逆対称荷重を受ける円筒曲版屋根の梁理論

正会員 日 置 興 一 郎*

§1 序

序説¹⁰⁾で述べたように、現在逆対称荷重を受ける円筒曲版屋根については、不同沈下・連続曲版などの場合厳正解はなく、他の場合にも実用理論が充分でない。本論の目的はそれらの場合の近似応力解析法を提案することである。著者は拘束ねじれ理論を利用し、さらに厳密な釣合式を使用して各応力を誘導した。本論では対称断面形の円弧円筒曲版につき式を導く。縁梁は矩形とする。

§2 記 号

図-1 Notations

記号は図-1 に示す。 a : 半径, d : 厚, h_1, d_1 : 縁梁の脊と巾, $a\varepsilon$: 中心から剪断中心までの距離, θ : 断面の廻転角, V : 縁梁下端での鉛直荷重, XYZ : 荷重成分, $M_E : \varphi = \varphi_1$ での M_φ , M_t : 全断面でのトルク, M_W : 曲げねじれによるトルク, M_s : St. Venant のねじり力, 単位長さに加わるねじり外力; $M_L : I_H, G_H, M_H$: 水平方向曲げに対応する断面二次モーメント, 剪断力, 曲げモーメント。 s : アークに沿った座標

§3 仮 定

- 横断面形の変形の長手方向変化は充分小
- 中央面の面内剪断変形無視
- 中央面に垂直な直線は変形後もその面に垂直
- アーチ方向力の軸方向歪への影響を無視
- 厚さは半径などに比し充分小

*大阪市立大学教授・工博

(昭和37年9月11日本稿受理討論期限38年4月末日)

§4 基礎式

釣 合 式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{a \partial \varphi} + X &= 0 \\ \frac{\partial N_\varphi}{a \partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{Q_\varphi}{a} + Y &= 0 \\ \frac{\partial Q_\varphi}{a \partial \varphi} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{N_\varphi}{a} + Z &= 0 \\ \frac{\partial M_\varphi}{a \partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - Q_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{a \partial \varphi} - Q_x &= 0 \\ a N_{x\varphi} - a N_{\varphi x} + M_{\varphi x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

適合条件式は仮定から次の梁理論式に誘導される¹⁰⁾。

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_W}{C_W} W(s, n) + \frac{N}{A} \dots\dots\dots (2)$$

ここに yz は断面の主軸についての座標, $I_z \cdot I_y, M_z \cdot M_y$ はそれに対応する断面二次モーメントと曲げモーメントである。 W : 反り函数, C_W : 曲げねじれ常数, N : 軸力, A : 断面積。

§5 断面の常数

断面二次モーメント

$$I_H = (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) da^3 [1 + (d/2a)^2] + 2 h_1 d_1 a^2 \sin^2 \varphi_1 + [h_1 d_1^3 / 6] \dots\dots\dots (3)$$

剪断中心

$$\varepsilon = \frac{a^3 d}{I_H} \left\{ \left(\frac{h_1}{a} \right)^2 \frac{d_1}{d} \sin^2 \varphi_1 + 2 \frac{h_1 d_1}{ad} \varphi_1 \sin \varphi_1 + 2 (\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1) + \left[\frac{h_1 d_1^3}{6 a^3 d} \left(\cos \varphi_1 - \frac{h_1}{2a} \right) \right] \right\} \dots\dots\dots (4)$$

(3) (4) 式で [] の項は通常略せる。

反り函数 $W(\varphi, n) = W_s(\varphi) + W_n(\varphi, n)$

曲 版 : $W_s(\varphi) = -a^2 (\varepsilon \sin \varphi - \varphi)$

$W_n(\varphi) = -na \varepsilon \sin \varphi$

右縁梁 : $W_s(\zeta) = -a^2 (\varepsilon \sin \varphi_1 - \varphi_1 - \zeta \sin \varphi_1)$

$W_n(\zeta) = -na (\varepsilon - \cos \varphi_1 + \zeta)$

剪断力函数 $S(\varphi) = \int_0^s d \cdot W_s(\varphi) ds$

曲 版 : $S(\varphi) = a^3 d [\mu - (\varphi_1^2 - \varphi^2) / 2 + \varepsilon (\cos \varphi - \cos \varphi_1)]$

縁 梁 : $S(\zeta) = a^3 d_1 [d \mu / d_1 - (\varepsilon \sin \varphi_1 - \varphi_1) \zeta + (\sin \varphi_1 / 2) \zeta^2]$

ここに

$$\mu = \frac{h_1 d_1}{ad} \left(-\frac{h_1 \sin \varphi_1}{2a} + \varepsilon \sin \varphi_1 - \varphi_1 \right) \dots\dots\dots (7)$$

曲げねじれ常数 $C_W = C_{Ws} + C_{Wn}$

$$C_{Ws} = \int dW_s^2 ds$$

$$= 2a^5 d \left\{ \left(\frac{d_1 h_1}{da} \right) \left[(\varepsilon \sin \varphi_1 - \varphi_1)^2 - \frac{h_1}{a} \sin \varphi_1 \right. \right.$$

$$\left. (\varepsilon \sin \varphi_1 - \varphi_1) + \frac{1}{3} \left(\frac{h_1}{a} \right)^2 \sin^2 \varphi_1 \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) + \frac{\varphi_1^3}{3} - 2\varepsilon (\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1) \right\}$$

$$\dots\dots\dots (8)$$

$$C_{Wn} = d^3 a^3 \varepsilon^2 (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) / 12 +$$

