円筒の渦励振に関する研究

その3 連続体の渦励振モデル

正会員 田 村 幸 雄*
正会員 天 野 晶 彦**

記号

A_c : 円筒の断面積, $\bar{C}$: 後流振動子の減衰係数, C_c : 円筒の内部粘性減衰係数, C_D : 抗力係数, C_L : 揚力係数, C_{L0} : 静止円筒の揚力係数振幅, C_{Lr} : 基準位置での揚力係数, d : 円筒直径, E_c : 円筒のヤング係数, f : マグナス効果に関連する定数, h : 後流振動子の幅, h^* : 後流振動子の無次元幅 $= h/d$, I_c : 円筒の断面二次モーメント, $\bar{I}$: 後流振動子の回転慣性 $= 2\rho \bar{l}h(d/2 + \bar{l})^2$, $\bar{k}$: 後流振動子の回転剛性 $= 2\rho V^2 \bar{l}(d/2 + \bar{l})$, $\bar{l}$: 後流振動子の長さの1/2, $\bar{l}^*$: 後流振動子の無次元長さの1/2 $= \bar{l}/d$, m^* : 定数 $= 1/(0.5 + \bar{l}^*)$, n : 質量パラメータ $= \rho d^2/(2\rho_c A_c)$, S : 静止円筒のストローハル数, s : 円筒の長さ, T : Runge-Kutta 解の無次元計算時間長, t : 時刻変数, V , $V(z)$: 流速, V_r : 基準位置での流速, W , $W(z)$: 流速の円筒軸方向変化を表わす関数, X_i , $X_i(z)$: i 次固有モード形, Y : 円筒の無次元変位 $= y/d$, Y_r : 基準位置での円筒の無次元変位 $= y_r(t)/d$, Y_{ro} : 基準位置での円筒の無次元変位振幅, y , $y(z, t)$: 円筒の変位, $y_r(t)$: 基準位置における円筒の変位, Z : 無次元 z 座標 $= z/s$, z : 円筒軸に沿った z 座標, z_r : 基準位置, α : 後流振動子の回転角変位, ζ : 後流振動子の減衰定数 $= \bar{C}/(2\omega_0 \bar{I}) \div f/(2\sqrt{2}\pi^2 \bar{l}^*)$, η : 円筒の構造減衰定数, η_i : 円筒の i 次構造減衰定数, μ : 無次元振動数, ν : 無次元流速 $= \pi^* V/(\omega_0 d)$, ν_r : 基準位置での無次元流速 $= \pi^* V_r/(\omega_0 d)$, π : 円周率, π^* : 定数 $= 2\pi S$, ρ : 流体密度, ρ_c : 円筒密度, τ : 無次元時刻変数 $= \omega_0 t$, τ_i : 無次元時刻変数 $= \omega_i t$, ω_0 : 円筒の固有円振動数, ω_i : 円筒の i 次固有円振動数, ω_w : 渦放出の円振動数

1. 序論

流れの中に置かれた円筒状物体が、カルマン渦によって流れ直角方向に振動する現象（渦励振現象と呼ぶ）の定式化に関して、筆者の一人は既報の論文（その1¹⁾、その2²⁾）で数学的モデルを提案した。これは、非線形微分方程式でその運動が記述される後流振動子を円筒の背後に仮想したモデルであり、2次元円筒を対象としている。亜臨界レイノルズ数領域の2次元一様流中の渦励振現象に対しては、様々な渦励振特有の性状を含めて実験結果を良く表現するものであることが示された。

本論文の一部は、昭和55年大会学術講演会にて発表した。また、1983年3月の国際風工学会議にて本論文の内容を発表した。

* 東京工芸大学 講師・工博

** 鹿島建設(株)電子計算センター・工修

(昭和57年12月27日原稿受理日、昭和58年10月29日改訂原稿受理日、討論期限昭和59年6月末日)

実際の構造物に発生する自然風中での渦励振は、そのレイノルズ数が亜臨界領域から極超臨界領域の範囲に亘る3次元乱流中の、有限長円筒での現象である。従来、亜臨界領域での現象は比較的知られており、極超臨界領域での現象に未知な部分が多かったが、最近になって超高RC煙突での本格的な観測が行われる様になり、極超臨界領域での性状も明らかにされつつある³⁾⁴⁾。この様な円筒状構造物や円筒状部材の渦励振現象を予測することが、現実の問題であって、2次元円筒の渦励振現象は主として実験室内に限られる問題である。ただし、その発生機構や振動性状の基本的な部分については、この2次元円筒の渦励振現象の中で詳らかにされている。

