応力関数法による偏平らせん殻の解析

正 会 員 井 浦 雅 司*

1. はじめに

らせん階段およびらせん桁の構成要素であるらせん殻の力学的特性については、まだ明確にされていない点が残されており、さらに基本微分方程式の一般解についても議論すべき余地が残されているものと思われる。本論文では、応力関数法により偏平らせん殻の解析解を求め、殻の力学的挙動を調べている。

らせん殻は初期捩れ板と共に、その中央面が Helicoid と呼ばれる曲面をなしており、負の Gauss 曲率を有している。らせん殻の研究は、Reissner¹⁾ の論文に始まり、これまで多くの研究者により行われている。Reissner¹⁾, Knowles and Reissner²⁾ は、殻の応力状態が回転対称となる問題を扱い、一方、Reissner³⁾, Cohen⁴⁾, O'Mathuna⁵⁾ らは殻の応力状態および変位状態が回転対称となる問題を扱っている。以上の研究は、いずれも解析解を求めてはいるものの、回転対称という特定な問題に限定されており、さらに境界条件についても特定なものしか考えておらず、これらの研究によってらせん殻の力学的特性が明確にされているとは思われない。

非回転対称問題として、Wan⁶⁾ は両端に等曲げモーメントを受ける偏平らせん殻の解析を行っているが、鉛直変位および応力関数にフーリエ級数を一項しか用いていないために、そこで得られている同次解に一般性が欠けており、さらに面内変位の誘導において、積分定数に剛体変位以外の項が含まれており、本論文の結果とは差異がみられる。Hirashima and Iura⁷⁾ は、直線辺が単純支持されている偏平らせん殻の解析を行い、殻の力学的挙動に及ぼす円弧辺境界条件の影響を調べている。

これまで述べてきた研究は、いずれも解析解を主体としたものであるが、境界条件の一部は仮定した変位・応力状態の形により予め決まっており、殻周辺において任意の境界条件を扱い得る解析解を求めた研究は報告されていない。

エネルギー原理に基づく近似解としては、Rayleigh-Ritz 法による西村⁸⁾ の報告があり、有限要素法による研究として、神薗・西村⁹⁾, 内山・土橋¹⁰⁾, 平嶋・井浦¹¹⁾ らの報告があり、いずれも周辺で支持され等分布荷重を受けるらせん殻の解析がなされている。しかしながら、

これまで比較すべき解析解が得られていなかったために、これら有限要素解の精度については論じられておらず、近似解同士の比較にとどまっている¹²⁾。さらに従来の研究においては、らせん殻の有するピッチの影響を調べているだけで、殻の面内境界条件および面内剛性の影響については述べられていない。

らせん殻の実験的研究としては、Cusens¹³⁾, 土生・平嶋・井浦¹⁴⁾ らの報告があり、従来らせん殻の解析に多く用いられている棒理論^{15), 16)} が不適当であることが指摘されている。

有限要素法や差分法などの数値解析手法は、境界条件の処理が比較的容易に行えるという利点を有しており、各種の殻構造物の解析にも多く用いられている。一方、解析解が得られる問題は限られてしまう場合が多いものの、解析解の有用性は広く知られており、その研究も各種の殻について活発に行われている。これらの中で、フーリエ級数による方法が一般に多く用いられており、任意の境界条件を扱うためには、解を二方向にフーリエ余弦級数および正弦級数に展開する必要がある^{17)~19)}。しかしながら、らせん殻の基本微分方程式は定数係数とならず、そのままの形では解を二方向にフーリエ展開することは難しく、従来の研究^{6), 7)} においては、円周方向にのみフーリエ展開して解を求めており、境界条件の一部が予め決まってしまう場合が多い。

本論文の目的は、殻周辺において任意の境界条件を扱い得る解析解を求めることであり、さらに数値計算例を通してらせん殻の力学的特性を明確にすることである。解析解を求める際に従来の研究と異なる点は、基本微分方程式において変数変換を施すことにより、定数係数の微分方程式を誘導し、変位および応力関数を二方向にフーリエ余弦級数および正弦級数に展開している点である。このようにして、殻周辺で任意の境界条件を扱い得る解析解を求めている。

対象としている殻は、Vlasov-Marguerre 型の偏平殻であり、Vlasov 型の微分方程式より曲げ理論解を求めている。面内変位は、断面力を積分することにより求めるが、その際に、積分定数は全て剛体変位となることを示している。荷重条件としては、鉛直方向等分布荷重を考慮しており、荷重を円周方向にフーリエ展開することにより特殊解を求めている。数値計算例として、無次元パ

* 東京電機大学 助手・工修

(昭和 55 年 8 月 8 日日本稿受理・討論期限昭和 57 年 2 月末日)

ラメータを用いて各種条件の下でらせん殻の力学的特性を調べ、同時に本論文で得られた解析解と有限要素解との比較を行い、それら結果に対する考察を加えた。

2. 偏平らせん殻の基礎式

本論文においては、Fig. 1 に示されているように、 $r = r_0, r_1$ ($0 < r_0 < r_1$) および $\theta = \theta_0, \theta_1$ ($\theta_1 - \theta_0 = \alpha > 0$) において境界を有する偏平らせん殻を考える。なお、何ら一般性を失うことなく、 $\theta_0 = 0, \theta_1 = \alpha$ とおける。殻の中央面は、円筒座標系 (r, θ, z) を用いて

$$z = a_p \cdot \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表わされ、ここに $2\pi a_p$ は殻のピッチである。

Fig. 1 Right helicoidal shell

面内分布荷重 P_θ, P_r がポテンシャル Ω により

$$\left. \begin{aligned} P_\theta &= -\frac{\partial \Omega}{r \partial \theta} \\ P_r &= -\frac{\partial \Omega}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表わされるならば、応力関数 ϕ を導入して、Fig. 2 に示す面内断面力を

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} + \Omega \\ N_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \Omega \\ N_{r\theta} &= N_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

Fig. 2 Stress resultants and moments

とおくと、面内の釣合式は恒等的に満足される。なお、面内断面力と変位の関係は、

$$\left. \begin{aligned} N_r &= c \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} \right) \right\} \\ N_\theta &= c \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} + \nu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ N_{r\theta} &= N_{\theta r} = \frac{c(1-\nu)}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{2a_p}{r^2} w \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表わされ、ここに

$$c = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

であり、 u, v, w はそれぞれ θ, r , 法線方向の変位であり、 t は殻厚、 E は Young 係数、 ν は Poisson 比である。面外断面力と変位の関係は

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} \\ M_\theta &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\ M_{r\theta} &= M_{r\theta} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ Q_r &= \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) \\ Q_\theta &= \frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} M_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と表わされ、ここに

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。

法線方向変位 w および応力関数 ϕ により表わされる Vlasov 型の微分方程式、すなわち釣合式と適合条件式は以下のように書ける⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} r^2 \nabla^2 w + \frac{1}{D} \frac{2a_p}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right) &= \frac{P_n}{D} \\ r^2 \nabla^2 \phi - Et \frac{2a_p}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) &= -(1-\nu) r^2 \Omega \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 P_n は法線方向分布荷重であり、さらに