$$\frac{a^2 d_1^3 h_1}{6} \left[(\varepsilon - \cos \varphi_1)^2 + (\varepsilon - \cos \varphi_1) \frac{h_1}{a} + \frac{h_1^2}{3a^2} \right]$$

$$\dots\dots\dots (9)$$

縁梁なしの場合

$$I_H = da^3 (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1)$$

$$\doteq \frac{2\varphi_1^3}{3} \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{5} \dots \right) a^3 d \dots\dots\dots (10)$$

$$\varepsilon = \frac{2(\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1)}{\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}$$

$$\doteq 1 + \frac{\varphi_1^2}{10} + \frac{19}{4200} \varphi_1^4 \dots\dots\dots (11)$$

$$W_s = -a^2 (\varepsilon \sin \varphi - \varphi) \doteq -a^2 \left(\frac{3\varphi_1^2 - 5\varphi^2}{30} \varphi \right)$$

$$\dots\dots\dots (12)$$

$$S(\varphi) = a^3 d [\varepsilon (\cos \varphi - \cos \varphi_1) - (\varphi_1^2 - \varphi^2) / 2]$$

$$\doteq a^3 d (\varphi_1^4 - 6\varphi_1^2 \varphi^2 + 5\varphi^4) / 120 \dots\dots\dots (13)$$

$$C_W = a^5 d \left[\frac{2}{3} \varphi_1^3 + \frac{4(\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1)^2}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \varphi_1} \right]$$

$$+ \frac{d^3 a^3 \varepsilon^2}{12} (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1)$$

$$\doteq \frac{2\varphi_1^7 a^5 d}{1575} \left[1 + \frac{175}{4\varphi_1^4} \left(\frac{d}{a} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (14)$$

§ 6 逆対称荷重を受けねじれない場合

荷重がねじりを生じないように作用する場合を論じる。この場合 $M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = 0$ で $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$ となる。さらに M_x 項を略すと、釣合式は

$$\left. \begin{aligned} Q_\varphi &= \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} \\ N_\varphi &= -\frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} - aZ \\ \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^3 M_\varphi}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - Y \\ \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} &= -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^4 M_\varphi}{\partial \varphi^4} - \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

適合条件式は (2) より

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -\frac{G_H}{I_H} a \sin \varphi \dots\dots\dots (16)$$

(15) (16) から得られる M_φ についての微分方程式は、仮定 i) により常微分となる。

$$\frac{d^4 M_\varphi}{d\varphi^4} + \frac{d^2 M_\varphi}{d\varphi^2} = \frac{G_H a^4 d}{I_H} \sin \varphi$$

$$-a^2 \left(\frac{d^2 Z}{d\varphi^2} - \frac{dY}{d\varphi} \right) \dots\dots\dots (17)$$

ZY 項に対する特解を M_0 とすると、解は

$$M_\varphi = A\varphi + B + C \cos \varphi + D \sin \varphi + M_0$$

$$+ \frac{a^4 d G_H}{2 I_H} \varphi \cos \varphi \dots\dots\dots (18)$$

対称性から $B=C=0$, A は剪断力の条件から定り

$$A = \frac{G_H a^4 d}{I_H} \left(\cos \varphi_1 - \frac{h_1 d_1}{ad} \sin \varphi_1 \right) \dots\dots\dots (19)$$

残った常数 D は、縁梁下に加る V あるいは端での M_φ で定る。両者はねじれない条件から互に独立ではない。

他の応力は (18) を (15) に入れれば求まる。

§ 7 特 解

a) 水平震度 α_1 による M_0

$$\left. \begin{aligned} Y &= \alpha_1 p \cos \varphi, \quad Z = -\alpha_1 p \sin \varphi \\ M_0 &= -a^2 \alpha_1 p \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここに p は曲版単位面積当り重量

b) 逆対称に加わる水平方向に等分布する鉛直荷重

$$\left. \begin{aligned} \varphi > 0 : Y &= q \cos \varphi \sin \varphi, \quad Z = q \cos^2 \varphi \\ M_0 &= -(a^2 q / 2) \sin^2 \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$\varphi < 0$ においては総ての応力の符号が変わる。 q : 水平単位面積当り一定の荷重。

c) その他の逆対称荷重

適当に支持されたアーチ、例えば二鉸アーチの解が使える。梁理論は荷重が長手方向に急変しない限り、仮定 i) に反しないから、任意分布の荷重に対し解ける。

§ 8 拘束状態の各応力ねじれ

この節ではねじれだけを扱う。 σ_x と $N_{\varphi x}$ に対する式は Wagner 理論に一致するが、本論ではさらに他の応力を誘導することができる。

$$u = -W(\varphi) d\theta / dx \dots\dots\dots (22')$$

$$\sigma_x = -EW(\varphi, n) \frac{d^2 \theta}{dx^2} \dots\dots\dots (22)$$

$$N_x = -EdW_s(\varphi) d^2 \theta / dx^2 \dots\dots\dots (23)$$

$$M_x = \int \sigma_x (-n) dn = -\frac{Ead^3}{12} \varepsilon \sin \varphi \cdot \frac{d^2 \theta}{dx^2} \dots\dots\dots (24)$$

$N_{\varphi x}$ は (1) より

$$N_{\varphi x} = -\int_0^s \frac{\partial N_x}{\partial x} ds = S(\varphi) \cdot E \frac{d^3 \theta}{dx^3} \dots\dots\dots (25)$$