以上の観点から、円形断面を持つ有限長連続体（以下、簡単に3次元円筒と呼ぶ）の渦励振現象を予測するために、2次元円筒の渦励振モデルを拡張し、3次元円筒の渦励振モデルを導いた。

2. 2次元円筒の渦励振モデル

2次元円筒の渦励振モデルは、次の方程式で表される²⁾。

$$\ddot{\alpha} - 2\zeta\nu\{\dot{\alpha} - (4f^2/C_{L0})\alpha^2\} + \nu^2\alpha = -m^*\ddot{Y} - \nu\pi^*\dot{Y} \quad (1a)$$

$$\ddot{Y} + [2\eta + n(f + C_D)\nu/\pi^*]\dot{Y} + Y = -fn\nu^2\alpha/\pi^{*2} \quad (1b)$$

$$C_L = -f(\alpha + \pi^*\dot{Y}/\nu) \quad (1c)$$

ここで、

$$m^* = 1/(0.5 + \bar{l}^*) \quad (2a)$$

$$\zeta = f/(2\sqrt{2}\pi^2 \bar{l}^*) \quad (2b)$$

$$S = \omega_0 d/(2\pi V) = 1/\sqrt{4\pi h^*(0.5 + \bar{l}^*)} \quad (2c)$$

であり、 $(\cdot)$ は $\tau = \omega_0 t$ による微分を表す。亜臨界レイノルズ数領域では、式中のパラメータの値は、 $\bar{l}^* = 1.1$, $h^* = 1.25$, $f = 1.16$, $C_{L0} = 0.4$, $C_D = 1.2$ および $S = 0.2$ となる¹⁾²⁾。(1a) 式は後流振動子の運動方程式を、(1b) 式は2次元円筒の運動方程式を表す。2次元円筒の渦励振現象は、静止円筒に関する上述のパラメータの値を用いて、円筒の質量パラメータ n および減衰定数 η を与えさえすれば予測できる。文献2)では、亜臨界領域における多くの実験値と、この渦励振モデルの解が非常に

Fig. 1 Runge-Kutta solutions of the mathematical model : Eqs. (1a), (1b) and (1c).

Fig. 2 Traces of the Runge-Kutta solutions of Eqs. (1a), (1b) and (1c). (The same values of the parameters in the equations as for Fig. 1 are used and with $T=600 \pi$)

良く一致することが示されている。

Fig. 1 および 2 は, Runge-Kutta 法による渦励振モデル (1a), (1b), (1c) 式の数値解の一例である。計算は, 無次元流速 $\nu=0.8$ から $\nu=1.6$ まで行い, 流速の増減幅は $\Delta\nu=0.02$, 時間刻みは $\Delta\tau=2\pi/100$ である。Fig. 1 中の T は無次元計算時間であり, 時間刻みが $\Delta\tau=2\pi/100$ であるので, $T=80\pi, 160\pi, 240\pi, 600\pi$ はそれぞれ 4 000, 8 000, 12 000, 30 000 ステップの計算を, 各流速値に対して行ったことを意味する。縦軸の Y_0 および $\bar{C}_L$ は, 最後の 10 ピーク値の平均振幅である。各流速値に対する初期値は, 1 段階前の流速値における変位と速度の最終値とした。

文献 2) では, Runge-Kutta 解については流速増加の場合のみが示されているが, ここでは流速減少の場合も示している。Fig. 1 からは, 定常状態における解が適当に計算時間 T を大きくしないと得られないことが分る。そしてその解は, 計算時間 T の増加に伴って定常状態における数学的近似解(後述の (12) 式)に近づいていく。Fig. 2 は Runge-Kutta 解の時系列波形であり, 計算時間 $T=600\pi$ (30000 ステップ) の場合の初めの 100π について, いくつかの渦励振状態を示した。尚, 各波形の振幅スケールは図によって異っている。この図からは, 時間とともに定常振幅に漸近していく様子が分り, なかにはうなりに似た振幅変調も見られる。この振幅変調も時間とともに減少していき, 一定振幅の定常波形に近づいていくのであるが図には示されていない。Fig. 2 の計算時間 $T=600\pi$ は, Fig. 1 から分る様に最大振幅, 共振流速, あるいは解が別のリミットサイクルにジャンプする流速等を得るには十分な長さである。

