補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の 変形挙動解析

その 1 線形領域における基礎微分方程式と数値計算例

正 会 員 上 田 正 生*
正 会 員 土 橋 由 造**

1. はじめに

周知のように、鉄筋コンクリート (RC) 構造は、鉄筋とコンクリートの一体作用を前提として、初めて成立し得るものである。したがって、「RC 部材の変形性状が、その主要な構成要素である鉄筋とコンクリートの個々の力学的性質のみならず、両者がどの程度一体となって働くかによって大きく左右される」のもまた、当然のことである。この両者の“一体の程度”を規定するのは、いうまでもなく鉄筋とコンクリート間の付着作用である。

鉄筋とコンクリート相互間の力の伝達をつかさどる付着作用は、直接的には、主として亀裂近傍の引張り側コンクリートの応力分担と、亀裂端での鉄筋の抜け出しに係わるものであるが、延ては、部材の曲げ剛性を左右することになり、結果として、曲げに支配される RC 部材の、亀裂発生後の変形挙動を支配する最も重要な要因の一つとなるものである。

コンクリートの亀裂の発生・進展とともに、RC 部材の内部で実際に起こっている付着現象は極めて複雑なので、これを理論的に取り扱う場合には、何等かの単純化を行うのが普通である。RC 部材のうちでも、鉄筋とコンクリート間の付着現象の理論的な研究が最も進んでいるのは部材を例にとれば、その解析方法は、大略して次の 4 種に分類することができる。すなわち、1) 複雑な付着問題を直接取り扱わずに、付着作用の結果として鉄筋から伝達されるコンクリートの引張り側の応力分担を、経験に基づいて近似的に評価し、この部分の曲げ剛性への寄与を算定する間接的な手法^{1)~6)}、2) はりを平面応力問題として扱い、鉄筋とコンクリートの付着作用を滑り現象と見做して、ボンドリンクで表示する有限要素解析法^{7)~11)}、3) 付着作用を鉄筋近傍のコンクリートの剪断抵抗として取り扱う二次元有限要素解析法¹²⁾、4) 従来の平面保持の仮定に立脚したはり要素に、補強筋の

滑りの効果を組み入れる方法^{13)~22)}、等である。以上を通観すると、鉄筋とコンクリートの付着作用を直接考慮する際には、これを付着滑り現象として取り扱うのが最も一般的である。しかしながら、RC 床板については、著者の知る限りでは、はりに関する上述の 4 手法のうちの、1) に相当する間接的な方法があるのみであり^{23)~28)}、拘束端における鉄筋の抜け出しのみを考慮する簡略化手法^{29), 30)}を除くと、鉄筋とコンクリート間の付着作用を、直接解析に取り入れた研究は、ほとんど見当たらないのが現状のようである。この原因としては、RC 床板の場合、はり等の解析において多用されているボンド・リンクを用いた有限要素法を適用するには、必然的に膨大な要素分割を必要とする三次元解析を行わねばならなくなること、等が挙げられる。したがって、RC 床板の補強筋の付着滑りを理論的に取り扱うには、既往の板理論に付着滑りの効果を取り入れることが特に重要となる。

本研究は、以上のような研究の現状に鑑み、補強筋に付着滑りを許し、コンクリート部分には法線保持の仮定を用いた場合の、RC 床板の短期材料非線形解析、ならびに、使用荷重下の長期変形挙動解析を究極の目的とするものであり、本論ではまず、曲げを受ける RC 床板の線形領域における基礎微分方程式と、有限要素法による若干の線形計算例について報告する。

2. 補強筋の付着滑りを考慮した RC 床板の曲げ理論

RC 床板が線形 (弾性) 領域にある場合には、鉄筋とコンクリートの間に完全付着を仮定し得ることは、いわば“暗黙の了解事項”として容認されている。この線形領域における「完全付着の仮定」は、理論的に証明されたものではなく、恐らく「床板内の鉄筋の応力や撓みの実測値と、通常の弾性理論による計算値とが、大略一致すること」等の、実験的な事実根拠をおくものであることは、容易に推察し得るところである。したがって、線形領域にある通常の RC 床板を対象とする限り、補強筋の付着滑りを考慮することの必要性は低いといえることができる。しかし前述したように、亀裂発生後の非弾性域では、補強筋の付着滑りが主要な役割を果たすことに

本報告は、参考文献 31), 32) を加筆・修正し、とりまとめたものである。

* 北海道大学 助教授

** 北海道大学 名誉教授・工博

(昭和 60 年 8 月 9 日原稿受理)

なるので、その最も基本となる線形域における、補強筋の付着滑りを考慮した RC 床板の曲げ理論を確立しておくことは、極めて重要な問題となる。

2.1 基本仮定事項

理論展開を行うに当たって用いた基本仮定事項を以下に列挙する。

1) RC 床板には、面内荷重と面外荷重による曲げが作用し、微小変形理論が適用できるものとする。

2) コンクリートは平面応力場にある等方弾性体で、かつ、コンクリート断面には法線保持の仮定が成立する。

3) 鉄筋は直交する x, y 方向に、それぞれ k および m 層ずつ配筋されており、個々の鉄筋層は、平面的には平均化されているが、板厚方向には大きさを持たず、配筋位置に集中して存在するものとし、配筋方向の軸力のみを負担する線材として取り扱う。