Wagner と St. Venant のねじりモーメントはそれぞれ

$$M_W = C_W E \cdot d^3 \theta / dx^3 \dots\dots\dots (26)$$

$$M_s = -J_t G \cdot d\theta / dx \dots\dots\dots (27)$$

ここに J_t は仮定 iii) から

$$J_t = \int (d^3 / 3) ds \dots\dots\dots (28)$$

またねじりモーメント $M_{x\varphi}$ は⁸⁾

$$M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = -\frac{Gd^3}{6} \cdot \frac{d\theta}{dx} \dots\dots\dots (29)$$

すなわち $M_{x\varphi}$ は M_s の半分を受持ち、残りの半分は $N_{x\varphi}$ と端部境界域での集中的な Q_x で受持たれる。

$$\text{全ねじり力 } M_t \text{ は } M_t = M_W + M_s \dots\dots\dots (30)$$

$$dM_t/dx = -M_L \quad \dots\dots\dots(31)$$

従って

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{M_L}{EC_W}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{GJ_t}{EC_W}} \quad \dots\dots\dots(32)$$

θ_0 を特解とすると、一般解は

$$\theta = A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x + Cx + D + \theta_0 \quad (33)$$

(23) (24) (25) (29) (33) を (1) に代入すると

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} - \frac{M_{\varphi x}}{a} = S(\varphi) \cdot E \frac{d^3\theta}{dx^3} + \frac{d^3G}{6a} \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$\frac{d^3M_\varphi}{d\varphi^3} + \frac{dM_\varphi}{d\varphi} = Ea^5 d \frac{d^4\theta}{dx^4} \left[\mu + \frac{d^2C_W}{3a^4J_t} + \frac{\varphi_1^2 - \varphi^2}{2} + \varepsilon(\cos \varphi - \cos \varphi_1) + \frac{\varepsilon d^2}{12a^2} \cos \varphi \right] + \frac{ad^3}{3J_t} M_L \quad \dots\dots\dots(38)$$

この一般解は次の形となる。

$$M_\varphi = Ea^5 d \frac{d^4\theta}{dx^4} \left[A + B \cos \varphi + C \sin \varphi + \left(\mu + \frac{d^2C_W}{3a^4J_t} - \frac{\varphi_1^2}{2} - \varepsilon \cos \varphi_1 \right) \varphi - \varepsilon \left(1 + \frac{d^2}{12a^2} \right) \frac{\varphi \cos \varphi}{2} + \frac{\varphi^3}{6} - \varphi \right] + \frac{ad^3}{3J_t} M_L \varphi \quad \dots\dots\dots(39)$$

対称性から $A=B=0$, 端での M_φ は (18) 式で持たせることにして, $\varphi=\varphi_1$ で $M_\varphi=0$ を入れると C が定まり

$$M_\varphi = Ea^5 d \frac{d^4\theta}{dx^4} \left[\left(-\mu - \frac{d^2C_W}{3a^4J_t} + \frac{3\varepsilon}{2} \cos \varphi_1 + 1 + \frac{\varphi_1^2}{3} + \frac{\varepsilon d^2}{24a^2} \cos \varphi_1 \right) \frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1} \sin \varphi + \left(\mu + \frac{d^2C_W}{3a^4J_t} - \frac{\varphi_1^2}{2} - \varepsilon \cos \varphi_1 \right) \varphi - \varepsilon \left(1 + \frac{d^2}{12a^2} \right) \frac{\varphi \cos \varphi}{2} + \frac{\varphi^3}{6} - \varphi \right] + \frac{ad^3}{3J_t} M_L \left(\varphi - \frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1} \sin \varphi \right) \quad \dots\dots\dots(40)$$

§ 9 まとめの式と数表

§ 6, § 8 では特別な荷重状態に対し, 別々に解いたの
で, これをまとめて逆対称荷重に対する一般解を示す。そ
の際微小量を略し, 数表化の容易な形で実用式を示す。

$$\sigma_x = \frac{M_H}{I_H} (a+n) \sin \varphi + [a^2(\varepsilon \sin \varphi - \varphi) + na \varepsilon \sin \varphi] E \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad \dots\dots\dots(41)$$

$$\sigma_{x,B} = \frac{M_H}{I_H} (a \sin \varphi_1 + n) + \left[\left(\varepsilon - \frac{h_1}{a} \right) \sin \varphi_1 - \varphi_1 + \frac{n}{a} \varepsilon \sin \varphi_1 \right] a^2 E \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad \dots\dots\dots(42)$$

$$N_{x\varphi,e} = \frac{Q_H}{I_H} ad_1 z \sin \varphi_1 + E \frac{d^3\theta}{dx^3} a^3 d_1 \left[\left(\varepsilon \sin \varphi_1 - \varphi_1 - \frac{h_1}{a} \sin \varphi_1 \right) \frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} \sin \varphi_1 \right] \quad \dots\dots\dots(45)$$

こゝに $N_{x\varphi,e}$ は縁梁中での $N_{x\varphi}$ を示す。

$$M_\varphi = \frac{G_H a^4 d}{I_H} \left[(M_\varphi)_4 + \frac{h_1 d_1}{ad} \cdot (M_\varphi)_5 \right] + M_E \cdot (M_\varphi)_6 + \alpha a^2 p \cdot (M_\varphi)_\alpha + a^2 q \cdot (M_\varphi)_A + Ea^5 d \frac{d^4\theta}{dx^4} \left[(M_\varphi)_{11} - (\varepsilon - 1) \cdot (M_\varphi)_4 + \left(\mu + \frac{d^2C_W}{3a^4J_t} \right) \cdot (M_\varphi)_{10} \right] + \frac{ad^3}{3J_t} M_L \cdot (M_\varphi)_{10} \quad \dots\dots\dots(47)$$

