自由辺と固定辺をもつ矩形版の曲げ

正 会 員 東 洋 一*
同 小 森 清 司**

§1. 序

鉄筋コンクリート建物の床版として用いられる矩形平版には自由辺又は固定辺をもつとみなしうるものが非常に多い。すなわち梁に支えられる版辺は固定と仮定し、底版・階段・擁壁等では自由辺をもつ。所でこれらの辺をもつ版の弾性理論解は極めて面倒であるため、その応力解析と性質の研究は不十分であつた。

四辺固定版は Hencky¹⁾, Timoshenko²⁾ 等によつて Fourier 級数解が求められ、辺長比1から2までのものについて数値計算結果³⁾⁴⁾ が発表されている。又固定辺と単純支持辺をもつ版も Timoshenko の方法でとかれ数値計算が行われた⁵⁾⁶⁾。Marcus⁷⁾ は有限差方程式を用いて固定辺と単純支持辺をもつ版を刻明に計算し性質を検討した。三辺固定一辺自由の矩形版については Goriupp⁸⁾ が Fourier 級数による解を求め、正方形版について数値計算した。我が国では坂博士⁹⁾ および横田博士¹⁰⁾ が有限差方程式を用いて辺長比1から3までのものについて数値計算をされた。二辺固定二辺自由の矩形版については Huang and Conway¹¹⁾ が重合せ法により解を求め、正方形版について最大撓みを求めた。坂博士⁹⁾ は有限差式により同じく正方形版の応力を求められた。

本文は筆者の一人が先に発表した¹²⁾ 矩形版の一般解3型の応用として二隣辺固定二隣辺自由版の Fourier 解を導き、その特殊な場合として三辺固定一辺自由版、四辺固定版の解を与える。更にこれらの版の応力を各種の辺長のものについて数値計算しその性質を検討した。

§2. 理論解と連立一次方程式

第1図②に示す二隣辺固定二隣辺自由の矩形版の撓みを $w(x, y)$, V_x, V_y を x, y 方向の反力, p を分布荷重とすると、版の微分方程式

$$w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy} = p/D \quad (1)$$

と辺条件

$$\left. \begin{aligned} w(a, y) = w(x, b) = 0 \\ V_x(0, y) = V_y(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を満足する解は、一般解の3型¹²⁾から直に次式となる。

$$\begin{aligned} w(x, y) = \bar{w}(x, y) \\ + \sum_n (\beta a \tanh \beta a \cosh \beta x - \beta x \sinh \beta x) \\ M_{an} \cos \beta y / 2 D \beta^2 \cosh \beta a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \sum_n \{ [(1-\nu)\beta a \tanh \beta a - 1 - \nu] \sinh \beta(a-x) \\ - (1-\nu)\beta(a-x) \cosh \beta(a-x) \} \\ \theta_{An} \cos \beta y / 2 \beta \cosh \beta a \\ + \sum_m (\alpha b \tanh \alpha b \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y) \\ M_{bm} \cos \alpha x / 2 D \alpha^2 \cosh \alpha b \\ + \sum_m \{ [(1-\nu)\alpha b \tanh \alpha b - 1 - \nu] \sinh \alpha(b-y) \\ - (1-\nu)\alpha(b-y) \cosh \alpha(b-y) \} \\ \theta_{Bm} \cos \alpha x / 2 \alpha \cosh \alpha b \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

ここに $\bar{w}(x, y)$ は荷重項で等分荷重時は次の(4), (5)式のいずれかを使う。

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y) = \sum_n (-1)^{n-1} p_0 [2 \cosh \beta a - (\beta a \tanh \beta a \\ + 2) \cosh \beta x + \beta x \sinh \beta x] \cos \beta y / b D \beta^5 \cosh \beta a \\ \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \sum_m (-1)^{m-1} p_0 [2 \cosh \alpha b - (\alpha b \tanh \alpha b + 2) \\ \cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y] \cos \alpha x / a D \alpha^5 \cosh \alpha b \\ \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

また

$$\alpha = \frac{2m-1}{2a} \pi, \beta = \frac{2n-1}{2b} \pi \quad (m, n=1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

a, b : 辺長, ν : ポアソン比, D : 版剛度

p_0 : 単位面積当りの等分布荷重

なお $M_{an}, M_{bm}, \theta_{An}, \theta_{Bm}$ は未定定数で、次の隅及び辺条件から決定しなければならない。

$$w_x(a, b) = 0 \quad (7)$$

$$w_y(x, b) = 0 \quad (8)$$

$$M_x(0, y) = 0 \quad (9)$$

$$M_y(x, 0) = 0 \quad (10)$$

ここに w_x, w_y は x, y 方向の変角, M_x, M_y は x, y 方向の曲げモーメントである。

(3)式を上式左辺に代入した後、 $\cos \beta y$ 又は $\cos \alpha x$ の級数に展開する。その結果、級数の各項は0でなければならない。今

$$m_{an} = \frac{M_{an}}{p_0 a^2}, m_{bm} = \frac{M_{bm}}{p_0 a^2}, \vartheta_{An} = \frac{D \theta_{An}}{p_0 a^3}$$