4) x, y の各層の鉄筋とコンクリートの間には、配筋方向の付着滑りが生じ得るものとし、ある位置における鉄筋の滑り変位は、法線が保持されるコンクリート部分からのズレ変位で表示でき、また付着応力と滑り変位の間には、線形関係が成立するものとする。

2.2 変位場、および、ひずみと応力

図-1 の (a) は実際の RC 床板の断面を、また (b) は理想化した断面と記号を図示したものである。前節の仮定に基づき、この問題を定式化するために設定しなければならない変位は、図-2 に示すように、板中央面の x, y 方向の変位 u, v と、 z 方向の変位 w 、ならびに板断面内の x, y 方向にそれぞれ k および m 層配筋されている全鉄筋層の滑り変位 $S_{x1}, S_{x2} \cdots S_{xk} \cdots S_{xm}, S_{y1}, S_{y2} \cdots S_{ym}$ の計 $(3+k+m)$ 個からなっている。

[コンクリートのひずみと応力]：

板の中央面から z だけ離れた任意点 (x, y, z) のコ

図-1 RC 床板の断面記号

図-2 座標軸と変位場

ンクリートのひずみ $\{\epsilon_c\}$ は、次式で表示される。

$$\{\epsilon_c\} = \{\epsilon_{cx} \quad \epsilon_{cy} \quad \gamma_{cxy}\}^T = \{\epsilon_0\} + z\{\phi\} \cdots \cdots (1)$$

ここに、 $\{\epsilon_0\}$ と $\{\phi\}$ は、それぞれ板中央面の面内ひずみと、はりの場合の曲率に相当する一般化ひずみであり、下式で表される。

$$\{\epsilon_0\} = \{\epsilon_{0x} \quad \epsilon_{0y} \quad \gamma_{0xy}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T \cdots \cdots (2)$$

$$\{\phi\} = \{\phi_x \quad \phi_y \quad \phi_{xy}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \cdots \cdots (3)$$

したがって、同じ位置のコンクリートの応力 $\{\sigma_c\}$ は、次式で与えられる。

$$\{\sigma_c\} = \{\sigma_{cx} \quad \sigma_{cy} \quad \tau_{cxy}\}^T = [D_c] \{\epsilon_c\} \cdots \cdots (4)$$

ここに、 $[D_c]$ はコンクリートの応力-ひずみマトリクスで、

$$[D_c] = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdots \cdots (5)$$

ただし、 E_c ：コンクリートのヤング係数

ν ：コンクリートのポアソン比

[鉄筋層のひずみと応力]：

板断面内の x, y 方向に、それぞれ k および m 個存在する鉄筋の全層を各個別に取り扱う必要はなく、両方向の代表的な任意の i 層について論ずれば十分である。

x 方向の任意の i 層の鉄筋：この層の鉄筋の配筋方向のひずみ ϵ_{sxi} は、次式で表示することができる。

$$\epsilon_{sxi} = \epsilon_{0x} + h_{xi}\phi_x + \epsilon_{ssxi} \cdots \cdots (6)$$

ただし、 ϵ_{sxi} ： x 方向の鉄筋層 i の x 方向のひずみ

h_{xi} ：板中央面から x 方向の鉄筋層 i までの距離で、 $h_{xi} = d_{xi} - t/2$

また、(6) 式中の ϵ_{ssxi} は、この鉄筋層の x 方向の滑り率であり、次式で表される。

$$\epsilon_{ssxi} = \partial S_{xi} / \partial x \cdots \cdots (7)$$

したがって、この層の鉄筋の x 方向の分担応力 σ_{sxi} は、

$$\sigma_{sxi} = E_{sxi} \epsilon_{sxi} \cdots \cdots (8)$$

ただし、 E_{sxi} ： x 方向の i 層の鉄筋のヤング係数

y 方向の任意の i 層の鉄筋：この層の鉄筋の y 方向のひずみ ϵ_{syi} は、 x 方向の場合と同様、次式で表示することができる。

$$\epsilon_{syi} = \epsilon_{0y} + h_{yi}\phi_y + \epsilon_{ssyi} \cdots \cdots (9)$$

ただし、 h_{yi} ：板中央面から y 方向の鉄筋層 i までの

距離で、 $h_{yi} = d_{yi} - t/2$

また、(9) 式中の ϵ_{ssyi} は、この層の鉄筋の y 方向の滑り率で、下式で示される。

$$\epsilon_{ssyi} = \partial S_{yi} / \partial y \cdots \cdots (10)$$

したがってまた、この層の鉄筋の y 方向の分担応力 σ_{syi} は、

$$\sigma_{syt} = E_{syt} \varepsilon_{syt} \dots \dots \dots (11)$$

ただし、 E_{syt} : y 方向の i 層の鉄筋のヤング係数

2.3 軸力, モーメント, せん断力

前節で得たコンクリート部分と、 x および y 方向の鉄筋層の応力に関する式 (4), (8), (11) を用いると、軸力 $|N| = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T$ と、モーメント $|M| = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T$ は、それぞれ次のように表示することができる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cx} dz + \sum_{i=1}^K A_{xi} (\sigma_{sxi} - h_{xi} \sigma_{cx}) \\ N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cy} dz + \sum_{i=1}^m A_{yi} (\sigma_{syt} - h_{yi} \sigma_{cy}) \\ N_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{cxy} dz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cx} z dz + \sum_{i=1}^K A_{xi} h_{xi} (\sigma_{sxi} - h_{xi} \sigma_{cx}) \\ M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cy} z dz + \sum_{i=1}^m A_{yi} h_{yi} (\sigma_{syt} - h_{yi} \sigma_{cy}) \\ M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{cxy} z dz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