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

である。文献 6) においては、本論文と変位成分のとり方に差異があるため、構成式 (4) は異なっているものの、(8) 式の右辺を零とおいた同次微分方程式は一致する。

本論文においては、定数係数の微分方程式を導くために、以下で定義される変数 x, y を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\alpha}{2} (1+x) \\ \ln r &= \frac{y}{2} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) + \frac{1}{2} \ln(r_0 \cdot r_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(10) 式で定義された変数を用いると、殻の境界はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm 1 \quad (\theta = 0, \theta = \alpha) \\ y &= \pm 1 \quad (r = r_0, r = r_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。さらに、次式で定義される記号を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi} &= \frac{\beta^2}{Et} \phi, \quad \beta^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{t^2}, \quad K = 2a_p \beta^2 \\ \tilde{P}_n &= \frac{P_n}{D}, \quad \tilde{\Omega} = -\frac{(1-\nu)\beta^2}{Et} \Omega \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(10), (12) 式を用いて基本微分方程式 (8) を書き直すと

$$\left. \begin{aligned} L_1(w) + L_2(\tilde{\phi}) &= \tilde{P}_n e^s \\ L_1(\tilde{\phi}) - L_2(w) &= e^{s/2} \Delta \tilde{\Omega} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

と表わされ、ここに

$$\left. \begin{aligned} L_1(\) &= \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - 4 \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} \\ &\quad + 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} - 4 \frac{\partial^3}{\partial \bar{y}^3} + \frac{\partial^4}{\partial \bar{y}^4} \\ L_2(\) &= K \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \\ \bar{x} &= \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad a = \frac{2}{\alpha}, \quad b = \frac{2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \\ S &= 2y \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + 2 \ln(r_0 \cdot r_1) \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

(13) 式の一般解は

$$\left. \begin{aligned} w &= w^I + w^II + w^III \\ \tilde{\phi} &= \tilde{\phi}^I + \tilde{\phi}^II + \tilde{\phi}^III \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

と書け、ここに ()^I は特殊解を、()^{II} と ()^{III} はそれぞれ x, y 方向にフーリエ展開した余関数を示している。

3. 特殊解 $w^I, \tilde{\phi}^I$

鉛直方向に等分布荷重 P_V が作用した状態を考えると、法線方向分布荷重 P_n およびポテンシャル Ω は円周方向にフーリエ展開することにより、

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^M Q^m \cos \lambda_m x \\ \Omega &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^M \frac{a_p}{a \lambda_m} Q^m \sin \lambda_m x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

と表わされ、ここに

$$\left. \begin{aligned} Q^m &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2 P_V}{\lambda_m} \\ \lambda_m &= \frac{m\pi}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

であり、 M は採用したフーリエ級数の項数である。(16) 式を (13) 式へ代入して特殊解を求めると、 w^I と $\tilde{\phi}^I$ はそれぞれ以下のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} w^I &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^M (S_{1,m} e^s + R_{1,m} e^{s/2}) \cos \lambda_m x \\ \tilde{\phi}^I &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^M (S_{2,m} e^s + R_{2,m} e^{s/2}) \sin \lambda_m x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} S_{1,m} &= \frac{\delta_{1,m}}{(\delta_{1,m}^2 - \delta_{2,m}^2)} \tilde{Q}_m \\ S_{2,m} &= \frac{\delta_{2,m}}{(\delta_{1,m}^2 - \delta_{2,m}^2)} \tilde{Q}_m \\ R_{1,m} &= \frac{\delta_{4,m}}{(\delta_{3,m}^2 - \delta_{4,m}^2)} \tilde{Q}_m \\ R_{2,m} &= \frac{\delta_{3,m}}{(\delta_{3,m}^2 - \delta_{4,m}^2)} \tilde{Q}_m \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1,m} &= a^4 \lambda_m^4 - 20 a^2 \lambda_m^2 + 64 \\ \delta_{2,m} &= -3 a \lambda_m K \\ \delta_{3,m} &= a^4 \lambda_m^4 - 4 a^2 \lambda_m^2 \\ \delta_{4,m} &= -a \lambda_m K \\ \tilde{Q}_m &= \frac{Q^m}{D} \\ \tilde{Q}_m &= \frac{(1-\nu) a \lambda_m K}{2 E t} Q^m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

である。特殊解による面内変位 u, v は、(3), (4) 式を用いて

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{a \beta^2 \lambda_m} \left\{ \frac{e^{3/4 \cdot S}}{3} (32 + a^2 \lambda_m^2 + 3 \nu a^2 \lambda_m^2) S_{2,m} \right. \\ &\quad \left. + e^{1/4 \cdot S} (1 + \nu) a^2 \lambda_m^2 R_{2,m} \right\} \cos \lambda_m x \\ &\quad + U_p(y) - \frac{1}{a} V_p(x) \\ v &= \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{e^{3/4 \cdot S}}{3} (4 - a^2 \lambda_m^2 - 12 \nu) S_{2,m} \right. \\ &\quad \left. + e^{1/4 \cdot S} (2 - a^2 \lambda_m^2 - 2 \nu) R_{2,m} \right\} \sin \lambda_m x \\ &\quad + \frac{e^{1/4 \cdot S} (1 - \nu) a_p Q^m}{E t a \lambda_m} \sin \lambda_m x + \frac{dV_p(x)}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

と表わされる。ここで積分定数 U_p, V_p を決めるために、(3)c, (4)c 式を用いると、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} &\frac{e^S}{3 a \lambda_m} \{ (-a^4 \lambda_m^4 + 20 a^2 \lambda_m^2 - 64) S_{2,m} - 3 a \lambda_m K S_{1,m} \} \\ &+ \frac{e^{S/2}}{a \lambda_m} \{ (4 a^2 \lambda_m^2 - a^4 \lambda_m^4) R_{2,m} - a \lambda_m K R_{1,m} + \tilde{Q}_m \} \\ &+ \beta^2 e^{1/4 \cdot S} \left\{ \frac{dU_p(y)}{d\bar{y}} - U_p(y) + \frac{1}{a} V_p(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \frac{d^2 V_p(x)}{d\bar{x}^2} \right\} = 0 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで、(19) 式を用いると、(21) 式の左辺第 1 項および第 2 項が零となることが容易に確かめられる。すなわち、(21) 式の左辺が恒等的に零となる条件として、 U_p, V_p に関する以下の条件式を得る。

$$\left. \begin{aligned} r \frac{dU_p}{dr} - U_p &= k_0 \\ V_p + \frac{d^2 V_p}{d\theta^2} &= -k_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 k_0 は任意定数であり、 $k_0=0$ とおくと U_p および V_p は以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} U_p &= c_0 r \\ V_p &= c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 c_0, c_1, c_2 は定数である。(23) 式における $U_p, V_p, dV_p/d\theta$ はそれぞれ、 z 軸回り、 θ 方向、 r 方向の剛体運動を示しており、これらは u, v の計算において無視できる [Appendix 参照]。

4. 余関数

4.1 余関数 $w^II, \tilde{\phi}^II$

法線方向変位および応力関数を x 方向へフーリエ展開

し、次式のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} w^{\text{II}} &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^M w_{c,m}^{\text{II}}(y) \cos \lambda_m x \\ &+ \sum_{m=1,3,5,\dots}^M w_{s,m}^{\text{II}}(y) \sin \lambda_m x \\ \tilde{\phi}^{\text{II}} &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^M \tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}}(y) \cos \lambda_m x \\ &+ \sum_{m=1,3,5,\dots}^M \tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}}(y) \sin \lambda_m x \end{aligned} \right\} \dots\dots (24)$$