3. 3次元円筒の渦励振モデル

3.1 2次元渦励振モデルの3次元円筒への拡張

実際の問題では, 1章で述べたとおり, 2次元円筒ではなく有限長連続体としての円筒に生ずる渦励振を考えなくてはならない。そこで, この様な3次元円筒が渦によって流れ直角方向へのみ運動する場合を考える。

次のことを仮定する: (i) 軸方向の各点で局所的に流れの2次元性が保持され, 従って2章の2次元渦励振モデルが軸方向各点で適用できる。(ii) 円筒は調和振動しており, その動的変形は円筒の固有振動モードの一つに相似である。

仮定(i)は, 気流の3次元性が無視されることを意味しており, 3次元的な流れが円筒端部の近傍のみに限定される様な, アスペクト比 s/d の十分大きい円筒に対して妥当である。仮定(ii)は, (1a) 式の様な非線形方程式には通常の線形理論が使えないための数学的な要求によるものであり, 一つの固有振動モードのみが卓越する場合に妥当となる。これと同様の仮定は, 2次元角柱のギャロピングの準定常理論を連続体のギャロピング理論

へ拡張した Novak⁵⁾ も用いている。

仮定(i)から, 3次元円筒の渦励振に関する数学的モデルが次式で与えられる。

$$\bar{I} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \bar{C} \left(1 - \frac{4f^2}{C_{Lo}^2} \alpha^2 \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \bar{k} \left(\alpha + \frac{1}{V} \frac{\partial y}{\partial t} \right) = - \frac{\bar{I}}{\frac{d}{2} + \bar{l}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots \dots \dots (3a)$$

$$\rho_c A_c \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C_c I_c \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial z^4} + E_c I_c \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = - \frac{1}{2} \rho V^2 d \left\{ f \left(\alpha + \frac{1}{V} \frac{\partial y}{\partial t} \right) + C_D \frac{1}{V} \frac{\partial y}{\partial t} \right\} \dots \dots (3b)$$

仮定(ii)から, 軸方向の任意位置での円筒変位は次の様に書ける。

$$y(z, t) = y_r(t) \cdot X_i(z) \dots \dots \dots (4a)$$

ここで, $X_i(z)$ は i 次固有モード形で, 基準位置 z_r において $X_i(z_r)=1$ となる様に規準化されている。

さらに, 平均流速の軸方向変化を考えて, 平均流速を次の様に表す。

$$V(z) = V_r \cdot W(z) \dots \dots \dots (4b)$$

ここで, $W(z)$ は $W(z_r)=1$ となる様に規準化されている。

また, (3b) 式から分る様に円筒断面の諸定数が軸方向に一定であることを仮定している。従って, ここではテイパーがまったく無いか, 有ってもそれが小さい構造物や部材を対象としている。なお, 円筒の構造減衰については, (3b) 式中において粘性減衰を仮定している。(5) 式以下では減衰定数で構造物全体のトータルな減衰性能として評価するので, 本モデルを適用するとき, その他の構造減衰要因も近似的に評価できる。

α を (3a) 式と (3b) 式から消去すると未知変数が y のみの微分方程式が得られる。その式の両辺に i 次固有モード形 $X_i(z)$ を掛けて, 円筒全長に亘って z で積分すると, 基準位置 z_r における円筒変位 y_r に関する非線形常微分方程式が得られる。これを更に, 無次元化して表すと次式となる。

$$\begin{aligned} & \ddot{Y}_r + A(\nu_r) \ddot{Y}_r + B(\nu_r) \dot{Y}_r + C(\nu_r) \dot{Y}_r + D(\nu_r) Y_r \\ & + 4E(\nu_r) \ddot{Y}_r \ddot{Y}_r^2 + \ddot{Y}_r Y_r^2 + 2\ddot{Y}_r \dot{Y}_r Y_r + \dot{Y}_r^2 \dot{Y}_r \\ & + 2\ddot{Y}_r \dot{Y}_r Y_r + \dot{Y}_r Y_r^2 + F(\nu_r) (2\ddot{Y}_r \ddot{Y}_r \\ & + 2\ddot{Y}_r \dot{Y}_r Y_r + \dot{Y}_r^2 + 2\ddot{Y}_r^2 \dot{Y}_r^2 + \ddot{Y}_r Y_r^2 \\ & + 2\ddot{Y}_r^2 Y_r + 2\dot{Y}_r^2 Y_r) + G(\nu_r) (\ddot{Y}_r \dot{Y}_r^2 \\ & + 2\ddot{Y}_r^2 \dot{Y}_r + 2\ddot{Y}_r \dot{Y}_r Y_r + \dot{Y}_r^3) + H(\nu_r) \ddot{Y}_r \dot{Y}_r^2 = 0 \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