ただし、 A_{xi} , A_{yi} : 床板単位面積当たりの、 x および y 方向の任意の i 層の鉄筋断面積
ここに、 $h_{xi} \sigma_{cx}$ と $h_{yi} \sigma_{cy}$ は、 x および y 方向の i 層の鉄筋と同じ位置における鉄筋に対応する方向のコンクリートの応力で、鉄筋によるコンクリート断面の欠損を考慮するために必要となるものである。

上式に、(1)~(4) 式、(6)~(11) 式を代入して整理すると、 $|N|$ と $|M|$ は変位で表示され、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \left(\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{E_c t \nu}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^K A_{xi} E_{sxi} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right) \\ N_y &= \left(\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum_{i=1}^m A_{yi}^* E_{syt} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{E_c t \nu}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \sum_{i=1}^m A_{yi}^* E_{syt} h_{yi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m A_{yi} E_{syt} \left(\frac{\partial S_{yt}}{\partial y} \right) \\ N_{xy} &= \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi}^2 \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &\quad - \frac{E_c t^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^K A_{xi} E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right) \\ M_y &= \sum_{i=1}^m A_{yi}^* E_{syt} h_{yi} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m A_{yi}^* E_{syt} h_{yi}^2 \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &\quad - \frac{E_c t^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m A_{yi} E_{syt} h_{yi} \left(\frac{\partial S_{yt}}{\partial y} \right) \\ M_{xy} &= - \frac{E_c t^3}{12(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

ただし、 $A_{xi}^* = A_{xi}(1 - E_c/E_{sxi})$, $A_{yi}^* = A_{yi}(1 - E_c/E_{syt})$
また、せん断力 $|Q| = \{Q_x \ Q_y\}^T$ は、(15) 式のモーメント $|M|$ を微分して得られ下式となる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ &\quad - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi}^2 \right] \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \\ &\quad - \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^K A_{xi} E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial^2 S_{xi}}{\partial x^2} \right) \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \sum_{i=1}^m A_{yi}^* E_{syt} h_{yi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &\quad - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_{i=1}^m A_{yi}^* E_{syt} h_{yi}^2 \right] \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \\ &\quad - \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m A_{yi} E_{syt} h_{yi} \left(\frac{\partial^2 S_{yt}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

2.4 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

最小全ポテンシャル・エネルギー原理に基づき、この問題を支配する基礎微分方程式を導くことを考える。一般に、全ポテンシャル・エネルギーは、次式で表示される。

$$\Pi = U - V \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 U は外力の作用によって構造系に蓄えられ内部エネルギーであり、 V は外力がなす負荷ポテンシャル・エネルギーである。

内部エネルギー U : 補強筋の付着滑りを考慮した場合の RC 部材の内部エネルギー U は、下式で表すことができる。

$$U = U_{cn} + U_{st} + U_{bs} \dots \dots \dots (18)$$

上式中の U_{cn} と U_{st} は、コンクリート部分と x , y 両方向の全鉄筋層に蓄積されるひずみエネルギーであり、 U_{bs} は、各層の鉄筋とコンクリートの界面に生ずる付着

滑りに係るエネルギーの総和である。これらのうちの U_{cn} と U_{st} は、前項 2.3 で得た諸式を用いて、それぞれ次のように求められる。

$$U_{cn} = \frac{1}{2} \iint_R \int_{-t/2}^{t/2} \{ \epsilon_c \}^T [D_c] \{ \epsilon_c \} dz dx dy \\ - \frac{1}{2} \iint_R \left[\sum_{i=1}^K A_{xi} E_{cxi} \epsilon_{cx}^2 + \sum_{i=1}^m A_{yi} E_{cxi} \epsilon_{cy}^2 \right] dx dy \quad (19)$$

$$U_{st} = \frac{1}{2} \iint_R \left[\sum_{i=1}^K A_{xi} E_{sxi} \epsilon_{sxi}^2 + \sum_{i=1}^m A_{yi} E_{syi} \epsilon_{syi}^2 \right] dx dy \quad (20)$$

次に付着滑りに関する U_{bs} を考える。基本仮定事項 4) より、鉄筋とコンクリートの境界に生ずる付着応力と滑り変位の間には、線形関係が成り立つから、 x および y 方向の各任意の i 層の付着応力 τ_{xi} と τ_{yi} は、次式で表される。

$$\tau_{xi} = K_{bxi} S_{xi}, \quad \tau_{yi} = K_{byi} S_{yi} \quad (21)$$

ただし、 K_{bxi} , K_{byi} : x および y 方向の i 層の鉄筋の付着係数

したがって、 x, y 全鉄筋層の付着滑りに係る内部エネルギー U_{bs} は、下式で表示することができる。

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \iint_R \left[\sum_{i=1}^K \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi}^2 + \sum_{i=1}^m \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi}^2 \right] dx dy \quad (22)$$