こゝに M_E は $\varphi=\varphi_1$ での M_φ の値である。こゝに

$$\left. \begin{aligned} (M_\varphi)_4 &= \varphi \cos \varphi_1 + \frac{\varphi \cos \varphi}{2} - \frac{3\varphi_1 \cos \varphi_1}{2 \sin \varphi_1} \sin \varphi \\ (M_\varphi)_5 &= \varphi_1 \sin \varphi - \varphi \sin \varphi_1 \\ (M_\varphi)_6 &= \sin \varphi / \sin \varphi_1 \\ (M_\varphi)_\alpha &= \frac{\varphi_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \\ (M_\varphi)_A &= (1/2)(\sin \varphi_1 - \sin \varphi) \sin \varphi \quad (\varphi > 0) \\ (M_\varphi)_8 &= \frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1} \left(\frac{\varphi_1^2}{3} + 1 \right) \sin \varphi + \frac{\varphi^3}{6} + \left(\frac{\varphi_1^2}{2} + 1 \right) \varphi \\ (M_\varphi)_{10} &= \varphi - \frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1} \sin \varphi \\ (M_\varphi)_{11} &= (M_\varphi)_8 - (M_\varphi)_4 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{a \partial \varphi} = -\frac{Ed^3 a \varepsilon}{12} \sin \varphi \cdot \frac{d^3 \theta}{dx^3} \quad \dots\dots\dots(35)$$

この右辺は端部境界域を除いて成立する。

$$Q_\varphi = \frac{\partial M_\varphi}{a \partial \varphi} - \frac{d^3 G}{6} \cdot \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad \dots\dots\dots(36)$$

$$N_\varphi = -\frac{\partial^2 M_\varphi}{a \partial \varphi^2} - aZ + a \varepsilon \sin \varphi \cdot \frac{Ed^3 a}{12} \cdot \frac{d^4 \theta}{dx^4} \quad (37)$$

M_φ については次の微分方程式になる。ここで仮定 i) を考え, また $Z=Y=0$ とおく。

こゝに $\sigma_{x,B}$ は縁梁下端での σ_x を示す。

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi x} &= \frac{Q_H}{I_H} a^2 d \left[(N_{x\varphi})_9 + \frac{h_1 d_1}{ad} \cdot (N_{x\varphi})_5 \right] \\ &+ E \frac{d^3 \theta}{dx^3} a^3 d \left[(N_{x\varphi})_n + (\varepsilon - 1)(N_{x\varphi})_9 + \mu \right] \\ N_{x\varphi} &= N_{\varphi x} + \frac{d^3 G}{6a} \cdot \frac{d\theta}{dx} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(43)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{こゝに } (N_{x\varphi})_5 &= \sin \varphi_1, (N_{x\varphi})_9 = \cos \varphi - \cos \varphi_1 \\ (N_{x\varphi})_{11} &= \cos \varphi - \cos \varphi_1 - (\varphi_1^2 - \varphi^2)/2 \end{aligned} \right\} \quad \text{(表)}$$

$$M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = -(d^3 G/6) \cdot d\theta/dx \quad \dots\dots\dots(46)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{G_H a^3 d}{I_H} \left[(N_\varphi)_4 + \frac{h_1 d_1}{ad} \cdot (N_\varphi)_5 \right] + \frac{M_E}{a} \cdot \\ &(M_\varphi)_6 + \alpha a p \cdot (N_\varphi)_\alpha + a q \cdot (N_\varphi)_A + Ea^4 d \cdot \\ &\frac{d^4 \theta}{dx^4} \left[(N_\varphi)_{11} - (\varepsilon - 1)(N_\varphi)_4 + \left(\mu + \frac{d^2 C_W}{3a^4 J_t} \right) \cdot \right. \\ &\left. (N_\varphi)_{10} \right] + \frac{d^3}{3J_t} M_L (N_\varphi)_{10} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(49)$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} (N_\varphi)_4 &= \frac{\varphi \cos \varphi}{2} + \left(1 - \frac{3\varphi_1 \cos \varphi_1}{2 \sin \varphi_1} \right) \sin \varphi \\ (N_\varphi)_5 &= \varphi_1 \sin \varphi \\ (N_\varphi)_\alpha &= \left(\frac{\varphi_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} - 1 \right) \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

表 1 20°

$\varphi_1=20^\circ$	0°	6°40′	13°20′	20°
$(N_{x\varphi})_9$	0.060 307 4	0.053 545 8	0.033 352 3	0
$(N_{x\varphi})_{11}$	-0.000 616 1	-0.000 608 5	-0.000 494 1	0
$(M_\varphi)_4$	0	0.000 113 9	0.000 136 9	0
$(M_\varphi)_5$	0	0.000 728 2	0.000 908 4	0
$(M_\varphi)_6$	0	0.339 433 0	0.674 275 9	1.000 000 0
$(M_\varphi)_7$	0	0.003 112 7	0.003 883 0	0
$(M_\varphi)_{10}$	0	-0.002 129 2	-0.002 656 1	0
$(M_\varphi)_{11}$	0	0.000 001 3	0.000 001 6	0
$(M_\varphi)_\alpha$	0	-0.004 229 6	-0.005 275 6	0
$(M_\varphi)_A$	0	0.013 114 3	0.012 845 8	0
$(N_\varphi)_4$	0	0.006 868 6	0.012 076 4	0.014 005 5
$(N_\varphi)_5$	0	0.040 524 1	0.080 500 1	0.119 387 6
$(N_\varphi)_7$	0	0.173 212 8	0.344 083 2	0.510 300 3
$(N_\varphi)_{10}$	0	-0.118 484 5	-0.235 366 7	-0.349 065 9
$(N_\varphi)_{11}$	0	0.000 072 9	0.000 139 3	0.000 172 1
$(N_\varphi)_\alpha$	0	-0.120 322 5	-0.235 881 5	-0.342 020 1
$(N_\varphi)_A$	0	0.006 375 5	-0.013 746 1	-0.058 488 9