ここで, $(\cdot)$ は $\tau_i = \omega_i t$ による微分を表し, 係数 $A(\nu_r) \sim H(\nu_r)$ は次のとおりである。

$$A(\nu_r) = 2\eta_i + \left\{ \frac{n(f+C_D)}{\pi^*} - 2\zeta \right\} e_1 \nu_r \dots \dots \dots (6a)$$

$$B(\nu_r) = e_2 \nu_r^2 - 2\zeta \nu_r \left\{ 2\eta_i e_1 + n(f+C_D) \frac{e_2}{\pi^*} \nu_r \right\}$$

$$+1 - \frac{e_2 f n m^*}{\pi^{*2}} \nu_r^2 \dots \dots \dots (6b)$$

$$C(\nu_r) = \left\{ 2\eta_i e_2 + n(f + C_D) \frac{e_3}{\pi^* \nu_r} \right\} \nu_r^2 - 2\zeta e_1 \nu_r - \frac{f n e_3 \nu_r^3}{\pi^*} \dots \dots \dots (6c)$$

$$D(\nu_r) = e_2 \nu_r^2 \dots \dots \dots (6d)$$

$$E(\nu_r) = \frac{2e_4 \zeta \pi^{*4}}{C_{L0} n^2 \nu_r^2} \dots \dots \dots (6e)$$

$$F(\nu_r) = 2\eta_i + n(f + C_D) \frac{e_5}{\pi^*} \nu_r \dots \dots \dots (6f)$$

$$G(\nu_r) = 4\eta_i^2 + 4\eta_i n(f + C_D) \frac{e_5}{\pi^*} \nu_r + n^2(f + C_D)^2 \frac{e_6}{\pi^{*2}} \nu_r^2 \dots \dots \dots (6g)$$

$$H(\nu_r) = 8\eta_i^3 + 12\eta_i^2 n(f + C_D) \frac{e_5}{\pi^*} \nu_r + 6\eta_i n^2(f + C_D)^2 \frac{e_6}{\pi^{*2}} \nu_r^2 + n^3(f + C_D)^3 \frac{e_7}{\pi^{*3}} \nu_r^3 \dots \dots \dots (6h)$$

上式中の $e_1 \sim e_7$ は固有モード形および平均流速分布形に依存する定数であり、

$$\begin{aligned} e_1 &= \int_0^1 X_i^2 W dZ / \int_0^1 X_i^2 dZ, \\ e_2 &= \int_0^1 X_i^2 W^2 dZ / \int_0^1 X_i^2 dZ, \\ e_3 &= \int_0^1 X_i^2 W^3 dZ / \int_0^1 X_i^2 dZ, \\ e_4 &= \int_0^1 (X_i^4 / W^3) dZ / \int_0^1 X_i^2 dZ \dots \dots (7) \\ e_5 &= \int_0^1 (X_i^4 / W^2) dZ / \int_0^1 (X_i^4 / W^3) dZ \\ e_6 &= \int_0^1 (X_i^4 / W) dZ / \int_0^1 (X_i^4 / W^3) dZ, \\ e_7 &= \int_0^1 X_i^4 dZ / \int_0^1 (X_i^4 / W^3) dZ \end{aligned}$$

と書ける。ここに $Z = z/s$ である。なお、(5)式を導くに当って、簡単のため C_D , C_{L0} , $S(\pi^*/2\pi)$ 等のパラメータは軸方向に一定とした。

