpha_5 x_{11}^2 x_{21} + \alpha_6 x_{21}^3 = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Model 1の場合、(8)式の各係数は表-3で表わされる。外力振幅として(6)式を採用した解析モデルとする。このモデルは(1)で扱ったモデルに規準座標 x_{21} の影響を考慮したモデルである。

表 3 Model 1 の各係数

$\omega_{11} = 1.262 \times 10^3$	$\alpha_3 = 2.97 \times 10^4$
$\omega_{21} = 1.977 \times 10^3$	$\alpha_4 = 3.80 \times 10^7$
$\omega_{31} = 1.386 \times 10^3$	$\alpha_5 = 1.779 \times 10^4$
$\alpha_1 = -6.97 \times 10^4$	$\alpha_6 = 3.43 \times 10^6$
$\alpha_2 = 5.87 \times 10^5$	$\alpha_7 = 4.93 \times 10^8$

(8) 式の解を基本振動成分と第1次付随振動成分で仮定すると次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 x_{11} &= c_{11} \cos \omega t + c_{13} \cos 3 \omega t \\
 x_{21} &= c_{20}/2 + c_{22} \cos 2 \omega t
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9) 式を仮定して得られる(8)式の共振曲線を図-6に示す。(1)と同様、 c_{13} が増大する領域は狭いので無視した。図-6から、 $\omega/\omega_{11}=0.79$ ($\omega=\omega_{21}/2$) 近傍の領域で規準座標 x_{21} が共振して立ち上がることが分る。

図-6 Resonance Curves (Model 1)

この現象は次のように説明できる。(8-a) 式において規準座標 x_{11} は外力振動数 ω と同一の振動数を有する振動成分，すなわち基本振動成分を持つ。基本振動成分 $c_{11} \cos \omega t$ が (8-b) 式 of 非線形項 $\alpha_1 x_{11}^2$ のために，定数項と振動数 2ω を有する振動成分に変換される。後者は，(8-b) 式に付加的な外力項として作用する。この付加外力による共振を，規準座標 x_{21} に対応して仮定された第 1 次付随振動成分 $\cos 2\omega t$ が拾い上げるため， $\omega = \omega_{21}/2$ の近傍で第 1 次付随振動成分 c_{22} が立ち上る。

$\omega/\omega_{11}=1.0$ の近傍で x_{21} の共振曲線が立ち上る理由は，次のように説明できる。この領域は規準座標 x_{11} の主共振領域であるから，基本振動成分 c_{11} の絶対値が著しく増大する。このため，(8-b) 式 of 非線形項 $\alpha_1 x_{11}^2$ によって生ずる付加外力項が増大するので，規準座標 x_{21} の振幅も増大する。この現象は，“coupling resonance”¹²⁾ である。

図-6 では x_{21} の共振曲線を ω/ω_{11} の全領域に渡って描けなかった。しかし， x_{21} は全領域で値を有している。これは付随成分の特徴である。

(3) $n=1$ のモードと $n=2$ のモードとの連成(その 2)

(8-b) 式にも周期外力を作用させると，(8) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{11} + \omega_{11}^2 x_{11} + 2\alpha_1 x_{11} x_{21} \\ + 2\alpha_2 x_{11} x_{21}^2 + \alpha_3 x_{11}^3 = f_{11} \cos \omega t \\ \ddot{x}_{21} + \omega_{21}^2 x_{21} + \alpha_4 x_{11}^2 + 2\alpha_2 x_{11}^2 x_{21} \\ + \alpha_4 x_{21}^3 = f_{21} \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

Model 1 に対して，(10) 式の各係数は表-3 で表わされる。(10) 式の外力振幅として，次式を採用する。

$$f_{11} = f_{21} = 6.0 \times 10^4 \dots (11)$$

(11) 式の値は，(6) 式と同一である。

基本成分に属する規準座標 x_1, x_2 とで構成される (10) 式の解を，次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x_{11} &= c_{10}/2 + c_{11} \cos \omega t + c_{12} \cos 2\omega t \\ &\quad + c_{13} \cos 3\omega t \\ x_{21} &= c_{20}/2 + c_{21} \cos \omega t + c_{22} \cos 2\omega t \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