ただし、 Ω_{xi} , Ω_{yi} : x および y 方向の i 層の鉄筋の、床板単位積当たりの表面積

負荷ポテンシャル・エネルギー V : V は、外力のポテンシャルであるから、当然のことながら載荷条件によって異なったものとなるが、ここでは z 方向の分布荷重 q_z のほかに、板の境界に沿って、面内方向の外荷重が作用する場合を考える。すなわち、図-3 の C_1 で表される板境界の側面に、図-4 に示すような単位面積当たりの量で定義される x および y 方向の分布荷重 $\bar{F}_x$

図-3 板の境界と座標系

(a) $x-z$ 断面

(b) $y-z$ 断面

図-4 境界に作用する分布外荷重 $\bar{F}_x$ と $\bar{F}_y$

および $\bar{F}_y$ が作用しているものとする、この時の負荷ポテンシャル・エネルギー V は、下式で表示される。

$$V = \iint_R q_z w dx dy + \int_{C_1} \left[\bar{N}_{xn} u + \bar{N}_{yn} v + \bar{M}_{xn} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{M}_{yn} \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\zeta \quad (23)$$

ただし、

$$\bar{N}_{xn} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_x dz, \quad \bar{N}_{yn} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_y dz$$

$$\bar{M}_{xn} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_x z dz, \quad \bar{M}_{yn} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_y z dz$$

全ポテンシャル・エネルギー汎関数 Π : 以上の (17) ~ (23) 式と前項 2.3 の諸式の関係より、全ポテンシャル・エネルギー汎関数は、次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint_R \left[\left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & + \frac{2\nu E_c t}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} \right. \\ & + \sum_{i=1}^m A_{yi}^* E_{syi} \left. \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left. \right\} + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} \right. \\ & + \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi}^2 \left. \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} \right. \\ & + \sum_{i=1}^m A_{yi}^* E_{syi} h_{yi}^2 \left. \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\ & + \frac{E_c \nu t^3}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & + \frac{E_c t^3}{6(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ & + \sum_{i=1}^K \left\{ A_{xi} E_{sxi} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right)^2 + \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi}^2 \right\} \\ & + \sum_{i=1}^m \left\{ A_{yi} E_{syi} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right)^2 + \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi}^2 \right\} \\ & - 2 \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & - 2 \sum_{i=1}^m A_{yi}^* E_{syi} h_{yi} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & - 2 \sum_{i=1}^K A_{xi} E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right) \\ & - 2 \sum_{i=1}^m A_{yi} E_{syi} h_{yi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right) \\ & + 2 \sum_{i=1}^K A_{xi} E_{sxi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right) \\ & + 2 \sum_{i=1}^m A_{yi} E_{syi} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right) - 2 q_z w \left. \right] dx dy \\ & - \int_{C_1} \left[\bar{N}_{xn} u + \bar{N}_{yn} v + \bar{M}_{xn} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{M}_{yn} \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\zeta \quad (24) \end{aligned}$$

2.5 基礎微分方程式

補強筋の付着滑りを考慮した RC 床板の基礎微分方

程式は、(24) 式の汎関数の変分をとり、極値化することによって求められる。すなわち、変位 u, v, w および x, y 両方向の代表的な滑り変位 S_{xi} と S_{yi} について、Euler-Lagrange 方程式を構成することにより、図—3 の境界曲線 C_1 で囲まれたすべての領域で満たすべき、以下に示す一連の支配微分方程式を得る。

変位 u に関して、

$$\left(\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + \sum_{i=1}^K A_{xi} E_{sxi} \left(\frac{\partial^2 S_{xi}}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (25)$$

変位 v に関して、

$$\left(\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum_{i=1}^M A_{yi}^* E_{syi} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \sum_{i=1}^M A_{yi}^* E_{syi} h_{yi} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + \sum_{i=1}^M A_{yi} E_{syi} \left(\frac{\partial^2 S_{yi}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (26)$$

変位 w に関して、

$$\left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi}^2 \right\} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \frac{E_c t^3}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_{i=1}^M A_{yi}^* E_{syi} h_{yi}^2 \right\} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \sum_{i=1}^K A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) - \sum_{i=1}^M A_{yi}^* E_{syi} h_{yi} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - \sum_{i=1}^K A_{xi} E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial^3 S_{xi}}{\partial x^3} \right) - \sum_{i=1}^M A_{yi} E_{syi} h_{yi} \left(\frac{\partial^3 S_{yi}}{\partial y^3} \right) = q_z \quad (27)$$

変位 S_{xi} に関して、

$$A_{xi} E_{sxi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h_{xi} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 S_{xi}}{\partial x^2} \right) = \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi} \quad (28)$$

変位 S_{yi} に関して、

$$A_{yi} E_{syi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - h_{yi} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 S_{yi}}{\partial y^2} \right) = \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi} \quad (29)$$

上式中の S_{xi} と S_{yi} に関する (28), (29) 式は、 x および y 方向の各鉄筋層ごとに成立するから、両式と相似な式は、それぞれの方向に配筋されている鉄筋層の数 (k, m) だけ存在することになる。