3.2 近似的な定常周期解

我々の興味の対象は、共振点付近の円筒の応答にあるが、この付近では円筒の固有振動数に近い振動数で、ほぼ調和的に振動することが知られている。そこで、基準位置 z_r における無次元変位を(8)式のように仮定し、近似的な定常周期解を導くことにする。ただし、ここで導かれる解は数学的な解ではなく、あくまでも近似解であり、その意味等については、既報の文献¹²⁾を参照されたい。

$$Y_r = Y_{r0} \cos(\mu \tau_i) \dots \dots \dots (8)$$

このとき、軸方向の任意位置での円筒変位は

$$Y(Z, \tau_i) = Y_{r0} \cdot X_i(Z) \cos(\mu \tau_i) \dots \dots \dots (9)$$

である。ここで、 $\tau_i = \omega_i t$ であるから、無次元振動数 μ は、

$\mu=1$ のとき円筒の振動数が、 i 次固有振動数に一致していることを意味するものである¹⁾。

そこで、(8)式を(5)式に代入し、 $\cos(\mu \tau_i)$ と $\sin(\mu \tau_i)$ の係数をそれぞれ等置すれば、

$$\begin{aligned} \mu^4 - B(\nu_r) \mu^2 + D(\nu_r) - E(\nu_r) Y_{r0}^2 \{F(\nu_r) \\ \cdot (\mu^6 - 2\mu^4 + \mu^2) + H(\nu_r) \mu^4\} = 0 \dots \dots \dots (10a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -A(\nu_r) \mu^2 + C(\nu_r) - E(\nu_r) Y_{r0}^2 \{\mu^6 - 3\mu^4 \\ + 3\mu^2 - 1 + G(\nu_r)(\mu^4 - \mu^2)\} = 0 \dots \dots \dots (10b) \end{aligned}$$

この(10a)(10b)式から Y_{r0} を消去すれば、振動数方程式が得られ、次式で表される。

$$\begin{aligned} \mu^{10} + \{-3 + G(\nu_r) - B(\nu_r) + A(\nu_r)F(\nu_r)\} \mu^8 \\ + \{3 - G(\nu_r) + 3B(\nu_r) - B(\nu_r)(G(\nu_r) + D(\nu_r)) \\ - 2A(\nu_r)F(\nu_r) + A(\nu_r)H(\nu_r) - C(\nu_r)F(\nu_r)\} \mu^6 \\ + \{-1 - 3B(\nu_r) + B(\nu_r)G(\nu_r) - 3D(\nu_r) \\ + D(\nu_r)G(\nu_r) + A(\nu_r)F(\nu_r) + 2C(\nu_r)F(\nu_r) \\ - C(\nu_r)H(\nu_r)\} \mu^4 + \{B(\nu_r) + 3D(\nu_r) - D(\nu_r)G(\nu_r) \\ - C(\nu_r)F(\nu_r)\} \mu^2 - D(\nu_r) = 0 \end{aligned} \dots \dots (11)$$

基準位置での無次元振幅 Y_{r0} は(10a)式より得られ、

$$Y_{r0} = \sqrt{\frac{\mu^4 - B(\nu_r) \mu^2 + D(\nu_r)}{E(\nu_r) \{F(\nu_r)(\mu^6 - 2\mu^4 + \mu^2) + H(\nu_r) \mu^4\}}} \dots \dots (12)$$

揚力は(3b)式の右辺第1項めであり、揚力係数 C_L は

$$C_L = -f \left(\alpha + \frac{1}{V} \frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

である²⁾から、(3b)式を無次元化して、 $z = z_r$ における揚力係数 C_{Lr} を求めると

$$C_{Lr} = \frac{\pi^{*2}}{n \nu_r^2} \left\{ \ddot{Y}_r + \left(2\eta_i + \frac{n C_D}{\pi^*} \nu_r \right) \dot{Y}_r + Y_r \right\} \dots \dots (13)$$

となる。この揚力係数の近似的な定常周期解を次式の様におくと

$$C_{Lr} = \bar{C}_{Lr} \cos(\mu \tau_i + \phi_r) \dots \dots \dots (14)$$

その振幅 $\bar{C}_{Lr}$ は

$$\bar{C}_{Lr} = \frac{Y_{r0} \pi^{*2}}{n \nu_r^2} \sqrt{(1 - \mu^2)^2 + \mu^2 \left(2\eta_i + \frac{n C_D}{\pi^*} \nu_r \right)^2} \dots \dots (15)$$

となる。また、位相差 ϕ_r は

$$\phi_r = \tan^{-1} \left[\frac{\mu \left(2\eta_i + \frac{n C_D}{\pi^*} \nu_r \right)}{1 - \mu^2} \right] \dots \dots \dots (16)$$