ここで $m=0$ の解については、以下と同様の方法にて容易に求まることから本論文では省略する。(24) 式を (13) 式の同次方程式へ代入すると、 $w_{c,m}^{\text{II}}$ と $\tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}}$ および $w_{s,m}^{\text{II}}$ と $\tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}}$ に関する二組の連立微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} L_3(w_{c,m}^{\text{II}}) + L_4(\tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}}) &= 0 \\ L_3(\tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}}) + L_4(w_{c,m}^{\text{II}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} L_3(w_{s,m}^{\text{II}}) - L_4(\tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}}) &= 0 \\ L_3(\tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}}) - L_4(w_{s,m}^{\text{II}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} L_3(\cdot) &= \frac{d^4}{d\bar{y}^4} - 4 \frac{d^3}{d\bar{y}^3} + (4 - 2a^2\lambda_m^2) \frac{d^2}{d\bar{y}^2} \\ &+ 4a^2\lambda_m^2 \frac{d}{d\bar{y}} + (a^4\lambda_m^4 - 4a^2\lambda_m^2) \\ L_4(\cdot) &= Ka\lambda_m \left(\frac{d}{d\bar{y}} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

ここで、(25)、(26) 式の解として

$$\left. \begin{aligned} w_{c,m}^{\text{II}} &= A_m \exp\{(\lambda+1)\bar{y}\} \\ \tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}} &= B_m \exp\{(\lambda+1)\bar{y}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{s,m}^{\text{II}} &= \hat{A}_m \exp\{(\hat{\lambda}+1)\bar{y}\} \\ \tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}} &= \hat{B}_m \exp\{(\hat{\lambda}+1)\bar{y}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (29)$$

とおき、(25)、(26) 式へ代入すると A_m と B_m および $\hat{A}_m$ と $\hat{B}_m$ に関する以下の連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_m f(\lambda) + B_m g(\lambda) &= 0 \\ A_m g(\lambda) + B_m f(\lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_m f(\hat{\lambda}) - \hat{B}_m g(\hat{\lambda}) &= 0 \\ \hat{A}_m g(\hat{\lambda}) - \hat{B}_m f(\hat{\lambda}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (31)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} w_{c,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^2 (A_{2j-1,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y} + A_{2j,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y}) + A_{5,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\ &+ A_{6,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} + A_{7,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + A_{8,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\ \tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^2 (\bar{T}_j A_{2j-1,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y} + \bar{T}_j A_{2j,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y}) + A_{5,m} e^{\bar{y}} (\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\ &- \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) + A_{6,m} e^{\bar{y}} (\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) \\ &+ A_{7,m} e^{\bar{y}} (\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} - \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) + A_{8,m} e^{\bar{y}} (\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\ &+ \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) \\ w_{s,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^2 (A_{2j+7,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y} + A_{2j+8,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y}) + A_{13,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\ &+ A_{14,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} + A_{15,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + A_{16,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \end{aligned} \right\} \dots\dots (39)$$

$$\left. \begin{aligned} f(X) &= \{X^2 - (1 + a\lambda_m)^2\} \{X^2 - (1 - a\lambda_m)^2\} \\ g(X) &= Ka\lambda_m X \quad (X = \hat{\lambda}, \lambda) \end{aligned} \right\} \dots\dots (32)$$

である。 A_m と B_m 、さらに $\hat{A}_m$ と $\hat{B}_m$ が非自明解を持つ条件として、 λ および $\hat{\lambda}$ に関する 8 次代数方程式を得るが、これらは同一の形をしており

$$f(X)^2 - g(X)^2 = 0 \dots\dots (33)$$

と書ける。一般に (33) 式の根は、(i) 8 根全てが実根の場合、(ii) 4 根が実根で残りの 4 根が虚根の場合、とに分けられる。まず (i) の場合を考えると、(33) 式の根は

$$X_{2j-1} = -X_{2j} = \xi_j \quad (j=1 \sim 4) \dots\dots (34)$$

と書け、ここに ξ_j は実数である。この時、(28)、(29) 式より余関数は以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} w_{c,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^4 (\hat{A}_{2j-1,m} e^{\bar{y}} \cosh \xi_j \bar{y} \\ &+ \hat{A}_{2j,m} e^{\bar{y}} \sinh \xi_j \bar{y}) \\ \tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^4 (\tilde{T}_j \hat{A}_{2j-1,m} e^{\bar{y}} \cosh \xi_j \bar{y} \\ &+ \tilde{T}_j \hat{A}_{2j,m} e^{\bar{y}} \sinh \xi_j \bar{y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (35)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{s,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^4 (\hat{A}_{2j+7,m} e^{\bar{y}} \cosh \xi_j \bar{y} \\ &+ \hat{A}_{2j+8,m} e^{\bar{y}} \sinh \xi_j \bar{y}) \\ \tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^4 (-\tilde{T}_j \hat{A}_{2j+7,m} e^{\bar{y}} \cosh \xi_j \bar{y} \\ &- \tilde{T}_j \hat{A}_{2j+8,m} e^{\bar{y}} \sinh \xi_j \bar{y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (36)$$

ここに、

$$\tilde{T}_j = \frac{-Ka\lambda_m \xi_j}{\{\xi_j^2 - (1 + a\lambda_m)^2\} \{\xi_j^2 - (1 - a\lambda_m)^2\}} \dots\dots (37)$$

であり、 $\hat{A}_{1,m} \sim \hat{A}_{16,m}$ は定数で殻の境界条件より決定される。

次に (ii) の場合を考えると、(33) 式の根は

$$\left. \begin{aligned} X_{2j-1} &= -X_{2j} = \eta_j \quad (j=1, 2) \\ X_{5,6} &= \pm \kappa \pm i\mu \end{aligned} \right\} \dots\dots (38)$$

と書け、ここに η_j 、 κ 、 μ は実数であり、 $i = \sqrt{-1}$ である。この時、(28)、(29) 式より余関数は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}} = & \sum_{j=1}^2 (-\bar{T}_j A_{2j+7,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y} - \bar{T}_j A_{2j+8,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y}) \\ & + A_{13,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) \\ & + A_{14,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} - \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) \\ & + A_{15,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} + \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) \\ & + A_{16,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} - \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (40)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_j &= \tilde{T}_j \quad (j=1, 2) \\ \bar{T}_3 &= \frac{-Ka\lambda_m(\kappa\bar{M}_1 + \mu\bar{M}_2)}{(\bar{M}_1)^2 + (\bar{M}_2)^2} \\ \bar{T}_4 &= \frac{-Ka\lambda_m(\mu\bar{M}_1 - \kappa\bar{M}_2)}{(\bar{M}_1)^2 + (\bar{M}_2)^2} \\ \bar{M}_1 &= \{\kappa^2 - \mu^2 - (1 + a\lambda_m)^2\} \{\kappa^2 - \mu^2 \\ &\quad - (1 - a\lambda_m)^2\} - 4\kappa^2\mu^2 \\ \bar{M}_2 &= 4\kappa\mu(\kappa^2 - \mu^2 - 1 - a^2\lambda_m^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