表 2 25°

$\varphi_1=25^\circ$	0°	8°20′	16°40′	25°
$(N_{x\varphi})_9$	0.093 692 2	0.083 133 8	0.051 681 7	0
$(N_{x\varphi})_{11}$	-0.001 500 8	-0.001 482 2	-0.001 203 3	0
$(M_\varphi)_4$	0	0.000 348 3	0.000 417 9	0
$(M_\varphi)_5$	0	0.001 777 2	0.002 206 8	0
$(M_\varphi)_6$	0	0.342 938 1	0.678 634 1	1.000 000 0
$(M_\varphi)_7$	0	0.004 958 2	0.006 178 0	0
$(M_\varphi)_{10}$	0	-0.004 190 9	-0.005 221 8	0
$(M_\varphi)_{11}$	0	0.000 006 3	0.000 007 6	0
$(M_\varphi)_\alpha$	0	-0.008 293 1	-0.010 301 0	0
$(M_\varphi)_A$	0	0.020 122 7	0.019 476 2	0
$(N_\varphi)_4$	0	0.013 463 1	0.023 586 9	0.027 166 9
$(N_\varphi)_5$	0	0.063 238 5	0.125 141 5	0.184 402 0
$(N_\varphi)_7$	0	0.177 033 2	0.350 328 0	0.516 225 0
$(N_\varphi)_{10}$	0	-0.149 635 0	-0.296 110 0	-0.436 332 3
$(N_\varphi)_{11}$	0	0.000 224 0	0.000 426 8	0.000 523 9
$(N_\varphi)_\alpha$	0	-0.153 225 0	-0.297 104 2	-0.422 618 3
$(N_\varphi)_A$	0	0.009 620 0	-0.021 651 8	-0.089 303 1

表 3 30°

$\varphi_1=30^\circ$	0°	10°	20°	30°
$(N_{x\varphi})_9$	0.133 974 6	0.118 782 4	0.073 667 2	0
$(N_{x\varphi})_{11}$	-0.003 103 3	-0.003 064 6	-0.002 487 2	0
$(M_\varphi)_4$	0	0.000 868 4	0.001 040 4	0
$(M_\varphi)_5$	0	0.003 655 5	0.004 548 3	0
$(M_\varphi)_6$	0	0.347 296 4	0.684 040 2	1.000 000 0
$(M_\varphi)_7$	0	0.007 311 1	0.009 096 7	0
$(M_\varphi)_{10}$	0	-0.007 311 1	-0.009 096 7	0
$(M_\varphi)_{11}$	0	0.000 022 0	0.000 026 7	0
$(M_\varphi)_\alpha$	0	-0.014 399 9	-0.017 836 7	0
$(M_\varphi)_A$	0	0.028 335 2	0.027 016 1	0
$(N_\varphi)_4$	0	0.023 366 7	0.040 760 6	0.046 550 1
$(N_\varphi)_5$	0	0.090 922 0	0.179 081 3	0.261 799 9
$(N_\varphi)_7$	0	0.181 844 0	0.358 162 6	0.523 598 8
$(N_\varphi)_{10}$	0	-0.181 844 0	-0.358 162 6	-0.523 598 8
$(N_\varphi)_{11}$	0	0.000 562 2	0.001 066 9	0.001 299 0
$(N_\varphi)_\alpha$	0	-0.188 048 1	-0.359 856 8	-0.500 000 0
$(N_\varphi)_A$	0	0.013 258 4	-0.031 472 2	-0.125 000 0

表 4 35°

$\varphi_1=35^\circ$	0°	11°40′	23°20′	35°
$(N_{x\varphi})_9$	0.180 848 0	0.160 188 6	0.099 064 1	0
$(N_{x\varphi})_{11}$	-0.005 730 2	-0.005 658 8	-0.004 590 5	0
$(M_\varphi)_4$	0	0.001 880 8	0.002 249 5	0
$(M_\varphi)_5$	0	0.006 735 1	0.008 366 1	0
$(M_\varphi)_6$	0	0.352 555 6	0.690 544 1	1.000 000 0
$(M_\varphi)_7$	0	0.010 236 0	0.012 714 8	0
$(M_\varphi)_{10}$	0	-0.011 742 3	-0.014 585 8	0
$(M_\varphi)_{11}$	0	0.000 065 4	0.000 079 6	0
$(M_\varphi)_\alpha$	0	-0.022 999 2	-0.028 395 1	0
$(M_\varphi)_A$	0	0.037 549 6	0.035 051 4	0
$(N_\varphi)_4$	0	0.037 301 3	0.064 735 0	0.073 184 9
$(N_\varphi)_5$	0	0.123 527 7	0.241 951 4	0.350 377 9
$(N_\varphi)_7$	0	0.187 737 8	0.367 718 5	0.532 505 5
$(N_\varphi)_{10}$	0	-0.215 364 0	-0.421 829 3	-0.610 865 2
$(N_\varphi)_{11}$	0	0.001 229 1	0.002 320 2	0.002 797 8
$(N_\varphi)_\alpha$	0	-0.225 216 7	-0.424 474 5	-0.573 576 4
$(N_\varphi)_A$	0	0.017 101 6	-0.043 288 2	-0.164 494 9