である。

以上によって、3次元円筒の渦励振の近似的周期解が得られた。その無次元振動数 μ は、(11)式の正根として得られ、これを(12)、(15)式に代入することによって、基準位置 $z = z_r$ における無次元円筒変位振幅 Y_{r0} および揚力係数振幅 $\bar{C}_{Lr}$ が得られ、更に(16)式により位相差 ϕ_r が得られる。

以上の解は、文献2)の(18)式の解とは若干その形式が異っている。文献2)では連立した振動子と円筒の連

動方程式の各々から、振動子の角振幅 α_0 の2乗と円筒の振幅 Y_0 の2乗の関係を出し、両者から α_0 , Y_0 を求め、振動数方程式は別に求めている。しかし、振動数方程式が在るのであるから、本論文で導いた様に解を求める方が明解である。また Fig.1 の例から分る様に、微分方程式を直接数値的に解いた Runge-Kutta 解も、計算時間 T を十分に長くすると(12)式の解に収束していく様子が見られる。文献2)の解と本論文の(12)式の解を比較したとき、応答の立ち上がりから最大振幅に至るまでの応答曲線の主要な部分では数値的にほとんど変わらないが、多価領域での第2, 第3の解に若干差が出てくる。

ところで、最大応答は無次元振動数 μ がほぼ1のときに生ずることが分っているので、振動数方程式(11)を使わないで略算的に解を得ることができる。この場合、形式的に(10a)式のみから求められている解(12)式に、振動数方程式(11)の厳密な解ではない $\mu=1$ を代入すると、(10b)式の情報が含まれないため無次元流速 $\nu \rightarrow$ 大において発散し、極大値を持たない。そこで、文献2)の略算解を求めたときにならって、(10a) (10b)式の右辺に、下記の $I(\nu_r)$, $J(\nu_r)$ (基本式(3a)における Y に関する項)を移項し、辺々2乗和をとって Y を求め、これに $\mu=1$ を代入し、その最大値をとると(17)式となる。

$$Y_{r0,\max} = \left[\frac{1}{E(\nu_r)H(\nu_r)} \left[1 - B(\nu_r) + D(\nu_r) - I(\nu_r) + \left\{ I^2(\nu_r) + J^2(\nu_r) - C(\nu_r) - A(\nu_r) + J(\nu_r) \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right]_{\max} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、

$$I(\nu_r) = \frac{e_2 f n m^*}{\pi^{*2}} \nu_r^2,$$

$$J(\nu_r) = \frac{e_3 f n \nu_r^3}{\pi^*}$$

であり、根号の中を正にする無次元流速 ν_r について計算し、そのうちの最大値をとる。

この(17)式は、 $e_1 \sim e_7$ がすべて1となる2次元円筒の場合は文献2)の解と一致しており、3次元の場合には後述の Fig. 6 の2例と Fig. 4, 5 の比較からも分る様に、ほぼ(12)式の解と近い値が得られ、略算解として使える。

円筒が1次固有モードで振動している場合は、 ω_i , η_i および X_i を、 ω_1 , η_1 および X_1 で置き換えてその最大応答を予測することができる。また、2次元円筒の場合は(11)式の振動数方程式は、 $e_1 \sim e_7$ がすべて1であるから、

$$(1 - \mu^2)^2 + G(\nu_r)\mu^2 = (1 - \mu^2)^2 + \frac{H(\nu_r)}{F(\nu_r)}\mu^2 > 0 \dots\dots (18)$$

の項が因数分解によってくり出せて文献2)の振動数方程式と一致し、 μ^2 に関する3次式となり、たかだか3個の解を得ることになる²⁾。ここで求めた3次元円筒

の場合でも、通常の場合には後述の Fig. 6 の例の様に、(18)式が近似的に成り立つため、たかだか3個の解しか得られていない。

3.3 数値解の検討

前節までで、3次元円筒の渦励振解がかなり理想化した仮定のもとで導かれた。本節では、これらの解が種々のモード形を持つ実際の構造物に近似的に適用できるものとした場合の数値解を導いた。用いたモード形は、実用的な意味から単純な形で与えられている。