であり, $A_{1,m} \sim A_{16,m}$ は殻の境界条件より決定される定数である。

次に余関数 $w^{\text{II}}, \tilde{\phi}^{\text{II}}$ による面内変位を求めるが, その際に変位および応力関数については, 以下の場合について考えればよいことは明らかである。

$$\left. \begin{aligned} w &= A_m e^{(1+\lambda)\bar{y}} \cos \lambda_m x \\ \tilde{\phi} &= B_m e^{(1+\lambda)\bar{y}} \sin \lambda_m x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

この時, 面内変位は (3), (4) 式を用いて

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{B_m(r_0 r_1)^{-1/2}}{a\lambda_m \beta^2 \lambda} \{(\lambda^2 - 1)(\lambda + 1) \\ &\quad + (1 + \nu\lambda) a^2 \lambda_m^2\} e^{\lambda \bar{y}} \cos \lambda_m x \\ &\quad + U_c(y) - \frac{1}{a} V_c(x) \\ v &= \frac{B_m}{\beta^2 \lambda} (r_0 r_1)^{-1/2} \{-a^2 \lambda_m^2 \\ &\quad + (1 + \lambda)(1 - \nu\lambda)\} e^{\lambda \bar{y}} \sin \lambda_m x + \frac{dV_c(x)}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

と表わされる。ここで積分定数 U_c, V_c を決めるために, (3)c, (4)c 式を用いると, 次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} KA_m + \frac{B_m}{a\lambda_m \lambda} \{\lambda^2 - (1 + a\lambda_m)^2\} \{\lambda^2 - (1 - a\lambda_m)^2\} \\ - \beta^2 e^{1/4} S \left\{ \frac{dU_c(y)}{d\bar{y}} - U_p(y) + \frac{1}{a} V_p(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{a} \frac{d^2 V_p(x)}{dx^2} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

ここで, (30)b 式を用いると (44) 式の左辺第 1 項および第 2 項の和が零となることがわかり, (44) 式が成り立つ条件として (22) 式と同じ微分方程式を得る。すなわち, 3 章と同様に積分定数は剛体変位を示しており, u, v の計算においては無視できることがわかる。

4.2 余関数 $w^{\text{III}}, \tilde{\phi}^{\text{III}}$

法線方向変位および応力関数を y 方向へフーリエ展開して

$$w^{\text{III}} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^N w_{c,n}^{\text{III}}(x) \cos \lambda_n y$$

$$\left. \begin{aligned} & + \sum_{n=1,3,5,\dots}^N w_{s,n}^{\text{III}}(x) \sin \lambda_n y \\ \tilde{\phi}^{\text{III}} &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}(x) \cos \lambda_n y \\ & + \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}(x) \sin \lambda_n y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

とおく。ここに

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2}$$

であり, N は採用するフーリエ級数の項数である。(45)

式を (13) 式の同次方程式へ代入すると, $w_{c,n}^{\text{III}}, w_{s,n}^{\text{III}}, \tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}, \tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}$ に関する連立微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} L_5(w_{c,n}^{\text{III}}) + L_6(w_{s,n}^{\text{III}}) + L_7(\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}) \\ + L_8(\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}) &= 0 \\ L_5(w_{s,n}^{\text{III}}) - L_6(w_{c,n}^{\text{III}}) + L_7(\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}) \\ - L_8(\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}) &= 0 \\ L_5(\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}) + L_6(\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}) - L_7(w_{c,n}^{\text{III}}) \\ - L_8(w_{s,n}^{\text{III}}) &= 0 \\ L_5(\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}) - L_6(\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}) - L_7(w_{s,n}^{\text{III}}) \\ + L_8(w_{c,n}^{\text{III}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} L_5(\) &= \frac{d^4}{dx^4} + (4 - 2b^2\lambda_n^2) \frac{d^2}{dx^2} \\ &\quad + (b^4\lambda_n^4 - 4b^2\lambda_n^2) \\ L_6(\) &= -4b\lambda_n \frac{d^2}{dx^2} + 4b^3\lambda_n^3 \\ L_7(\) &= -K \frac{d}{dx} \\ L_8(\) &= Kb\lambda_n \frac{d}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

である。ここで, (46) 式の解として

$$\left. \begin{aligned} w_{c,n}^{\text{III}} &= \tilde{A}_n \exp(\tilde{\lambda}x), \quad w_{s,n}^{\text{III}} = \tilde{B}_n \exp(\tilde{\lambda}x) \\ \tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}} &= \tilde{C}_n \exp(\tilde{\lambda}x), \quad \tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}} = \tilde{D}_n \exp(\tilde{\lambda}x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

とおき, (46) 式へ代入すると, $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n$ に関する以下の連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_n \alpha_1 + \tilde{B}_n \alpha_2 - \tilde{C}_n \alpha_3 + \tilde{D}_n \alpha_4 &= 0 \\ -\tilde{A}_n \alpha_2 + \tilde{B}_n \alpha_1 - \tilde{C}_n \alpha_4 + \tilde{D}_n \alpha_3 &= 0 \\ \tilde{A}_n \alpha_3 - \tilde{B}_n \alpha_4 + \tilde{C}_n \alpha_1 + \tilde{D}_n \alpha_2 &= 0 \\ \tilde{A}_n \alpha_4 + \tilde{B}_n \alpha_3 - \tilde{C}_n \alpha_2 + \tilde{D}_n \alpha_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= a^4 \tilde{\lambda}^4 + 4a^2 \tilde{\lambda}^2 - 2a^2 \tilde{\lambda}^2 b^2 \lambda_n^2 \\ &\quad - 4b^2 \lambda_n^2 + b^4 \lambda_n^4 \\ \alpha_2 &= 4b^3 \lambda_n^3 - 4a^2 \tilde{\lambda}^2 b \lambda_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

$$\alpha_3 = Ka\tilde{\lambda}$$

$$\alpha_4 = Ka\tilde{\lambda}b\lambda_n$$

である。 $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n$ が非自明解を持つ条件として、以下の $\tilde{\lambda}$ に関する 16 次代数方程式を得る。

$$\{(\alpha_1 - \alpha_4)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2\} \{(\alpha_1 + \alpha_4)^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2\} = 0 \dots \dots \dots (51)$$

一般に (51) 式の根は次のような形に書くことができる。

$$\tilde{\lambda}_{4j-3, 4j-2} = \pm \zeta_j \pm i\vartheta_j \quad (j=1 \sim 4) \dots \dots \dots (52)$$