以上で得た (25)~(29) の各式は、(8), (11), (12), (13) 式の関係を用いて、以下に示すような一連の平衡方程式に変換することができ、各式がもつ力学的な意味はより明確となる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q_z \quad (32)$$

$$A_{xi} \frac{\partial \sigma_{sxi}}{\partial x} = \Omega_{xi} \tau_{xi} \quad (33)$$

$$A_{yi} \frac{\partial \sigma_{syi}}{\partial y} = \Omega_{yi} \tau_{yi} \quad (34)$$

3. 各鉄筋層が任意の配筋方向をもつ RC 床板を対象とした有限要素解析

この問題の有限要素法への定式化は、前 2 章の全ポテンシャル・エネルギー汎関数 (24) 式に基づいて容易に展開することができるが、この汎関数は、基礎微分方程式を簡潔な形で表示するために、補強筋の配筋方向が x, y の 2 方向のみに限定されている。したがって、(24) 式そのままの形では汎用性に欠けることになるので、ここでは、板内に配置されている各鉄筋層が、それぞれ任意の配筋方向をもつ場合を対象として、定式化することとする。

3.1 変位場、および、ひずみと応力

鉄筋は床板内部に n 層配筋されているものとする。ここで有限要素展開するために設定しなければならない変位場は、図—5 に示すように、板中央面における x, y, z 方向の変位 u, v, w と、全鉄筋層の n 個の滑り変位 $S_1, S_2, \dots, S_n$ の、計 $(3+n)$ 個の独立変数である。

[鉄筋のひずみと応力]：

コンクリート部分のひずみと応力は、(1)~(5) 式の関係がそのまま有効であるから、ここでは鉄筋層だけが問題となる。図—6 を参照すると、任意の i 層の鉄筋の配筋方向 l_i のひずみ ϵ_{si} は、次式となる。

$$\epsilon_{si} = \epsilon_{0si} + \epsilon_{bsi} + \epsilon_{ssi} \quad (35)$$

ただし、 ϵ_{0si} ：配筋方向の板中央面の面内ひずみ

ϵ_{bsi} ：配筋位置 h_{si} の配筋方向の曲げひずみ

座標軸と配筋方向

変位場

図—5 座標系と変位場

図—6 RC 床板の断面記号

ϵ_{sti} : 鉄筋層 i の配筋方向の滑り率

上式の右辺の各ひずみ成分は、それぞれ次のように表される。

$$\epsilon_{0st} = [H_{st}] \{ \epsilon_0 \} \dots\dots\dots (36)$$

$$\epsilon_{bst} = h_{st} [H_{st}] \{ \phi \} \dots\dots\dots (37)$$

$$\epsilon_{sti} = \partial S_i / \partial l_i = [T_{st}] \{ \partial S_i / \partial x \quad \partial S_i / \partial y \}^T \dots\dots\dots (38)$$

ただし、

$$[H_{st}] = [\cos^2 \phi_i \quad \sin^2 \phi_i \quad (\cos \phi_i \cdot \sin \phi_i)]$$

$$[T_{st}] = [\cos \phi_i \quad \sin \phi_i]$$

また、 i 層の鉄筋の応力 σ_{st} は、

$$\sigma_{st} = E_{st} \epsilon_{st} \dots\dots\dots (39)$$

ただし、 E_{st} : i 層の鉄筋の弾性係数

3.2 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

この場合の全ポテンシャル・エネルギー汎関数は、前2章の汎関数を導いたときと同様にして、容易に求められる、下式となる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint_R \left[t \{ \epsilon_0 \}^T [D_c] \{ \epsilon_0 \} + \frac{t^3}{12} \{ \phi \}^T [D_c] \{ \phi \} \right. \\ & + \sum_{i=1}^n A_{st} E_{st} \epsilon_{st}^2 + \sum_{i=1}^n \Omega_{st} K_{bst} S_i^2 - 2 q_z w \Big] dx dy \\ & - \int_{C_1} \left[\bar{N}_{xn} u + \bar{N}_{yn} v + \bar{M}_{xn} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{M}_{yn} \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\zeta \end{aligned} \dots\dots\dots (40)$$

ただし、 K_{bst} : i 層の鉄筋の付着係数

Ω_{st} : 床板の単位面積当たりの i 層の鉄筋の付着面積

A_{st} : 床板単位面積当たりの i 層の鉄筋断面積

3.3 有限要素法への定式化

前項3.2で得た汎関数(40)式に基づき、図-7に掲げる矩形要素を用いて、有限要素法への定式化を行うこととする。

(1) 変位関数とひずみ

ここで導入しなければならない基本独立変数は、前項3.1で述べたすべての変位量であり、板中央面の x, y, z 方向の変位 u, v, w と、全鉄筋層 n 個の滑り変位 $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n$ となる。

[面内変形]: 面内変形 u, v に対しては、次の変位関数を用いる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{ \alpha_0 \} \\ &= [f_0] \{ \alpha_0 \} \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