表 5 40°

$\varphi_1=40^\circ$	0°	13°20′	26°40′	40°
$(N_{x\varphi})_9$	0.233 955 6	0.207 000 5	0.127 588 2	0
$(N_{x\varphi})_{11}$	-0.009 738 4	-0.009 616 4	-0.007 797 4	0
$(M_\varphi)_4$	0	0.003 676 7	0.004 389 0	0
$(M_\varphi)_5$	0	0.011 416 8	0.014 154 0	0
$(M_\varphi)_6$	0	0.358 774 6	0.698 207 6	1.000 000 0
$(M_\varphi)_7$	0	0.013 780 3	0.017 084 3	0
$(M_\varphi)_{10}$	0	-0.017 761 4	-0.022 019 8	0
$(M_\varphi)_{11}$	0	0.000 167 2	0.000 204 3	0
$(M_\varphi)_\alpha$	0	-0.034 565 3	-0.042 514 2	0
$(M_\varphi)_A$	0	0.047 526 6	0.043 530 9	0
$(N_\varphi)_4$	0	0.056 025 9	0.096 655 0	0.107 987 7
$(N_\varphi)_5$	0	0.161 000 3	0.313 320 9	0.448 750 4
$(N_\varphi)_7$	0	0.194 331 6	0.378 186 8	0.543 050 1
$(N_\varphi)_{10}$	0	-0.250 472 0	-0.487 440 9	-0.698 131 7
$(N_\varphi)_{11}$	0	0.002 427 8	0.004 555 6	0.005 432 5
$(N_\varphi)_\alpha$	0	-0.265 181 2	-0.491 313 4	-0.642 787 6
$(N_\varphi)_A$	0	0.020 834 8	-0.057 179 4	-0.206 587 9

表 6 45°

$\varphi_1=45^\circ$	0°	15°	30°	45°
$(N_{x\varphi})_9$	0.292 893 2	0.258 819 0	0.158 918 6	0
$(N_{x\varphi})_{11}$	-0.015 532 0	-0.015 336 7	-0.012 428 7	0
$(M_\varphi)_4$	0	0.006 645 5	0.007 916 5	0
$(M_\varphi)_5$	0	0.018 155 9	0.022 458 8	0
$(M_\varphi)_6$	0	0.366 025 3	0.707 106 8	1.000 000 0
$(M_\varphi)_7$	0	0.018 155 9	0.022 458 8	0
$(M_\varphi)_{10}$	0	-0.025 676 2	-0.031 761 6	0
$(M_\varphi)_{11}$	0	0.000 385 7	0.000 470 1	0
$(M_\varphi)_\alpha$	0	-0.049 592 8	-0.060 750 7	0
$(M_\varphi)_A$	0	0.058 012 6	0.051 776 7	0
$(N_\varphi)_4$	0	0.080 344 4	0.137 676 2	0.151 746 4
$(N_\varphi)_5$	0	0.203 276 0	0.392 699 1	0.555 360 4
$(N_\varphi)_7$	0	0.203 276 0	0.392 699 1	0.555 360 4
$(N_\varphi)_{10}$	0	-0.287 475 6	-0.555 360 4	-0.785 398 2
$(N_\varphi)_{11}$	0	0.004 441 7	0.008 276 9	0.009 744 7
$(N_\varphi)_\alpha$	0	-0.308 421 8	-0.560 750 7	-0.707 106 8
$(N_\varphi)_A$	0	0.024 519 0	-0.073 223 3	-0.250 000 0

$$\left. \begin{aligned} (N_\varphi)_A &= \frac{\sin \varphi_1}{2} \sin \varphi - \sin^2 \varphi \quad (\varphi > 0) \\ (N_\varphi)_8 &= -\varphi + \frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1} \left(\frac{\varphi_1^2}{3} + 1 \right) \sin \varphi \\ (N_\varphi)_{10} &= -\frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1} \sin \varphi, (N_\varphi)_{11} = (N_\varphi)_8 - (N_\varphi)_4 \end{aligned} \right\} \dots \text{表(50)}$$

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \frac{G_H}{I_H} a^3 d \left[(Q_\varphi)_4 + \frac{h_1 d_1}{ad} (Q_\varphi)_5 \right] + \frac{M_E}{a} \\ (Q_\varphi)_6 &+ \alpha a p (Q_\varphi)_\alpha + a q (Q_\varphi)_A + E a^4 d \frac{d^4 \theta}{dx^4} \\ &\left[(Q_\varphi)_{11} - (\varepsilon - 1) (Q_\varphi)_4 + \mu (Q_\varphi)_{10} + \frac{d^2 C_W}{3 a^4 J_t} \right. \\ &\left. (Q_\varphi)_{13} \right] + \frac{d^3}{3 J_t} M_L (Q_\varphi)_{13} \dots \dots \dots (51) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } (Q_\varphi)_i &= d(M_\varphi)_i \dots (i=4, 5 \dots 11, \alpha, A) \\ (Q_\varphi)_{13} &= (Q_\varphi)_{10} - 1/2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (52)$$

(44) (48) (50) の値を $\varphi_1 = 20^\circ, 25^\circ \dots 45^\circ, 50^\circ, 60^\circ$;
 $\varphi = 0, \varphi_1/3, 2\varphi_1/3, \varphi_1$ に対し数表にした。(表 1~6)