第1図

* 東京都立大学助教授 工博 ** 同助手

$$\vartheta_{Bm} = \frac{D \theta_{Bm}}{p_0 a^3}$$

とおくと、(7)式から $n=1, 2, 3, \dots$ に対し

$$\begin{aligned} & \frac{\cosh \beta a \sinh \beta a + \beta a}{2 \cosh^2 \beta a} \cdot \frac{2 \left(\frac{b}{a} \right)}{(2n-1)\pi} m_{an} \\ & + \frac{(1-\nu)\beta a \sinh \beta a - 2 \cosh \beta a}{2 \cosh^2 \beta a} \vartheta_{An} \\ & + \sum_n \frac{(-1)^n 4 \left(\frac{b}{a} \right) (2m-1)\pi}{(2n-1)^2 \pi^2 \left[\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{2m-1}{2n-1} \right)^2 + 1 \right]^2} \\ & \times \left\{ \frac{(-1)^n \left(\frac{2b}{a} \right)}{(2n-1)\pi} m_{bm} + \left[1 + \nu \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{2m-1}{2n-1} \right)^2 \right] \vartheta_{Bm} \right\} \\ & = \frac{(-1)^n 32 \left(\frac{b}{a} \right)^3}{(2n-1)^4 \pi^4} \cdot \frac{\cosh \beta a \sinh \beta a - \beta a}{2 \cosh^2 \beta a} \end{aligned} \quad (11)$$

(8)式から $n=1, 2, 3, \dots$ に対し

$$\begin{aligned} & \frac{\cosh \alpha b \sinh \alpha b + \alpha b}{2 \cosh^2 \alpha b} \cdot \frac{2}{(2m-1)\pi} m_{bm} \\ & + \frac{(1-\nu)\alpha b \sinh \alpha b - 2 \cosh \alpha b}{2 \cosh^2 \alpha b} \vartheta_{Bm} \\ & + \sum_n \frac{(-1)^n 4 \left(\frac{a}{b} \right) (2n-1)\pi}{(2m-1)^2 \pi^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{2n-1}{2m-1} \right)^2 \right]^2} \\ & \times \left\{ \frac{(-1)^n 2}{(2m-1)\pi} m_{an} + \left[1 + \nu \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{2n-1}{2m-1} \right)^2 \right] \vartheta_{An} \right\} \\ & = \frac{(-1)^n 32}{(2m-1)^4 \pi^4} \cdot \frac{\cosh \alpha b \sinh \alpha b - \alpha b}{2 \cosh^2 \alpha b} \end{aligned} \quad (12)$$

(9)式から $n=1, 2, 3, \dots$ に対し

$$\begin{aligned} & - \frac{(1-\nu)\beta a \sinh \beta a - 2 \cosh \beta a}{2 \cosh^2 \beta a} m_{an} \\ & + \frac{(3+\nu) \cosh \beta a \sinh \beta a + (1-\nu)\beta a}{2 \cosh^2 \beta a} \\ & \cdot \frac{(2b)}{a} \frac{(2m-1)\pi}{(2n-1)^2 \pi^2 \left[\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{2m-1}{2n-1} \right)^2 + 1 \right]^2} \\ & \times \left\{ (-1)^n \left[1 + \nu \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{2n-1}{2m-1} \right)^2 \right] m_{bm} \right. \\ & \quad \left. + (1-\nu)^2 \frac{(2n-1)\pi}{\left(\frac{2b}{a} \right)} \vartheta_{Bm} \right\} \\ & = \frac{(-1)^n 16 \left(\frac{b}{a} \right)^2}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[\frac{(1-\nu)\beta a \sinh \beta a}{2 \cosh^2 \beta a} \right. \\ & \quad \left. + \nu - \frac{\nu}{\cosh \beta a} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