図-7 矩形要素と節点変位

ただし、 $\{ \alpha_0 \}$: 面内変位の一般化変位

変位 u, v に対応する要素の節点変位ベクトル $\{ \delta_0 \}$ は、次のように表される。

$$\{ \delta_0 \} = [C_0] \{ \alpha_0 \} \dots\dots\dots (42)$$

ただし、 $[C_0]$: 要素各節点の座標値を、(41)式の $[f_0]$ に代入して得られる係数マトリクス

したがって、要素内の面内ひずみ $\{ \epsilon_0 \}$ は下式で表される。

$$\{ \epsilon_0 \} = [b_0] [C_0^{-1}] \{ \delta_0 \} \dots\dots\dots (43)$$

ただし、 $[b_0]$: (41)式中の $[f_0]$ を微分して得られる係数マトリクス

[曲げ変形]: 面外荷重による床板の曲げ変形を表示するために、ここでは、12自由度を有する周知の矩形要素を使用する。鉛直変位 w の変位関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} w &= [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3] \{ \alpha_b \} \\ &= [f_b] \{ \alpha_b \} \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

ただし、 $\{ \alpha_b \}$: 曲げ変形の一般化変位

また、回転角 θ_x, θ_y は、

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [f_b] \{ \alpha_b \} \dots\dots\dots (45)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} [f_b] \{ \alpha_b \} \dots\dots\dots (46)$$

したがって、変位成分 w, θ_x, θ_y に対応する要素節点変位ベクトル $\{ \delta_b \}$ は、(44)~(46)の関係を用いて求められ、下式となる。

$$\{ \delta_b \} = [C_b] \{ \alpha_b \} \dots\dots\dots (47)$$

ただし、 $[C_b]$: 先の $[C_0]$ の場合と同様にして求められる係数マトリクス

床板の一般化ひずみ $\{ \phi \}$ は、(3)式および(44)~(47)式の関係を用いて、次式で表される。

$$\begin{aligned} \{ \phi \} &= \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_b] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [f_b] - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [f_b] \right]^T \{ \alpha_b \} \\ &= [b_b] [C_b^{-1}] \{ \delta_b \} \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

[滑り変形]: 全鉄筋層の滑り変位については、すべて典型的に取り扱うことができるので、任意の鉄筋層 i についてのみ示すこととする。

鉄筋層 i の配筋方向の滑り変位 S_i を、次の変位関数で表示する。

$$S_i = [1 \quad x \quad y \quad xy] \{ \alpha_{si} \} = [f_s] \{ \alpha_{si} \} \dots\dots\dots (49)$$

ただし、 $[f_s]$: すべての鉄筋層に共通の形状関係

$\{ \alpha_{si} \}$: 鉄筋層 i の滑り変形の一般化変位

この滑り変位 S_i に対応する要素節点変位 $\{ \delta_{si} \}$ は、上式に各節点の座標値を代入してえられ、下式となる。

$$\{ \delta_{si} \} = [C_s] \{ \alpha_{si} \} \dots\dots\dots (50)$$

ただし、 $[C_s]$: すべての鉄筋層に共通の係数マトリクス

したがって、鉄筋層 i の配筋方向の滑り率 ϵ_{sti} は、上二

式および (38) 式の関係より,

$$\epsilon_{ssi} = [b_{si}] [C_s^{-1}] \{\delta_{si}\} \dots (51)$$

ただし, $[b_{si}] = [0 \quad \cos \phi_i \quad \sin \phi_i \quad (y \cdot \cos \phi_i + x \cdot \sin \phi_i)]$

(2) 要素剛性マトリクス

以上で得た各式を汎関数 (40) 式に代入し, 変分をとると, 鉄筋の付着滑りを考慮した RC 床板の線形解析のための要素剛性マトリクスが得られ, 下式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{0b} & K_{0s} \\ K_{b0}^T & K_{bb} & K_{bs} \\ K_{s0}^T & K_{sb}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_0 \\ \delta_b \\ \delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_b \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (52)$$

ただし, $\{\delta_s\}$: 全鉄筋層に関する節点滑り変位ベクトルで, 各層の変位ベクトルから構成され, $\{\delta_s\} = [\delta_{s1} \quad \delta_{s2} \dots \delta_{si} \dots \delta_{sm}]$ で表わされる。

上式中の部分マトリクスのうちの $[K_{00}]$, $[K_{0b}]$, $[K_{bb}]$ は, それぞれ次式で表示される。

$$[K_{00}] = [C_0^{-1}]^T \iint_R [b_0]^T \{t[D_c] + \sum_{i=1}^n A_{si} E_{si} [H_{si}]^T [H_{si}] \} [b_0] dx dy \cdot [C_0^{-1}] \dots (53)$$

$$[K_{0b}] = [C_0^{-1}]^T \iint_R [b_0]^T \left\{ \sum_{i=1}^n A_{si} E_{si} h_{si} [H_{si}]^T [H_{si}] \right\} \cdot [b_b] dx dy \cdot [C_0^{-1}] \dots (54)$$

$$[K_{bb}] = [C_b^{-1}]^T \iint_R [b_b]^T \left\{ \frac{t^3}{12} [D_c] + \sum_{i=1}^n A_{si} E_{si} h_{si}^2 [H_{si}]^T [H_{si}] \right\} [b_b] dx dy \cdot [C_b^{-1}] \dots (55)$$