ここに、 ζ_j と ϑ_j は実数である。この時、(48) 式を用いて余関数は次のように表わされる。

$$w_{c,n}^{\text{III}} = \sum_{j=1}^4 \{ \tilde{A}_{4j-3,n} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x + \tilde{A}_{4j-2,n} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x + \tilde{A}_{4j-1,n} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x + \tilde{A}_{4j,n} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \}$$

$$w_{s,n}^{\text{III}} = \sum_{j=1}^4 \{ \tilde{A}_{4j-3,n} (T_j^* \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x - T_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) + \tilde{A}_{4j-2,n} (T_j^* \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x - T_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) + \tilde{A}_{4j-1,n} (T_j^* \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x + T_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) + \tilde{A}_{4j,n} (T_j^* \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x + T_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) \}$$

$$\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}} = \sum_{j=1}^4 \{ \tilde{A}_{4j-3,n} (S_j^* \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x - S_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) + \tilde{A}_{4j-2,n} (S_j^* \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x - S_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) + \tilde{A}_{4j-1,n} (S_j^* \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x + S_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) + \tilde{A}_{4j,n} (S_j^* \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x + S_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \}$$

$$\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}} = \sum_{j=1}^4 \{ \tilde{A}_{4j-3,n} (R_j^* \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x - R_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) + \tilde{A}_{4j-2,n} (R_j^* \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x - R_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) + \tilde{A}_{4j-1,n} (R_j^* \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x + R_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) + \tilde{A}_{4j,n} (R_j^* \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x + R_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \}$$

..... (53)

ここに、

$$T_j^* = \frac{2(M_1 N_1 + M_2 N_2)}{(M_1)^2 + (M_2)^2}$$

$$T_j^{**} = \frac{2(M_1 N_2 - M_2 N_1)}{(M_1)^2 + (M_2)^2}$$

$$S_j^* = \frac{2(M_3 N_3 + M_4 N_4)}{(M_3)^2 + (M_4)^2}$$

$$S_j^{**} = \frac{2(M_3 N_4 - M_4 N_3)}{(M_3)^2 + (M_4)^2}$$

$$R_j^* = \frac{-2(M_5 N_5 + M_6 N_6)}{(M_5)^2 + (M_6)^2}$$

$$R_j^{**} = \frac{-2(M_5 N_6 - M_6 N_5)}{(M_5)^2 + (M_6)^2}$$

$$M_1 = (Z_1 Z_2 - Z_3^2)^2 - Z_3^2 (Z_1 + Z_2)^2 - 16 b^2 \lambda_n^2 (Z_1^2 - Z_3^2) + K^2 a^2 (\kappa_j^2 - \mu_j^2) (1 - b^2 \lambda_n^2)$$

$$M_2 = 2 Z_3 (Z_1 + Z_2) (Z_1 Z_2 - Z_3^2) - 32 Z_1 Z_3 b^2 \lambda_n^2 + K^2 Z_3 (1 - b^2 \lambda_n^2)$$

$$N_1 = -4 b \lambda_n Z_1 (Z_1 Z_2 - Z_3^2) + 4 (Z_1 + Z_2) Z_3^2 b \lambda_n - K^2 a^2 b \lambda_n (\kappa_j^2 - \mu_j^2)$$

$$N_2 = -4 b \lambda_n Z_3 (Z_1 Z_2 - Z_3^2) - 4 Z_1 Z_3 b \lambda_n (Z_1 + Z_2) - K^2 Z_3 b \lambda_n$$

$$M_3 = (Z_1 Z_2 - Z_3^2)^2 - Z_3^2 (Z_1 + Z_3)^2 + 16 b^2 \lambda_n^2 (Z_1^2 - Z_3^2) - K^2 a^2 (\kappa_j^2 - \mu_j^2) (1 + b^2 \lambda_n^2)$$

$$M_4 = 2 Z_3 (Z_1 + Z_2) (Z_1 Z_2 - Z_3^2) + 32 Z_1 Z_3 b^2 \lambda_n^2 - K^2 Z_3 (1 + b^2 \lambda_n^2)$$

$$N_3 = 4 K a b^2 \lambda_n^2 (Z_3 \mu_j - Z_1 \kappa_j) - K a \kappa_j (Z_1 Z_2 - Z_3^2) + K Z_3 a \mu_j (Z_1 + Z_2)$$

$$N_4 = -4 K a b^2 \lambda_n^2 (Z_1 \mu_j + Z_3 \kappa_j) - K a \mu_j (Z_1 Z_2 - Z_3^2) - K Z_3 a \kappa_j (Z_1 + Z_2)$$

$$M_5 = (Z_1 Z_2 - Z_3^2)^2 - Z_3^2 (Z_1 + Z_2)^2 + 16 b^2 \lambda_n^2 (Z_1^2 - Z_3^2) + K^2 a^2 (\kappa_j^2 - \mu_j^2) (1 + b^2 \lambda_n^2)$$

$$M_6 = 2 Z_3 (Z_1 + Z_2) (Z_1 Z_2 - Z_3^2) + 32 Z_1 Z_3 b^2 \lambda_n^2 + K^2 Z_3 (1 + b^2 \lambda_n^2)$$

$$N_5 = K a \kappa_j b \lambda_n (Z_1 Z_2 - Z_3^2) - K (Z_1 + Z_2) Z_3 a \mu_j b \lambda_n - 4 K a b \lambda_n (Z_1 \kappa_j - Z_3 \mu_j)$$

$$N_6 = K a \mu_j b \lambda_n (Z_1 Z_2 - Z_3^2) + K (Z_1 + Z_2) Z_3 a \kappa_j b \lambda_n - 4 K a b \lambda_n (Z_1 \mu_j + Z_3 \kappa_j)$$

$$Z_1 = a^2 \kappa_j^2 - a^2 \mu_j^2 - b^2 \lambda_n^2$$

$$Z_2 = Z_1 + 4$$

$$Z_3 = 2 a^2 \kappa_j \mu_j$$

..... (54)

となり、 $\tilde{A}_{1,n} \sim \tilde{A}_{16,n}$ は殻の境界条件より決定される定数である。

次に余関数 $w^{\text{III}}, \tilde{\phi}^{\text{III}}$ による面内変位を求めると、(3)、(4) 式より以下のように求まる。

$$u = - \frac{e^{-1/4 \cdot S} e^{\tilde{\lambda} x}}{a \tilde{\lambda} \beta^2} \cdot \frac{(b \lambda_n \sin \lambda_n y - \cos \lambda_n y)}{(1 + b^2 \lambda_n^2)} \cdot \{ (a^2 \tilde{\lambda}^2 + \nu b^2 \lambda_n^2) \tilde{C}_n + (1 + \nu) b \lambda_n \tilde{D}_n \}$$