(12) 式は，式 (10) の基本振動成分，及び第 1 次付随振動成分とから成る解から， $c_{23} \cos 3\omega t$ を省いた形をしている。

(12) 式を仮定して得られる (10) 式の共振曲線を図-

7 に示す。 $\omega/\omega_{11}=0.5$ 近傍の領域で第 1 次付随振動成分 c_{12} が立ち上るので， x_1 の共振曲線はこの領域で共振する。この共振も他の付随振動成分の共振と同様に説明できる。

$\omega/\omega_{11}=0.79$ ，及び $\omega/\omega_{11}=1.0$ 近傍の立ち上りは，(2) で示した理由と同一である。しかし，(2) と (3) では，支配運動方程式に若干の相違があるため ((2) では x_1 は基本成分， x_2 は第 1 次付随成分，一方 (3) では， x_1, x_2 とも基本成分)，基本振動成分，第 1 次付随振動成分にも相違が出てくるので，共振領域での共振曲線の形に相違が生ずる。また， $\omega/\omega_1=1.57$ 近傍に，規準座標 x_{21} の固有振動数が存在するため， x_{21} の共振曲線はこの近傍で立ち上る。

(4) $n=1$ のモードと $n=2$ のモードの連成(その 3)

(2) の解析に対応する結果を Model 2 で示す。Model 2 の場合，(8) 式の各係数は表-4 で表わされる。

(8) 式の外力振幅として，次式の値を採用する。

$$f_{11} = 4.88 \times 10^6 \dots (13)$$

(8) 式の解を，基本振動成分と第 1 次付随振動成分とで構成する。この時，解は (9) 式で仮定される。

Model 2 に対して，(9) 式の解を仮定して得られる (8) 式の共振曲線を図-8 に示す。

図-7 Resonance Curves (Model 1)

表-4 Model 2 の各係数

$\omega_{11} = 1.376 \times 10^4$	$\alpha_2 = 1.363 \times 10^9$
$\omega_{21} = 9.12 \times 10^3$	$\alpha_3 = 2.45 \times 10^8$
$\alpha_1 = -5.01 \times 10^7$	$\alpha_4 = 5.81 \times 10^{10}$

図-8 Resonance Curves (Model 2)

このモデルでも規準座標 x_1 の非線形性は小さく、主共振領域での hardening の特徴はわずかに観察されるに過ぎない。しかし、第1次付随振動成分 c_{13} が $\omega/\omega_{11}=0.33$ 近傍の領域で立ち上る3倍の高調波振動の共振は、図—8で判別できる程度に現われる。 $\omega/\omega_{11}=0.34$ ($\omega=\omega_{21}/2$) の近傍で第1次付随振動成分 c_{22} が立ち上る規準座標 x_{21} の共振は hardening の特徴を表わしている。系の hardening に関係する主要な非線形項は、(8)式における $\alpha_3 x_{11}^3$ 、及び $\alpha_4 x_{21}^3$ である。表—4から、係数 α_3 と α_4 の大きさを比較すると、 α_4 の方が α_3 よりはるかに大きい。このため、 α_4 が関係する規準座標 x_{21} は hardening の特徴が出易く、 α_3 が関与する規準座標 x_{11} はこの特徴が出にくい。

また、 $\omega/\omega_{11}=0.34$ の近傍で x_{21} が立ち上っても、 x_{11} の共振曲線は大きな変化を示さない。

(5) $n=1$ のモードと $n=2$ のモードの連成(その4)
Model 2 を用いて、減衰の影響を調べる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{11} + 2\lambda_{11}\omega_{11}\dot{x}_{11} + \omega_{11}^2 x_{11} + 2\alpha_1 x_{11}x_{21} \\ + 2\alpha_2 x_{11}x_{21}^2 + \alpha_3 x_{11}^3 = f_{11} \cos \omega t \\ \ddot{x}_{21} + 2\lambda_{21}\omega_{21}\dot{x}_{21} + \omega_{21}^2 x_{21} + \alpha_4 x_{21}^3 \\ + 2\alpha_2 x_{11}^2 x_{21} + \alpha_4 x_{21}^3 = f_{11} \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