ところで、前節では方程式中のパラメータの値は断面形状や構造特性および空気力に関するものすべてが軸方向に変化しないものとして解が導かれている。本来は静止円筒に関する C_{L0} , C_D および S も、軸方向に変化する局所的な値を与えるべきであり、煙突等の様に地面に直立するものについては特に、これらの値は軸方向に変化するものである³⁾⁶⁾。ただし、これらのパラメータの値が軸方向に変化するとして解を求めると、得られた解が極めて複雑となる上に、自然風中でのこれらのパラメータの値に関する充分な資料がない。この様な現状を考えると、円筒全体の平均的な値を用いること等によって前節の解を適用することも、実用的な方法ではないかと考える。

また、これらの値は流れの乱れの強さ、円筒の表面粗さ、アスペクト比、レイノルズ数等々によっても変化することが知られており、 C_{L0} , C_D および S に関しては ESDU⁷⁾等を参考にすることができる。 f , ζ および m^* については残念ながら参考とすべき直接的資料はほとんど無いと言って良い。ただし、これらの値は(2a), (2b), (2c)式によって後流振動子の大きさとストローハル数とに関連づけられるので、間接的に類推することは可能である。レイノルズ数が亜臨界領域から極超臨界領域に変わると、はく離点位置はよどみ点から測って約 80° の位置から約 120° の位置に変化し、後流域の幅が狭まる⁸⁾。従って、極超臨界領域における後流振動子の無次元幅 h^* は、亜臨界領域における $h^*=1.25$ よりも小さくなると考えられる。そこで、 h^* の値を適当に定めれば、極超臨界領域における S の値を用いて、(2c)式より $\overline{l^*}$ の値が定まり、さらに(2a)式より m^* の値が定まる。一方、 f はマグナス効果と流れのパターンから決められる定数であるが、現在のところ亜臨界領域の一樣流中での値 $f=1.16$ 以外によりどころが無い。ここでは、便宜的に上記の値を用いることにした。以上によって、(2b)式より ζ の値が定められる。

Table 1 は、以下に述べる数値解を求めるために用いた諸パラメータの値であり、亜臨界領域での値は文献2)に示されている値と同じものである。極超臨界領域での値は、仮に $h^*=1.15$ とおいて、Hansen³⁾の極超臨界領域における煙突の実測結果を参考にして定めたもの

Table 1 Used values of the parameters in the mathematical model

Transcritical Reynolds Number Range (Natural Wind)	$C_{L0} = 0.04, C_D = 0.6, S = 0.22$ $f = 1.16, m^* = 0.7, \zeta = 0.045$
Subcritical Reynolds Number Range (Uniform Flow)	$C_{L0} = 0.4, C_D = 1.2, S = 0.2$ $f = 1.16, m^* = 0.625, \zeta = 0.038$

Fig. 3 Normal mode shapes and flow velocity profiles varying along axis.

Fig. 4 The maximum amplitudes of the displacement at the reference point calculated by Eq. (17). The numbers of the curves correspond to Fig. 3. (S : Subcritical, T : Transcritical)

である。ただし、今後の資料の蓄積と研究を待って、より適切な値に修正されるべきものと考えている。

Table 1 の値を用いて、Fig. 3 に示す様な固有振動モード形と平均流速分布を持つ円筒の最大応答の略算値を(17)式によって計算した。Fig. 4 は基準位置での最大円筒変位 $Y_{ro, max}$ であり、Fig. 5 は最大円筒変位が生ずる時の、基準位置での流速 v_{max} である。図中の数字は、Fig. 3 のモード形および流速分布のタイプを示している。

Fig. 6 は、(11), (12), (15), (16) 式を用いて計算

Fig. 5 The reference point flow velocities at which the maximum displacements occur by Eq. (17). The numbers of the curves correspond to Fig. 3. (S : Subcritical, T : Transcritical)

した応答曲線の数値例である。質量パラメータ n および構造減衰 η の値は、実際の超高 RC 煙突の値を考慮して定めた。また固有モード形および平均流速分布は、Fig. 3 のタイプ 3 を用いた。

4. 考察とまとめ

円形断面を持つ有限長連続体の渦励振モデルを提案した。この数学的モデルは、2次元円筒に関する田村のモデル²⁾を拡張したもので、任意の固有振動モード形と平均流速分布を持つ円筒の渦励振現象を予測しようとするものである。