§ 10 逆対称荷重を受ける並列曲版

横方向に無限に並び連っている曲版屋根が、各曲版逆対称荷重を受ける場合を論じる。

ねじれず、また無限に連るから $\sigma_x = 0$ とおける。従って微分方程式は (16) の代りに (53) 式となる。

$$\frac{d^4 M_\varphi}{d\varphi^4} + \frac{d^2 M_\varphi}{d\varphi^2} = -a^2 \left(\frac{d^2 Z}{d\varphi^2} - \frac{dY}{d\varphi} \right) \dots \dots (53)$$

特解は前と同じものが使えて一般解は次式となる。

$$M_\varphi = M_0 + A\varphi + B + C \cos \varphi + D \sin \varphi \dots \dots (54)$$

対称性から $B=C=0$ 水平方向の釣合から A を定め、さらに $\varphi = \varphi_1$ で $M_\varphi = M_E$ とおくと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= 0 \\ N_{x\varphi} &= -Q_H/2 a \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (55)$$

$$\left. \begin{aligned} M_\varphi &= a G_H \cdot (M_\varphi)_7 + \alpha a^2 p \cdot (M_\varphi)_\alpha \\ &+ a^2 q \cdot (M_\varphi)_A + M_E (M_\varphi)_6 \\ (M_\varphi)_7 &= \frac{\varphi_1}{2 \sin^2 \varphi_1} \sin \varphi - \frac{\varphi}{2 \sin \varphi_1} \text{ (表)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (56)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= G_H \cdot (N_\varphi)_7 + \alpha a p \cdot (N_\varphi)_\alpha \\ &+ a q (N_\varphi)_A + (N_\varphi)_6 \cdot M_E/a \\ (N_\varphi)_7 &= \frac{\varphi_1}{2 \sin \varphi_1} \sin \varphi \dots \dots \text{ (表)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (57)$$

§ 11 例 題

i) 自由端に弾性妻壁を持つ片持梁が、自由端にトルク M_t を受ける場合

仮定：妻壁は $W(\varphi)$ に比例して変形し、その反力も $W(\varphi)$ に比例する。その弾性比例常数はエネルギー法で定める。

妻壁；変位 $u = u_B \cdot W(\varphi)$ ，反力 $N_x' = N_B \cdot W(\varphi)$ ，弾性 $-N_B = k_B \cdot E u_B$

k_B は外力のなす仕事と内力仕事を等置して

$$-\frac{1}{2} \int N_x' u ds = \frac{E}{2} \int I \left(\frac{d^2 u}{ds^2} \right)^2 ds$$

ここに EI は考える断面での妻壁の有効曲げ剛性

$$k_B = \frac{\int I \left[\frac{d^2 W(\varphi)}{a^2 d\varphi^2} \right]^2 ds}{\int [W(\varphi)]^2 ds} \dots \dots \dots (58)$$

円弧縁梁なしの場合

$$k_B = \frac{ad \varepsilon^2 \int I \sin^2 \varphi d\varphi}{C_{Ws}} \dots \dots \dots (59)$$

さらに $I = \text{const}$ の縁梁なしの場合には、展開して

$$k_B \doteq \frac{525}{\varphi_1^4} \cdot \frac{I}{a^4} \dots \dots \dots (60)$$

境界条件 $x=0: \theta=0, d\theta/dx=0; x=l: u=u, \sigma_x d = N_x', M_t = \text{const}$ で (33) の積分常数を定めると

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{M_t}{\alpha G J_t}, B+D=0, B=\beta \frac{M_t}{G J_t}, \\ \beta &= \frac{1 - \cosh \alpha l - (d/k_B) \alpha \sinh \alpha l}{\alpha \sinh \alpha l + (d/k_B) \alpha^2 \cosh \alpha l} \end{aligned} \right\} \dots \dots (61)$$

従って

$$\theta = -\frac{M_t l}{G J_t} \left[\frac{x}{l} - \frac{\sinh \alpha x}{\alpha l} - \beta \frac{\cosh \alpha x - 1}{\alpha l} \right] \dots \dots \dots (62)$$

a) 柔な妻壁の場合 ($k_B = 0$)

$$\theta = -\frac{M_t l}{G J_t} \left[\frac{x}{l} - \frac{\sinh \alpha l - \sinh \alpha(l-x)}{\alpha l \cosh \alpha l} \right] \dots \dots \dots (63)$$

b) 剛な妻壁の場合 ($k_B = \infty$)

図-2 Distributions of Stresses in B-Shell

$$\theta = -\frac{M_t l}{GJ_t} \left[\frac{x}{l} - \frac{\cosh \alpha l - 1 + \cosh \alpha x - \cosh \alpha(l-x)}{\alpha l \sinh \alpha l} \right] \quad \dots\dots\dots(64)$$

ii) 数値計算例

A. 縁梁なし, $\alpha=30$, $d=0.219$, $l=60$ [cm], $\varphi_1=30^\circ$
妻壁厚 0.626, 巾平均 4[cm]

B. 縁梁なし, 断面, 妻壁Aと同じ $l=44.8$ [cm], $\varepsilon=1.027756$, $C_{Ws}=74.7$, $C_{Wn}=2.3$, $C_W=77.0$ [cm⁶], $J_t=0.1100$ [cm⁴], $\alpha=0.0234$, $\alpha l=1.05$, $k_B=0.000706$