規準座標 x_{11} , x_{21} 両方のモードへ (13) 式で与えら

図—9 Resonance Curves (Model 2)

図—10 Resonance Curve (Detail of 図—9)

図—11 Resonance Curve (Detail of 図—9)

れる外力を作用させた。このため、 x_{11} , x_{21} とともに基本成分となる。

減衰は臨界減衰比 λ_{11} , λ_{21} として、次の値を採用する。

$$\lambda_{11} = \lambda_{21} = 0.005 \dots \dots \dots (15)$$

(14) 式の解を、基本振動成分、及び第1次付随振動成分で次のように構成する。

$$\left. \begin{aligned} x_{11} &= c_{10}/2 + \sum_{k=1}^3 (c_{1k} \cos k\omega t + s_{1k} \sin k\omega t) \\ x_{21} &= c_{20}/2 + \sum_{k=1}^3 (c_{2k} \cos k\omega t + s_{2k} \sin k\omega t) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

(16) 式の解を仮定して得られる (14) 式の共振曲線を図—9, 10, 11 に示す。図—10, 及びは図—9 の一部を拡大した共振曲線である。

$\omega/\omega_{11}=0.34$ 近傍の領域で c_{13} , s_{13} , 及び c_{23} , s_{23} が立ち上り、図—10 のような共振曲線を描く。一方、 $\omega/\omega_{11}=0.5$ 近傍の領域で c_{12} , s_{12} , $\omega/\omega_{11}=0.55$ の近傍で c_{22} , s_{22} が立ち上るため、この領域の共振曲線は極めて複雑な曲線となる。減衰が入ると共振領域での共振曲線は一般に複雑となるが、この領域での最大応答は有限な値となる。これは非線形振動を実際へ応用する場合重要な事実であると考えられる。

(6) $n=1$ のモードと $n=3$ のモードの連成

規準座標 x_{11} と x_{31} との連成による非線形運動方程式は、第1報の (79) 式で表わされる。この方程式へ、規準座標 x_{11} に対応する周期外力を作用させると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{11} + \omega_{11}^2 x_{11} + 3\alpha_5 x_{11}^2 x_{31} + 2\alpha_6 x_{11} x_{31}^2 + \alpha_3 x_{11}^3 \\ = f_{11} \cos \omega t \\ \ddot{x}_{31} + \omega_{31}^2 x_{31} + \alpha_5 x_{11}^3 + 2\alpha_6 x_{11}^2 x_{31} + \alpha_7 x_{31}^3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Model 1 を解析モデルとして採用し、外力振幅として次の値を用いる。

$$f_{11} = 3.0 \times 10^5 \dots \dots \dots (18)$$

(17) 式の解を基本振動成分、及び第1付随振動成分とで構成する。

$$\left. \begin{aligned} x_{11} &= c_{11} \cos \omega t + c_{13} \cos 3\omega t \\ x_{31} &= c_{31} \cos \omega t + c_{33} \cos 3\omega t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

(19) 式の解を仮定して得られる (17) 式の共振曲線を

図—12 Resonance Curve (Model 1)

図 12 に示す。

(1) の解析と比較すると、外力振幅が 5 倍となっているため非線形項 $\alpha_3 x_{11}^3$ の影響が若干現われ、 $\omega/\omega_{11}=1.0$ 近傍の主共振領域で hardening が観測される。また、3 倍の高調波振動 c_{13} が $\omega/\omega_{11}=0.33$ 近傍で立ち上るので、この領域で規準座標 x_{11} は共振する。

$\omega/\omega_{11}=0.37$ ($\omega=\omega_{31}/3$) 近傍で第 1 次付随振動成分 c_{33} が立ち上るため、この領域で x_{31} の共振曲線は大きな振幅となる。一方、第 1 次付随振動成分 c_{31} は、 $\omega/\omega_{11}=1.25$ 近傍で立ち上る。固有振動数から予測すると $\omega_{31}/\omega_{11} \approx 1.1$ であるから、この振動成分は $\omega/\omega_{11}=1.1$ の近傍で立ち上るものと考えられる。この相違は次のように説明できる。このモデルでは外力振幅 ((18) 式) が大きく、規準座標 x_{11} はかなり大振幅となる。このため、(17) の第 2 式の非線形項 $2\alpha_6 x_{11}^2 x_{31}$ が規準座標 x_{31} の剛性を高める作用をするので、第 1 次付随振動成分 c_{31} の共振点が $\omega/\omega_{11}=1.25$ の近傍まで移動した。