本モデルは、渦による揚力方向成分（渦成分）のみを取扱ったもので、主流の乱れを原因とする変動揚力による振動（ガスト成分）は含んでいない。しかし、Hansen³⁾や中村他⁴⁾による自然風中での極超臨界領域での実測や、Vickery⁶⁾による風洞乱流中での亜臨界領域での実験によれば、渦励振応答が大きくなるときは、渦成分が支配的でガスト成分は非常に小さくなり無視しうる程度であることが報告されている。よって、周期的渦放出が顕著になる亜臨界領域や極超臨界領域では、ここに提案したモデルの様な方法が充分可能だと考えられる。ただし、静止円筒における揚力係数振幅 C_{L0} 、抗力係数 C_D 、ストローハル数 S をはじめ、 f 、 ζ 、 m^* の諸パラメータの具体的な値については、資料の充実を待って種々の条件下での適正な値を更に検討する必要がある。また、このモデルでは、揚力の高さ方向相関は静止円筒の揚力に関しては、前述のとおり円筒全体の平均的な値を用い

Fig. 6 The numerical solutions calculated by Eqs. (11), (12), (15) and (16), (a) $n=0.0018$, $\eta=0.009$
(b) $n=0.0022$, $\eta=0.005$ (Transcritical Reynolds number range, $W=Z^{0.2}$, $X_1=Z^{1.8}$)

るなどで考慮されるが、円筒の振動によって相関が変化する部分については full correlation となっている。従って、構造減衰が大なるものや、質量比が小なるもので、応答振幅が小さい場合は、過大評価となる恐れがある。

また、ここで得られた解は、一定流速下での定常周期解であり、流速が比較的定常で、かつ充分長くその状態が保たれる様な条件下で観測される応答値（例えば風洞実験など）に対応するものである。自然風の様に、非常に広い周波数範囲に亘って変動成分を含む流れのもとでは、いかなる観測値がこれに対応するかということも、重要な問題となる。これについては、種々の角度からの検討が必要であると思われるが、Fig. 1, 2 の考察から推定すると、風向・風速および応答波形の安定した部分を選び、円筒固有周期の 50~100 倍程度の評価時間で得られる平均応答—平均流速関係をプロットし、そのプロットを包絡する曲線を応答—流速曲線と考え比較するのが一つの方法として考えられる。

参考文献

1) 田村幸雄：円筒の渦励振に関する研究・その 1・円筒後

流域のモデル化，日本建築学会論文報告集，第 266 号，昭 53-4，pp. 87~95.

- 2) 田村幸雄：円筒の渦励振に関する研究・その 2・渦励振現象のモデル化，日本建築学会論文報告集，第 280 号，昭 54-6，pp 67~77.
- 3) S. O. Hansen, : Cross-Wind Vibrations of a 130-m Tapered Concrete Chimney, J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 8 (1981), pp. 145-155
- 4) 中村 修，吉田正邦，真田早敏，坪倉 久，高野秀男：200 m RC 煙突の強風応答観測（その 3）—変動横力の性状と煙突の振動応答—，日本建築学会大会学術講演梗概集（東北），昭 57-10，pp. 1229~1230.
- 5) M. Novak : Aeroelastic Galloping of Prismatic Bodies, J. of Engineering Mechanics Div., Proc. ASCE, 1969-2, pp 115~142.
- 6) B. J. Vickery and A. W. Clark : Lift or Across-Wind Response of Tapered Stacks, J. of the Structural Div., Proc. ASCE, January 1972, pp. 1-20
- 7) ESDU : Wind Engineering (Fluid mechanics, external flow), Engineering Sciences Data Unit Ltd.
- 8) T. V. Lawson : Wind Effects on Buildings, Vol. 1, Applied Science Publishers, London, 1980

SYNOPSIS

UDC : 624.042.4 : 624.073.14 : 624.042.7

VORTEX INDUCED VIBRATION OF CIRCULAR CYLINDER

Part III Model for vortex induced oscillations of continuous systems

by **Dr. YUKIO TAMURA**, Lecturer, Tokyo Inst. of Polytechnics,
and **AKIHIKO AMANO**, IPC of Kajima Corporation.,
Members of A. I. J.

A mathematical model for vortex-induced oscillation of a continuous system with circular cross section is derived. It is assumed that the two dimensional flow is maintained at each point along the axis of a circular cylinder so that the Tamura model for vortex-induced oscillation in the two dimensional flow is applicable at each point. Then, the steady state periodic solutions are obtained. Further, the numerical solutions are calculated for various cylinders having particular mode shape which are immersed in the flows with the mean velocity varied along the axis.