$$+ \frac{e^{-1/4 \cdot S} e^{\tilde{\lambda} x}}{a \tilde{\lambda} \beta^2} \cdot \frac{(\sin \lambda_n y + b \lambda_n \cos \lambda_n y)}{(1 + b^2 \lambda_n^2)} \cdot \{ (a^2 \tilde{\lambda}^2 + \nu b^2 \lambda_n^2) \tilde{D}_n - (1 + \nu) b \lambda_n \tilde{C}_n \}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{-1/4 \cdot S} e^{\tilde{\lambda} x}}{a \tilde{\lambda} \beta^2} \left[\{(-b^2 \lambda_n^2 - \nu a^2 \tilde{\lambda}^2) \tilde{C}_n \right. \\
& - (1 + \nu) b \lambda_n \tilde{D}_n \} \cos \lambda_n y \\
& + \{(-b^2 \lambda_n^2 - \nu a^2 \tilde{\lambda}^2) \tilde{D}_n \\
& + (1 + \nu) b \lambda_n \tilde{C}_n \} \sin \lambda_n y \left. \right] + \tilde{U}_c(y) \\
& - \frac{1}{a} \tilde{V}_c(x) \\
v = & \frac{e^{-1/4 \cdot S} e^{\tilde{\lambda} x}}{\beta^2} \cdot \frac{(b \lambda_n \sin \lambda_n y - \cos \lambda_n y)}{(1 + b^2 \lambda_n^2)} \\
& \cdot \{ (a^2 \tilde{\lambda}^2 + \nu b^2 \lambda_n^2) \tilde{C}_n + (1 + \nu) b \lambda_n \tilde{D}_n \} \\
& + \frac{e^{-1/4 \cdot S} e^{\tilde{\lambda} x}}{\beta^2} \cdot \frac{(-\sin \lambda_n y - b \lambda_n \cos \lambda_n y)}{(1 + b^2 \lambda_n^2)} \\
& \cdot \{ (a^2 \tilde{\lambda}^2 + \nu b^2 \lambda_n^2) \tilde{D}_n - (1 + \nu) b \lambda_n \tilde{C}_n \} \\
& + \frac{d \tilde{V}_c(x)}{dx} \\
& \dots \dots \dots (55)
\end{aligned}$$

ここで積分定数 $\tilde{U}_c, \tilde{V}_c$ を決めるために, (3)c, (4)c 式を用いると, 次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{\tilde{\lambda} x} \cos \lambda_n y}{a \tilde{\lambda} (1 + b^2 \lambda_n^2)} \{ \tilde{C}_n (\alpha_1 - \alpha_2 b \lambda_n) + \tilde{D}_n (\alpha_2 + \alpha_1 b \lambda_n) \\
& + K \tilde{A}_n \} + \frac{e^{\tilde{\lambda} x} \sin \lambda_n y}{a \tilde{\lambda} (1 + b^2 \lambda_n^2)} \{ \tilde{C}_n (-\alpha_1 b \lambda_n - \alpha_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{D}_n (\alpha_1 - \alpha_2 b \lambda_n) + K \tilde{B}_n \} + \beta^2 e^{1/4 \cdot S} \left\{ \frac{d \tilde{U}_c(y)}{dy} \right. \\
& \left. - \tilde{U}_c(y) + \frac{1}{a} V_p(x) + \frac{1}{a} \frac{d^2 V_p(x)}{d \tilde{x}^2} \right\} = 0 \\
& \dots \dots \dots (56)
\end{aligned}$$

ここで, (49), (50) 式の関係を用いると, (56) 式の左辺第 1 項と第 2 項がそれぞれ零となることがわかり, (56) 式が成り立つ条件として (22) 式と同じ微分方程式を得る。すなわち, 特殊解および余関数より計算される面内変位 u, v において, 積分定数は全て剛体変位であり, これらは変位 u, v の計算においては無視できることがわかる。

5. 境界条件

らせん殻の境界条件式を考える際に, 一般解の中に余弦関数および正弦関数以外の関数が含まれており, これらの関数をフーリエ展開する必要がある。その際に, フーリエ係数を決定する方法として, 最小二乗法による方法^{17), 18)}と, point matching による方法¹⁹⁾とが従来用いられている。本論文では計算の簡便性を考慮し, 最小二乗法により係数を決定している。以下に必要な関数のフーリエ展開を示す。

$$\begin{aligned}
Y e^{\beta_1 Y} = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \frac{2 \beta_1^2 \sin \lambda_n}{(\beta_1^2 + \lambda_n^2)} \left\{ \frac{\lambda_n \sinh \beta_1}{\beta_1^2} - \frac{2 \lambda_n \cosh \beta_1}{\beta_1 (\beta_1^2 + \lambda_n^2)} \right\} \cos \lambda_n Y \\
& + \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \frac{2 \beta_1^2 \sin \lambda_n}{(\beta_1^2 + \lambda_n^2)} \left\{ \frac{\sinh \beta_1}{\beta_1} - \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\beta_1^2} \right) \frac{\cosh \beta_1}{(\beta_1^2 + \lambda_n^2)} \right\} \sin \lambda_n Y \dots \dots \dots (57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\beta_1 Y} \cos \beta_2 Y \cosh \beta_3 Y = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \left[\frac{\{ -(\beta_1 + \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) \}}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \right. \\
& + \frac{\{ -(\beta_1 - \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) \}}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \\
& + \frac{\{ (\beta_1 + \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) - (\beta_2 - \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) \}}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \\
& + \frac{\{ (\beta_1 - \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3) - (\beta_2 - \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) \}}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \left. \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cdot \cos \lambda_n Y \\
& + \left\{ \frac{(\beta_1 + \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \right. \\
& + \frac{(\beta_1 - \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \\
& + \frac{(\beta_1 + \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 - \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \\
& + \left. \frac{(\beta_1 - \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_2 - \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cdot \sin \lambda_n Y \dots \dots \dots (58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\beta_1 Y} \sin \beta_2 Y \cosh \beta_3 Y = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \left[\frac{\{ (\beta_1 + \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) \}}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \right. \\
& + \frac{(\beta_1 - \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \\
& + \frac{\{ -(\beta_1 + \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) - (\beta_2 - \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) \}}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \\
& + \frac{\{ -(\beta_1 - \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) - (\beta_2 - \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3) \}}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \left. \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cos \lambda_n Y \\
& + \left\{ \frac{(\beta_1 + \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) - (\beta_2 + \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\beta_1 - \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3) - (\beta_2 + \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \\
& + \frac{(\beta_1 + \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) - (\beta_2 - \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \\
& + \frac{(\beta_1 - \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3) - (\beta_2 - \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \left\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cdot \sin \lambda_n Y \right] \dots \dots \dots (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\beta_1 Y} \cos \beta_2 Y \sinh \beta_3 Y = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \left[\left\{ \frac{-(\beta_1 + \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \right. \right. \\
& + \frac{(\beta_1 - \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \\
& + \frac{(\beta_1 + \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) - (\beta_2 - \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \\
& + \left. \frac{-(\beta_1 - \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_2 - \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cdot \cos \lambda_n Y \\
& + \left\{ \frac{(\beta_1 + \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \right. \\
& + \frac{-(\beta_1 - \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) - (\beta_2 + \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \\
& + \frac{(\beta_1 + \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 - \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \\
& + \left. \frac{-(\beta_1 - \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) - (\beta_2 - \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cdot \sin \lambda_n Y \left] \dots \dots \dots (60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\beta_1 Y} \sin \beta_2 Y \sinh \beta_3 Y = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \left[\left\{ \frac{(\beta_1 + \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \right. \right. \\
& + \frac{-(\beta_1 - \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) - (\beta_2 + \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \\
& + \frac{-(\beta_1 + \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 - \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \\
& + \left. \frac{(\beta_1 - \beta_3) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_2 - \lambda_n) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cdot \cos \lambda_n Y \\
& + \left\{ \frac{(\beta_1 + \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) - (\beta_2 + \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \right. \\
& + \frac{-(\beta_1 - \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 + \lambda_n)^2} \\
& + \frac{(\beta_1 + \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 + \beta_3) - (\beta_2 - \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 + \beta_3)}{(\beta_1 + \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \\
& + \left. \frac{-(\beta_1 - \beta_3) \sin \beta_2 \sinh(\beta_1 - \beta_3) + (\beta_2 - \lambda_n) \cos \beta_2 \cosh(\beta_1 - \beta_3)}{(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \lambda_n)^2} \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cdot \sin \lambda_n Y \left] \dots \dots \dots (61)
\end{aligned}$$