(10)式から $m=1, 2, 3, \dots$ に対し

$$\begin{aligned} & - \frac{(1-\nu)\alpha b \sinh \alpha b - 2 \cosh \alpha b}{2 \cosh^2 \alpha b} m_{bm} \\ & + \frac{(3+\nu) \cosh \alpha b \sinh \alpha b + (1-\nu)\alpha b}{2 \cosh^2 \alpha b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\nu)(2m-1)\pi}{2} \vartheta_{Bm} \\ & - \sum_n \frac{4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 (2n-1)^2 \pi^2}{(2m-1)^3 \pi^3 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{2n-1}{2m-1} \right)^2 \right]^2} \\ & \times \left\{ (-1)^m \left[1 + \nu \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{2m-1}{2n-1} \right)^2 \right] m_{an} + (1-\nu)^2 \cdot \right. \\ & \quad \left. \frac{(2m-1)\pi}{2} \vartheta_{An} \right\} \\ & = \frac{(-1)^m 16}{(2m-1)^3 \pi^3} \left[\frac{(1-\nu)\alpha b \sinh \alpha b}{2 \cosh^2 \alpha b} + \nu - \frac{\nu}{\cosh \alpha b} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

の四種の連立一次方程式が求まる。

§3. 二隣辺自由二辺固定版、一辺自由三辺固定版、四辺固定版

第1図に示すように、(3)の解式中③ $\theta_{Bm}=0$ とすると三辺固定版のA型(未定定数 M_{an} , M_{bm} , θ_{An} の三種) ③' $\theta_{An}=0$ とすると三辺固定版のB型(未定定数 M_{an} , M_{bm} , $M\theta_{Bm}$ の三種) ④ $\theta_{An}=\theta_{Bm}=0$ とすると四辺固定版(未定定数 M_{an} , M_{bm} の二種)の解をうる。

筆者は第2図に示すような4種の矩形版について $\frac{b}{a}$

$=1, 1.6, 2, 3, 4$ の各場合につき計 17 ケの版を解いた。解式中の未定定数を求めるさい $m=n=1, 2, 3, 4, 5$ までとつて連立方程式をといた。更に(3)式の導函数から版内の曲げモーメント、反力を計算し、第3図中に各辺長比毎にその分布図を同時に重ねて書き、またその値を第1表から第6表までに示した。又第4図は最大正負 M

b/a	②二辺固定版	③三辺固定版A	③'三辺固定版B	④四辺固定版
1				
1.6				
2				
3				
4				

第2図 床各種版の分類

第1表 $M_x(x,0) [p_0 a^2]$

A 二辺固定版							
$b/a \backslash x/a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
1	.006*	.036	.030	-.007	-.096	-.288	
1.6	.001*	.022	-.004	-.074	-.200	-.403	
2	-.001*	.008	-.028	-.111	-.245	-.439	
3	.006*	-.008	-.062	-.158	-.296	-.475	
4	.005*	-.015	-.074	-.174	-.312	-.490	

* 印: 理論的には0であるが, 未定定数を有限項しかとらぬため誤差を生じた。

B 三辺固定版のA

b/a	x/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		.001*	.022	.021	-.005	-.074	-.202
1.6		.002*	.018	.005	-.067	-.184	-.355
2		.003*	.008	-.028	-.108	-.236	-.412

C 三辺固定版のB

b/a	x/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		.094	.087	.061	.012	-.086	-.278
1.6		.149	.133	.082	-.006	-.141	-.337
2		.162	.144	.086	-.011	-.151	-.338
3		.167	.148	.087	-.013	-.153	-.332
4		.167	.147	.087	-.013	-.153	-.331

D 四辺固定版

b/a	x/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		.070	.065	.048	.009	-.069	-.205
1.6		.142	.127	.079	-.005	-.133	-.311
2		.160	.142	.085	-.010	-.148	-.329
3		.167	.147	.087	-.013	-.154	-.332
4		.167	.147	.087	-.013	-.153	-.330

第2表 $M_x(a,y) [p_0 a^2]$

A 二辺固定版							
$b/a \backslash y/b$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
1	-.288	-.216	-.151	-.092	-.026	0	
1.6	-.403	-.347	-.276	-.193	-.066	0	
2	-.439	-.403	-.345	-.257	-.098	0	
3	-.475	-.472	-.438	-.371	-.175	0	
4	-.490	-.495	-.468	-.433	-.247	0	

B 三辺固定版のA

b/a	y/b	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		-.202	-.191	-.152	-.096	-.028	0
1.6		-.355	-.342	-.286	-.198	-.067	0
2		-.412	-.403	-.350	-.260	-.098	0