$\omega/\omega_{11}=1.0$ 近傍で規準座標 x_{31} が立ち上る原因は、(2) で示した “coupling resonance” による。

ま と め

周方向展開次数 $n=1$ を有するモードと $n=2$ を有するモードの連成による非線形運動方程式は第 1 報の (77) 式で表わされる。一般に、周方向展開次数 $n=l$ と $n=2l$ ($l=1, 2, \dots$) との連成による運動方程式は第 1 報の (78) 式で表わされる。(78) 式で $l=1$ とした場合が (77) 式であるから、(77) 式で表わされる運動方程式に生起する現象 ((2)~(5) で示した) は、(78) 式の系でも起り得る。

同様に、周方向展開次数 $n=l$ と $n=3l$ ($l=1, 2, \dots$) の連成による運動方程式 (第 1 報の (80) 式) で $l=1$ とした場合が (79) であるから、(6) で示した非線形振動は、(80) 式で表わされる系でも起り得る。

ここで示した結果から、回転シェルの共振振動数が系の最小固有振動数より低くなる現象は、付随振動成分の共振¹⁰⁾ (高調波共振) によるものであることが示された。

謝 辞

本研究を閉じるに当たり、貴重な助言をいただきました東京大学坪井善勝名誉教授、田中尚教授、半谷裕彦助教授に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) V.I. Weingarten, “Free Vibration of Thin Cylindrical Shells”, AIAA Vol. 2, p. 717 1964.
- 2) M.D. Olson, “Some Experimental Observations on the Nonlinear Vibration of Cylindrical Shells”, AIAA Vol. 3, p. 1775 1965.
- 3) 奥村敦史, 柴田 碧, 重田達也, “模型振動実験” 原子炉容器及び配管系の耐震設計法に関する試験研究成果報告書, 日本機械学会, 昭和 44 年 3 月.
- 4) 柴田耕一, “円筒殻の横揺れ振動に関する研究” 日本建築学会関東支部, 昭和 48 年.
- 5) 古賀達蔵, 林 洋一, 小松敬治, 松島正道, “ホログラフの干渉法による円筒殻の振動実験” 第 25 回応用力学連合論文抄録集, 昭和 50 年.
- 6) 柴田耕一, “断面の楕円化に伴う円筒殻の非線型振動に関する研究” 建論第 201 号, 昭和 47 年 11 月.
- 7) 皆川洋一, “有限要素法による回転シェルの動的解析” 東京大学修士論文, 1974 年 1 月.
- 8) Y. Minakawa, Y. Hangai, “Nonlinear Lateral Vibrations of Shells of Revolution”, Proc. of 25th Japan National Congress for Applied Mech. 1975.
- 9) 皆川, 半谷, “円筒シェルの非線形振動” 生産研究 Vol. 27, No. 10, 1975 年 10 月.
- 10) 皆川洋一, “非線形運動方程式の定常解問題” 建論 (第 276 号~第 280 号, 昭和 54 年 2 月~6 月).
- 11) L.G. Brazier, “On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and other Thin Sections”, Proc. Roy. Soc. London Ser. A p. 104 1927.
- 12) J.A. Bennett, J.G. Easley, “A Multiple Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Beam Vibration”, AIAA p. 735 1970.

SYNOPSIS

U.D.C. : 624.044

NONLINEAR VIBRATIONS OF SHELLS OF REVOLUTION

Nonlinear Vibrations of Shells of Revolution—Part 2.

by Dr. YOUICHI MINAKAWA, Member of A.I.J.

Some papers reporting experiments show that shells of revolution subjected to harmonic lateral loads resonate in a lower region of frequency than the lowest natural frequency. In order to make clear the phenomenon we examine the feature of the nonlinear terms of the shells. Then it is shown that what types of nonlinear problems may take place in certain shells of revolution under certain load, and that foregoing nonlinear vibration phenomenon are caused by the accompanying type of nonlinear vibrations. This is ascertained by numerical analyses.