荷重 $Y=Z=0$, $M_t=350$ kg-cm

計算結果を図-2 に示す。

iii) αl が小さい場合の展開式

αx が小的时候 (33) は

$$\begin{aligned} \theta &= A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x + Cx + D \\ &\approx D' + C'x + B'x^2 \left(1 + \frac{(\alpha x)^2}{12} + \frac{(\alpha x)^4}{360} \dots \right) \\ &\quad + A'x^3 \left(1 + \frac{(\alpha x)^2}{20} + \frac{(\alpha x)^4}{840} \dots \right) \quad \dots\dots\dots(65) \\ d\theta/dx &\approx C' + 2B'x[1 + (\alpha x)^2/6] + 3A'x^2[1 + (\alpha x)^2/12] \\ d^2\theta/dx^2 &\approx 2B'[1 + (\alpha x)^2/2] + 6A'x[1 + (\alpha x)^2/6] \\ d^3\theta/dx^3 &\approx 2\alpha^2 B'x[1 + (\alpha x)^2/6 + 6] + 6A'[1 + (\alpha x)^2/2] \\ d^4\theta/dx^4 &\approx 2\alpha^2 B'[1 + (\alpha x)^2/2] + 6\alpha^2 A'x[1 + (\alpha x)^2/6] \quad \dots\dots\dots(66) \end{aligned}$$

ここに $A'B'C'D'$ は新しい積分常数。 $\alpha l \leq 2$ で [] を 1 と置ける。しかし始めから $J_t=0$ と置いた式では, 例 i) の場合 $d^4\theta/dx^4$ 項従って M_φ , N_φ は消えてしまう。

C. 縁梁付算例: $\alpha=30$, $d=d_1=0.2264$, $l=60$, $h_1=5.19$ [cm], $\varphi_1=30^\circ$

断面の常数 $\varepsilon=1.07872$; $C_{Ws}=3990$, $C_{Wn}=3$, $C_W=3993$ [cm⁶], $J_t=0.16167$ [cm⁴], $\alpha=0.003946$, $\alpha l=0.236$

本例では θ , σ_x , τ , について J_t を無視しても誤差は 2,3% にすぎない。

§ 12 検 討

i) J_t すなわち $M_{x\varphi}$ 無視の理論: Lundgren の行った $M_{x\varphi}$ 無視によると $\alpha^2 l^2 \leq 2$ すなわち $GJ_t l^2 \leq 2 EC_W$ 程度の誤差を生じ, θ , σ_x , τ は本理論より大きく出る。また $M_L=0$ の場合 M_φ , N_φ は零になり算出できない。

計算例での, 本理論値に対する J_t 無視理論値の比

例	αl	θ の比	$\sigma_x(x=0)$ の比
A	1.45	1.85	1.50
B	1.06	1.45	1.44
C	0.237	1.02	1.02

$\alpha l > 0.5$ 以上では 1 割以上の誤差となるから, $M_{x\varphi}$ は

無視することはできず本論によらねばならぬ。

ii) $r_{x\varphi}$ の無視 (仮定 ii): 短い場合撓がずれ¹³⁾⁸⁾ 薄膜理論では応力が端に集中することが示されており⁸⁾, さらに曲げを考えた本論でも, 短い方の適用限界を決める要素である。ねじりの場合は曲げの場合より誤差が小さいと考える¹³⁾。

iii) 妻壁の剛性: 妻壁だけの曲げ剛性に比し, 実際には接続する曲版が協働して, より剛であると考えられる。一案として曲版との接続線に関する断面二次モーメントを剛な限界として提案しておく。これは実験的研究を要する。

iv) 適用性: 厳正解は単純支持の場合のみ可能で本例題の場合にはない。後者に対しては実験的に検討し, 別論で報告する。

§ 13 結

i) 円筒曲版屋根の梁理論を, $M_{x\varphi}$ を考慮に入れて, 逆対称荷重を受ける場合に拡張した。拘束ねじり理論では出ない各応力を導いた。

ii) 結果を実用公式化し数表を付した。

iii) 在来の $M_{x\varphi}$ 無視理論は $GJ_t l^2 \leq 2 EC_W$ 程度の誤差を生じ, 扁平・長スパンの曲版には利用できない。

iv) ねじり状態では, 曲げの場合と異り, 妻壁の剛性が相当影響する。これに対しエネルギー法による近似式を出した。

v) 正解によらない場合の解法としては, 短い場合は薄膜理論⁸⁾ 長い場合は本論に依るのがよい。 $M_{x\varphi}=0$ 理論は両者が接近する中間領域で使え, 両者の近似になる。

vi) 実験との比較は次に発表する。

謝辞 本研究に対しては文部省科研費を受け, また大阪市大学生に計算を手伝って載いた。こゝに厚く感謝する。

【文 献】

- 1) 横尾義貫・日置: (研究報告 12 号, 1951.6)
- 2) 日置: (研究報告 14 号, 16 号, 論文集 44 号 1952)
- 3) Lundgren, H.: Cylindrical Shells, Vol. 1 (1949).
- 4) 日置: (研報 41 号, 1957)
- 5) 日置: (論文報告集 58・59 号 1958)
- 6) 日置・栗野・進藤汎海: (論文報告集 63 号, 1959)
- 7) 日置・市川直人: 円弧シリンダーシャーレの一近似解法 (逆対称の場合) (研報 22 号 1953)
- 8) 日置: (論文報告集 73 号 1962.6)
- 9) Flügge, W.: Statik u. Dynamik der Schalen.
- 10) 日置: (論報 76, 大会学術講演要旨集・昭 37, 1962)
- 11) Heki, K.: Practical stress calculations of circular cylindrical shell roofs by the theory of beams (Memoirs of Fac. Eng. Osaka City Univ. Vol. 1, 1959)
- 12) Heki, K.: Beam theory of cylindrical shell roofs under antisymmetric loadings (Memoirs of Fac. Eng. Osaka City Univ. Vol. 4, 1962)
- 13) Heilig, H.: Stahlbau 30, 4, 1961