ここに、 Y を $x(y)$ にして、 λ_n を $\lambda_m(\lambda_n)$ にすれば必要な関数のフーリエ展開が求められる。

以上の式を用いることにより、各種境界条件式が求まり、一般解に含まれる積分定数が決定される。

6. 数値結果と考察

らせん殻の数値計算にあたり、殻の曲げ剛性は常に一定とし、材料定数、境界条件、ピッチを変化させ、さらに Wan⁶⁾ の論文において使用されているパラメータ δ と同じ意味を有するパラメータ K を用いて、殻の力学的挙動を調べる。なお、フーリエ級数の項数については、有効数字 5 桁まで求めた結果、変位・応力共に $M = N = 21$ 項採れば十分であることが確かめられた。

(例題 1) らせん殻の形状は、

$$r_0 = 5 \text{ m}, r_1 = 10 \text{ m}, \alpha = \pi/2 \text{ rad.}$$

とおき、殻のピッチは 5 m とする。材料定数は曲げ剛性が一定となるように、Young 係数、殻厚、Poisson 比を変化させ以下の三つの場合を考える。

$$(M-1) \quad E = 1.66 \times 10^7 \text{ t/m}^2, t = 5 \text{ cm}, \nu = 0.2, K = 108$$

$$(M-2) \quad E = 2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2, t = 10 \text{ cm}, \nu = 1/6, K = 54$$

$$(M-3) \quad E = 2.673 \times 10^5 \text{ t/m}^2, t = 20 \text{ cm}, \nu = 0.1, K = 27$$

境界条件としては、円弧辺の面内境界条件を、変位拘束および応力拘束とに分けて、以下の四つの場合を考える。

$$(B-1) \quad \begin{cases} w = M_\theta = u = N_{r\theta} = 0 & (x = \pm 1) \\ w = \partial w / \partial r = N_r = N_{r\theta} = 0 & (y = \pm 1) \end{cases}$$

$$(B-2) \quad \begin{cases} w = M_\theta = u = N_{r\theta} = 0 & (x = \pm 1) \\ w = \partial w / \partial r = u = v = 0 & (y = \pm 1) \end{cases}$$

Fig. 3 (a) Normal displacement W

Fig. 3 (b) Bending moment M_r

Fig. 3 (c) Shearing force $N_{r\theta}$

Fig. 4 (a) Normal displacement W

Fig. 4 (b) Bending moment M_r

Fig. 4 (c) Shearing force $N_{r\theta}$

$$(B-3) \begin{cases} w=M_\theta=u=N_{r\theta}=0 & (x=\pm 1) \\ w=M_r=N_r=N_{r\theta}=0 & (y=\pm 1) \end{cases}$$

$$(B-4) \begin{cases} w=M_\theta=u=N_{r\theta}=0 & (x=\pm 1) \\ w=M_r=u=v=0 & (y=\pm 1) \end{cases}$$

荷重条件としては、等分布鉛直荷重 $P_V=0.3 \text{ t/m}^2$ として計算した。

Fig. 3, 4 においては、上記の条件の下で計算した、 $x=0$ における法線方向変位 w 、曲げモーメント M_r 、面内剪断力 $N_{r\theta}$ の分布を示した。なお、同一の条件を有する扇形板のたわみ w 、曲げモーメント M_r の結果も併せて図示し、図中において“Sector”と示した。材料定数 (M-3)、境界条件 (B-1)、(B-3) のらせん殻の結果は、扇形板の結果に近い値を示し、図においては扇形板とほぼ同一の曲線となる。また、文献 11) より、膜理論が成立すると仮定すれば、鉛直方向等分布荷重が载荷した時には、殻全体に $-r\sqrt{a_p^2+r^2}\cdot P_V/2a_p$ の面内剪断力が作用することになり、Fig. 3 (c), 4 (c) にその分布を示した。さらに Fig. 4 においては、材料定数を (M-2)、境界条件を (B-4) として、有限要素解¹¹⁾の結果を示し解析解との比較を行っている。

(例題 2) らせん殻の形状として以下の場合を考える。

$$r_0=5 \text{ m}, r_1=10 \text{ m}, \alpha=2/3 \text{ rad.}$$

材料定数およびピッチの値は、曲げ剛性の他にパラメータ K の値が等しくなるように、以下の三つの場合を考える。

- 1) $2\pi a_p=5 \text{ m}, E=2.1\times 10^6 \text{ t/m}^2$
 $t=10 \text{ cm}, \nu=0.0, K=55$
- 2) $2\pi a_p=3.5 \text{ m}, E=6.12\times 10^6 \text{ t/m}^2$
 $t=7 \text{ cm}, \nu=0.0, K=55$
- 3) $2\pi a_p=2.0 \text{ m}, E=3.28\times 10^7 \text{ t/m}^2$
 $t=4 \text{ cm}, \nu=0.0, K=55$

境界条件としては、以下のように周辺固定とする。

$$\begin{cases} w=\partial w/r\partial\theta=u=v=0 & (x=\pm 1) \\ w=\partial w/\partial r=u=v=0 & (y=\pm 1) \end{cases}$$

荷重条件は、鉛直方向等分布荷重 $P_V=1.0 \text{ t/m}^2$ として計算した。

Fig. 5 には、上記の条件の下に、 $x=0$ における法線方向変位 w 、曲げモーメント M_r 、面内剪断力 $N_{r\theta}$ の分布を示した。一般解からもわかるように、法線方向等分布荷重が作用した場合には、パラメータ K の値が等しければたわみ w が等しく、さらに Poisson 比が等しければ曲げモーメントも等しくなる。荷重条件が鉛直方向等分布荷重の場合には、(19) 式の $R_{j,m}$ の項が影響して、たわみ・曲げモーメント共に等しくならないが、Fig. 5 にみられるように、たわみおよび曲げモーメントはほぼ一つの曲線に入ってしまうことがわかる。

以上の数値結果より、らせん殻の力学的特徴をまとめ

Fig. 5 (a) Normal displacement W

Fig. 5 (b) Bending moment M_r

Fig. 5 (c) Shearing force $N_{r\theta}$

ると次のとおりとなる。

- 1) 円弧辺の面内境界条件が応力拘束の場合には、面内剛性が大きくなるにつれ、殻の挙動は同一の曲げ剛性

を有する扇形板の挙動から離れていくが、両者の間には大きな差異はない。

2) 円弧辺の面内境界条件が変位拘束の場合には、単純支持された殻の円弧辺内側の近傍で負の曲げモーメントが生じ、さらに固定支持された円弧辺内側の曲げモーメントが外側の曲げモーメントより小さな値を示したり、扇形板からは類推できないような挙動を示す。