また, (52) 式の他の部分マトリクス $[K_{0s}]$, $[K_{bs}]$, $[K_{ss}]$ は, 下式に掲げる任意の i 層の鉄筋に関する部分マトリクス $[k_{0si}]$, $[k_{bsi}]$, $[k_{ssi}]$ を, 全鉄筋層の節点滑り変位ベクトル $\{\delta_s\}$ の並び順にしたがって再構成することにより, 容易に求められる。

$$[K_{0si}] = [C_0^{-1}]^T \iint_R A_{si} E_{si} [b_0]^T [H_{si}]^T [b_{si}] dx dy \cdot [C_{si}^{-1}] \dots (56)$$

$$[K_{bsi}] = [C_b^{-1}]^T \iint_R A_{si} E_{si} h_{si} [b_b]^T [H_{si}]^T [b_{si}] dx dy \cdot [C_{si}^{-1}] \dots (57)$$

$$[K_{ssi}] = [C_{si}^{-1}]^T \iint_R [\Omega_{si} K_{bsi} [f_{si}]^T [f_{si}] + A_{si} E_{si} [b_{si}]^T [b_{si}]] dx dy \cdot [C_{si}^{-1}] \dots (58)$$

4. 数値計算例とその考察

補強筋の滑りが, 線形域における RC 床板の力学性状にどのような影響をおよぼすかを調べるため, モデル床板を設定して数値計算を行い, 若干の検討・考察を試みる。

(1) x, y 直交配筋を有する単純支持床板

図—8 モデル床板の断面および
仮定材料性状

図—9 要素分割形状

ここで解析の対象とするモデル床板は, 等分布荷重を受ける板厚 20 cm, スパン 5 m の正方形単純支持床板で, 鉄筋は x および y 方向に各一層づつ配筋されており, 両鉄筋層はまた, 支持端で完全に定着されているものとする。

図—8 には, モデル床板の断面寸度と配筋状況, ならびに鉄筋とコンクリートの材料性状を掲げたが, この図からも明らかなように, 板の仮定断面を, より実際に近いものとするため, 両鉄筋層は板厚方向の配筋位置を違えて設定してある, また, 解析に当たっては, 支持端近傍で急変する付着応力の詳細を知るため, 支持端に近づくにつれて要素幅が狭くなる図—9 に示すような要素分割を用い, 荷重強度 ($q=2 \text{ t/m}^2$) や他の材料性状を一定とし, 付着係数 K_b (x, y 両方向とも同一値とする) のみを変化させ, これが RC 床板の力学性状におよぼす効果を調べることにする。

数値計算は, 付着係数 $K_b=10^{-2}$ から 10^6 (単位: kg/cm^3) までの 9 段階 ($K_b=10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$) について行った。

図—10 と 11 は, 鉛直変位 w , および x, y 方向の曲げモーメント M_x, M_y の, 板中央点におけるそれぞれの値が, 付着係数 K_b の変化とともに推移する様相を示したもので, 図には, 9 段階すべての K_b に対応する値を掲げた。両図中の各曲線のうち, w と M_x の曲線は, 付着係数 K_b 値が 10 から 10^4 の間で大きく変化しており, 10^4 以上と 10 以下の領域においては, ほぼ両極の極限状態に等しいことを示している。ここにおける両極とは, $K_b=\infty$ の完全付着に対応する“滑り固定”と, $K_b=0$

図—10 K_b の変化による
中央点たわみ w の推移

図—11 K_b の変化による中央
点曲げモーメント
 M_x, M_y の推移

のアンボンド状態に対応する“滑り自由”の2つの極限状態を意味している。ごく一般的な構造用異形棒鋼の場合、この線形付着係数 K_b が 10^4 以上の値をとることは確かなようであるから、上記の結果は、「通常の RC 床板が線形域にある場合には、鉄筋とコンクリートの間に完全付着の仮定が成り立つ」ことを立証するものであり、従来、暗黙のうちに是認されてきた線形域にある RC 部材の“完全付着の仮定”に、理論的な根拠を与えるものである。また、図—11 中の y 方向の曲げモーメント M_y は、ほぼ一定の値を保っており、一見 K_b の値には影響されないようにみえるが、これは K_b の変化に伴う M_y の増～減が、(y 方向よりも有効丈の大きな鉄筋を有する x 方向の) モーメント M_x の増～減に起因する M_y の、対応する減～増量と相殺された結果と考えられ、 M_y が K_b の値と無関係であることを意味するものではない。

図—12 と 13 は、 K_b の変化に伴う、同モデル床板の中央線（図—9 の C-A および C-B 線）に沿う鉄筋応力と付着応力の分布曲線の推移状況を、それぞれ対比して

示したものである。両図には、8種類の付着係数に対応する各応力値を掲げたが、これらの結果は、先の図—11 と 12 での考察の妥当性を裏付けており、また、この床板が線形域としては、可成りの高荷重であるにもかかわらず、付着応力の絶対値は、鉄筋応力に比して、極めて小さな値となることを示している。また、図—14 と 15 には参考のため、付着係数 K_b の増・減によって、床板中央線に沿うたわみとモーメントの各曲線が、どの程度変化するかを、ここで設定した K_b の両極の場合について図示したが、これらの図は、「 K_b の変動に起因する各曲線の変化量は、対応する全体量と比較すると、さほど大きなものではない」ことを示している。

なお、この計算例は、スパン長の割には板厚の比較的高い場合を取り扱ったが、鉄筋の付着滑りの RC 床板の力学性状におよぼす効果は、付着係数が同一の場合、鉄筋比と有効丈比にのみ左右されることになるので、定量的な幾分かの差はとも角、板厚の違いによる定性的な変化は生じ得ないことを付記する。