C 三辺固定版のB

b/a	y/b	0	0.2	0.6	0.4	0.8	1.0
1		-.278	-.215	-.155	-.096	-.029	0
1.6		-.337	-.304	-.254	-.185	-.070	0
2		-.338	-.327	-.291	-.228	-.100	0
3		-.332	-.338	-.325	-.299	-.164	0
4		-.331	-.337	-.331	-.328	-.216	0

と辺長比 b/a との関係を示す。いずれもポアソン比 $\nu=0$ の場合である。以上の図から特に次の点が注目される。

- 二辺固定版の固定辺に沿う負曲げモーメントと反力の分布はほぼ三角形又は台形であるが、自由辺と固定辺の交点に於て応力集中がみられ、短辺の隅で特に著しい。
- 自由辺が隣接固定辺より短い三辺固定版(③'で $b/a > 2$) の応力は、自由辺を対称軸としてえられる四辺固定版の応力とほとんど等しい。
- 自由辺が隣接固定辺の2倍以上の三辺固定版の応力分布は二辺固定版に類似している。

第3図 曲げモーメント図 ($p_0 a^2$)

D 四辺固定版

b/a	y/b	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		-.205	-.194	-.155	-.100	-.030	0
1.6		-.311	-.302	-.259	-.188	-.070	0
2		-.329	-.326	-.293	-.231	-.098	0
3		-.332	-.338	-.325	-.299	-.164	0
4		-.330	-.337	-.331	-.328	-.216	0

第3表 $M_y(0,y) [p_0 a^2]$

A 二辺固定版							
$b/a \backslash y/b$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
1	.006*	.036	.030	-.007	-.096	-.288	
1.6	.005*	.043	.056	-.034	-.067	-.401	
2	.003*	.041	.054	.049	-.039	-.436	
3	-.002*	.020	.032	.054	.013	-.472	
4	-.002*	.016	.015	.042	.039	-.479	

B 三辺固定版のA

b/a	y/b	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		.094	.087	.061	.012	-.086	-.278
1.6		.075	.077	.068	.040	-.067	-.408
2		.051	.056	.060	.051	-.040	-.443

C 三辺固定版のB

b/a	y/b	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		.001*	.022	.021	-.005	-.074	-.202
1.6		.0	.021	.034	.028	-.035	-.224
2		.0	.014	.029	.036	-.011	-.226
3		.0	.005	.012	.031	.024	-.226
4		.0	.009	.003	.018	.036	-.231

D 四辺固定版

b/a	y/b	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		.070	.065	.048	.009	-.069	-.205
1.6		.034	.037	.041	.030	-.035	-.227
2		.015	.020	.031	.036	-.011	-.226
3		.0	.005	.012	.030	.024	-.226
4		.0	.009	.003	.017	.036	-.231

第4表 $M_y(x,b) [p_0 a^2]$

A 二辺固定版							
b/a	x/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		-.288	-.216	-.151	-.092	-.026	0
1.6		-.401	-.284	-.179	-.105	-.023	0
2		-.436	-.297	-.188	-.106	-.023	0
3		-.472	-.315	-.196	-.109	-.015	0
4		-.479	-.312	-.195	-.110	-.012	0

B 三辺固定版のA

b/a	x/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1		-.278	-.215	-.155	-.096	-.029	0
1.6		-.408	-.285	-.184	-.105	-.025	0
2		-.443	-.297	-.189	-.106	-.023	0

C 三辺固定版 B

$b/a \backslash x/a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-.202	-.191	-.152	-.096	-.028	0
1.6	-.224	-.212	-.166	-.104	-.028	0
2	-.226	-.213	-.167	-.105	-.026	0
3	-.226	-.215	-.167	-.105	-.022	0
4	-.231	-.220	-.170	-.107	-.020	0

D 四辺固定版

$b/a \backslash x/a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-.205	-.194	-.155	-.100	-.030	0
1.6	-.227	-.214	-.168	-.105	-.029	0
2	-.226	-.214	-.167	-.105	-.027	0
3	-.226	-.215	-.167	-.105	-.022	0
4	-.231	-.220	-.170	-.107	-.020	0

第5表 $V_x(a, y) [p_0 a]$

A 二辺固定版

$b/a \backslash y/b$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-1.23	-.72	-.57	-.37	-.07**	.19*
1.6	-1.19	-.91	-.85	-.64	-.23**	.13*
2	-1.10	-.97	-.94	-.78	-.33**	.20*
3	-1.00	-.99	-1.02	-.95	-.60**	.06*
4	-1.02	-.99	-1.03	-.99	-.80**	.01*

B 三辺固定版の A

$b/a \backslash y/b$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-.84	-.81	-.67	-.44	-.08**	.21*
1.6	-1.02	-.99	-.90	-.66	-.22**	.22*
2	-1.03	-1.01	-.97	-.79	-.23**	.24*