3) 曲げ剛性およびパラメータ K の値が一定であれば、殻のピッチが小さくなるにつれ面内剛性は大きくなり、面内剪断力も大きな値を示す。

4) 変位拘束の境界条件で、面内剛性が大きくなるにつれ、曲げモーメントは減少し面内剪断力が増加する傾向があるが、Flügge and Geyling²⁰⁾ に指摘されるように、負の Gauss 曲率を有する殻においては、膜理論解では曲げ理論解を近似し得ないことがわかる。

5) 解析解と有限要素解との比較により、従来用いられている有限要素解は、変位・応力共に十分の精度を有していることがわかる。

7. おわりに

本論文においては、フーリエ級数による手法を用いて偏平らせん殻の解析解を求め、数値計算例によりらせん殻の力学的挙動を調べた。本論文の特徴を要約すると以下のとおりとなる。

1) 偏平らせん殻の基本微分方程式に、変数変換を施すことにより定数係数の連立偏微分方程式を誘導した。

2) 法線方向変位および応力関数を、円周方向だけでなく半径方向にもフーリエ展開することにより、基本微分方程式の余関数を求めた。

3) 得られた一般解は、殻周辺において任意の境界条件を扱うことができ、さらに面内変位の誘導においては、積分定数が全て剛体変位であることを示した。

4) 数値結果より、らせん殻の力学的挙動には、殻のピッチだけでなく、殻の面内剛性、面内境界条件も影響を及ぼすことを明らかにした。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、御指導を頂きました早稲田大学教授平嶋政治先生、また有益な御助言を頂きました東京電機大学助教授松井邦人先生、早稲田大学講師依田照彦先生に深く感謝致します。また、数値計算には東京電機大学計算機センター FACOM M-160 を使用したことを付記する。

<Appendix>

図-A・1 に示すように、デカルト座標系の基底ベクトルを $\langle i, j, k \rangle$ とし、らせん殻中央面上の基底ベクトルを $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ とすると、これらの関係式は偏平近似を用いて

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & -a_p \sin \theta / r \\ \cos \theta & \sin \theta & a_p \cos \theta / r \\ a_p / r & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} \cdots \cdots (A \cdot 1)$$

と表わせる。 i, j 方向の剛体移動を

Fig. A.1 Base vectors of shell

$$U_T = U_x i + U_y j \cdots \cdots (A \cdot 2)$$

とおくと、(A・1) 式より e_1, e_2 方向の剛体変位 V_θ, V_R が

$$V_\theta = -U_x \sin \theta + U_y \cos \theta \cdots \cdots (A \cdot 3)$$

$$V_R = U_x \cos \theta + U_y \sin \theta \cdots \cdots (A \cdot 4)$$

となる。次に Z 軸回りの剛体回転を考えると、それによる剛体変位は

$$U_R = \theta_z k \times (xi + yj) \cdots \cdots (A \cdot 5)$$

となり、(A・1) 式より e_1 方向の剛体変位 U_θ は

$$U_\theta = \theta_z r \cdots \cdots (A \cdot 6)$$

となる。以上で (23) 式における積分定数 $U_p, V_p, dV_p/d\theta$ は全て剛体変位であることがわかる。

参 考 文 献

- 1) Reissner, E., "On Finite Twisting and Bending of Circular Ring Sector Plates and Shallow Helicoidal Shells", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 11, pp. 473~483, 1953.
- 2) Knowles, J.K. and E. Reissner, "Note on Stress-Strain Relations for Thin Elastic Shells", Journ. of Math. and Phys. 37 (1958), pp. 269~282.
- 3) Reissner, E., "Small Rotationally Symmetric Deformations of Shallow Helicoidal Shells", J. Appl. Mech., 22, pp. 31~34, 1955.
- 4) Cohen, J.W., "The Inadequacy of the Classical Stress-Strain Relations for the Right Helicoidal Shell", Proc. I.U.T.A.M. Symposium on Shell Theory, 1959, pp. 415~433, Amsterdam 1960.
- 5) O'Mathuna, D., "Rotationally Symmetric Deformations in Helicoidal Shells", Journ. of Math. and Phys. 42 (1963), pp. 85~111.
- 6) Wan, F.Y.M., "Pure Bending of Shallow Helicoidal Shells", J. Appl. Mech., Vol. 35 (1968), pp. 387~392.
- 7) Hirashima, M. and M. Iura, "Analysis of Shallow Right Helicoidal Shells by the Stress Function Method", Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 29, pp. 51~64.
- 8) 西村敏雄:「テンソルとシェル理論」, 彰国社, 1977.
- 9) 神園勝彦, 西村敏雄:「スパイラル・シェルの解析」, 日本建築学会学術講演梗概集, 昭和 51 年 10 月.
- 10) 内山武司, 土橋由造:「折版階段及び螺旋階段の構造設計」, 日本建築学会論文報告集, 第 265 号, 昭和 53 年 3 月.
- 11) 平嶋政治, 井浦雅司:「混合型の有限要素による Right Helicoidal Shell の解析」, 日本鋼構造協会マトリックス解析法研究論文集, 昭和 54 年 6 月.
- 12) 内山武司, 土橋由造:「鉄筋コンクリート螺旋階段の弾塑性解析」, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和 52 年 10 月.
- 13) Cusens, A.R., "Test on Helical Stairs", Concrete and Constructional Engineering, Oct., 1964, pp. 357~364.
- 14) 土生修二, 平嶋政治, 井浦雅司:「集中荷重をうけるらせん板の実験的研究」, 第 7 回土木学会関東支部年次研究発表会, 昭和 55 年 1 月.

- 15) Young, Y.F. and A.C. Scordelis, "An Analytical and Experimental Study of Helicoidal Girders", Proc. ASCE, ST 5, Sept., 1958.
- 16) Abdul-Baki, A. and A.Shukair, "Continuous Helicoidal Girders", Proc. ASCE, ST 10, Oct., 1973.
- 17) 坪井善勝:「曲面構造」, 丸善, 1965.
- 18) 角野晃二:「偏平ハイパボリックパラボロイドシェル応力のフーリエ解析 (I)」, 日本建築学会論文報告集, 第 98 号, 1964.
- 19) Yokoo, Y., Mizuno, K., and Matsunaga, H., "Fourier Analysis of A Shallow Hyperbolic Paraboloidal Shell with Generator Boundaries. (I)", Trans. of A.I.J. No. 177, 1970.
- 20) Flügge, W. and F.T. Geyling, "A General Theory of Deformations of Membrane Shells", Proc. Int. Assoc. for Bridge and Struc. Eng., 1957, pp. 23~45.

SYNOPSIS

UDC : 624.074.4

ANALYTICAL SOLUTIONS OF SHALLOW RIGHT HELICOIDAL SHELLS BY THE STRESS FUNCTION METHOD

by MASASHI IURA, Assistant of Tokyo Denki Univ., Member of A.I.J.

The paper is concerned with a bending theory of a shallow right helicoidal shell subjected to a uniformly distributed load in the vertical direction. The general solutions of the shell are applicable to any prescribed boundary condition along radial and circumferential edges of the shell.

New independent variables are introduced in order to obtain the fundamental differential equations with constant coefficients. Then analytical solutions of the equations have been sought by expanding the normal displacement and the stress function in the Fourier-series along the radial and circumferential directions.

It has been found that not only the pitch of the shell but also the boundary conditions and the material properties are responsible for a significant difference of the mechanical behavior between right helicoidal shells and sector plates.