C 三辺固定版の B

$b/a \backslash y/b$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-1.24	-.76	-.63	-.42	-.09**	.09*
1.6	-1.14	-.97	-.90	-.72	-.30**	.04*
2	-1.05	-1.01	-.99	-.84	-.44**	.00*
3	-1.01	-1.00	-1.03	-.97	-.70**	-.08*
4	-1.01	-.98	-1.03	-.99	-.88**	-.14*

D 四辺固定版

$b/a \backslash y/b$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-.88	-.84	-.71	-.47	-.09**	.11*
1.6	-1.04	-1.01	-.94	-.73	-.29**	.06*
2	-1.03	-1.02	-.99	-.84	-.43**	.02*
3	-1.02	-1.00	-1.03	-.96	-.70**	.09*
4	-1.02	-.98	-1.03	-.99	-.88**	-.14*

* 印: 理論的には 0 ** 印: 不正確

第6表 $V_y(x, b) [p_0 a]$

A 二辺固定版

$b/a \backslash x/a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-1.23	-.72	-.57	-.37	-.07**	.19*
1.6	-1.55	-.81	-.55	-.34	-.07**	.26*
2	-1.61	-.79	-.56	-.32	-.04**	.32*
3	-1.65	-.85	-.65	-.45	-.09**	.16*
4	-1.72	-.91	-.74	-.56	-.16**	.16*

B 三辺固定版の A

$b/a \backslash x/a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-1.24	-.76	-.63	-.42	-.09**	.09*
1.6	-1.34	-.74	-.56	-.33	-.02**	.21*
2	-1.27	-.71	-.53	-.30	-.01**	.29*

C 三辺固定版の B

$b/a \backslash x/a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-.84	-.81	-.67	-.44	-.08**	.21*
1.6	-.85	-.81	-.66	-.43	-.03**	.29*
2	-.82	-.78	-.65	-.41	-.06**	.37*
3	-.80	-.75	-.63	-.40	-.05**	.49*
4	-.78	-.74	-.62	-.38	-.03**	.57*

D 四辺固定版

$b/a \backslash x/a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	-.88	-.84	-.71	-.47	-.09**	.11*
1.6	-.93	-.88	-.72	-.45	-.01**	.26*
2	-.92	-.88	-.71	-.45	-.03**	.34*
3	-.92	-.88	-.71	-.45	-.01**	.49*
4	-.92	-.89	-.71	-.45	.05**	.57*

[文 献]

- (1) H. Hencky, "Der Spannungszustand in rechteckigen Platten" Oldenbourg, Munich, 1913
- (2) S.P. Timoshenko, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, New York, 1940, pp. 222 ff.
- (3) I.A. Wojtaszak, "The Calculation of Maximum Deflection, Moment, and Shear for Uniformly Loaded Rectangular Plate with Clamped Edges" Jour. Appl. Mech. December 1937, Vol. 4, pp. A-173-176
- (4) T.H. Evans, "Tables of Moments and Deflections for a Rectangular Plate Fixed on All Edges and Carrying a Uniformly Distributed Load", Jour. Appl. Mech. March 1939, Vol. 6, No. 1 pp. A-7-11
- (5) Dana Young, "Analysis of Clamped Rectangular Plates", Jour. Appl. Mech. December 1940, Vol. 7, No. 4, pp. A-139-142
- (6) C.P. Siess and N.M. Newmark, "Moments in Two-way Concrete Floor Slabs", Univ. of Ill. Eng. Exp. Sta. Bul. 385, Feb. 1950
- (7) H. Marcus "Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten", Berlin, 1932
- (8) K. Goriupp, "Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatte", Ingenieur-Archiv. XVI, 1947 ss. 158-163
- (9) 坂静雄 "自由辺をもつ矩形版の設計用曲げモーメント" 建築学会論文集, 第1号, 昭和11年3月
- (10) 横田道夫 "三辺固定、一辺自由な矩形床版の応力" 建築学会研究報告第18号 昭和27年5月 87頁
- (11) M.K. Huang and H.D. Conway, "Bending of a Uniformly Loaded Rectangular Plate with Two Adjacent Edges Clamped and the Others Either Simply Supported or free", Jour. Appl. Mech. December, 1952, Vol. 19, No. 4, pp. 451-460
- (12) Y. Higashi, "Bending of Thin Rectangular Plates with Any Boundary Conditions", 東京都立大工学部報告第6号, 昭和31年3月

第4図 最大曲げモーメント