(2) 斜め 45 度直交配筋を有する単純支持床板

(a) x 方向の鉄筋応力分布

(b) y 方向の鉄筋応力分布

図—12 K_b の変化による鉄筋応力分布の推移状況

(a) x 方向の鉄筋付着応力分布

(b) y 方向の鉄筋付着応力分布

図—13 K_b の変化による付着応力分布の推移状況

図—14 $K_b=10^6$ と 10^2 の場合の
たわみ曲線の比較

図—15 $K_b=10^6$ と 10^2 の場合の曲げ
モーメント曲線の比較

図—16 たわみ曲線の比較

斜め方向配筋を持つ RC 床板の解析例を示すために、前項 (1) のモデル床板の x, y 両鉄筋層の配筋方向のみを、板中央点回りの反時計方向に 45 度回転させて斜め直交配筋床板に変更し、付着係数 $K_b=10^4$ の場合について計算を行ってみる。

図—16 は、板中央線に沿う鉛直変位曲線を、 x, y 直交配筋の場合と比較したものである。この図は、斜め 45 度配筋の曲線の方が、 x, y 直交配筋のそれより小さな値を示しており、後者に対する前者の配筋の優位性を示唆している。

図—17(a), (b) には、板の対角線に沿う各配筋方向の曲げモーメントを、既往の等方性板の解³³⁾とそれぞれ

対比して掲げ、また図—18(a), (b) には、同じく板の対角線に沿う各配筋方向の鉄筋応力分布曲線を示した。これら両図の (a), (b) を、各対角線ごとにそれぞれ比較すると、「曲げモーメント」と「鉄筋応力」の全体的な曲線形状は可成り良く類似しているが、各対角線と同一方向の曲げモーメントの絶対値は、板中央点の方が隅角点の値より大きくなっているのに対して、対応する方向の鉄筋応力曲線では、両点の絶対値の大小関係が逆転している。これは、鉄筋の付着滑り作用がその主因であるためではなく、鉄筋を「軸方向の応力のみを分担する線材」として取り扱ったことによるポアソン効果無視に起因するものである。すなわち、C-D 線上の l_1 方向

(a) CD線上

(b) CE線上

図—17 床板の対角線に沿う各配筋方向の曲げモーメント曲線

(a) CD線上

(b) CE線上

図—18 板の対角線に沿う各配筋方向の鉄筋応力曲線

図—19 板の対角線に沿う各配筋方向の付着応力曲線

の鉄筋応力 σ_s を例にとれば、この σ_s に関係するのは l_1 方向の鉄筋ひずみ ε_{s1} のみであり、ポアソン効果が無視されているため C-D 線に直交する l_2 方向のひずみ ε_{s2} が何等の寄与もしない（これに対して曲げモーメントの場合、コンクリート部分がその量の大半を占めるので、考慮中のモーメントの方向に直交する方向のひずみからのポアソン効果が有効に寄与することになる）からである。また図—19 には参考のため、板の各対角線 C-D、および C-E に沿う、これと同一配筋方向を有する鉄筋の付着応力分布曲線（いうまでもなく各対角線上の、これに直交する方向の鉄筋の付着応力は、すべてゼロとなる）を対比して掲げた。

5. まとめ

本報告では、補強筋に滑りを許し、コンクリート部分には法線保持の仮定を用いた場合の、RC 床板の線形領域における曲げについて論じた。まずこの問題を支配する RC 床板の基礎微分方程式を導き、さらに、有限要素法への定式化を行って、単純支持モデル RC 床板の数値計算例により、付着係数 K_b の大きさが床板の力学的性状におよぼす影響を明らかにし、1) 付着係数 K_b の値が、 10 kg/cm^3 より小さくなると、実際上付着なしのアンボンド状態に対応し、また 10^4 kg/cm^3 より大きくなると、ほぼ完全付着状態と見做し得ること、したがって、2) K_b が 10^4 kg/cm^3 より大きな値をもつ通常の異形鉄筋を用いる限り、線形域における RC 床板に対する従来の“完全付着の仮定”は、十分妥当なものであること、等の知見を得た。

なお、本報告では、RC 床板が微小変形の仮定の成立する線形域にある場合についてのみ論じたが、幾何学的非線形および材料非線形領域における RC 床板の短期変形挙動、さらにまた、使用荷重下の長期変形挙動解析等の問題については、今後順次研究を進めて行く予定である。

参考文献

1) Branson, Dan E. : Instantaneous and Time-Dependent Deflections on Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams, Alabama Highway Research Report, No. 7,

1963

- 2) 六車 熙・森田司郎：鉄筋コンクリート梁の変形ときれつ、日本建築学会論文報告集，第 90 号，1963-9
- 3) CEB-FIP : Model Code for Concrets Structures, 1978
- 4) 角田与史雄・佐伯 昇・堺 孝司：RC 引張部における付着の共同作用に関するモデル化の研究，土木学会北海道支部論文報告集，第 36 号，1980-2
- 5) Kulicki, J. H. and Kostem, C. N. : The inelastic analysis of reinforced and prestressed concrete beams, Rep. No. 378 B.1 (Fritz Eng. Lab., Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1972)
- 6) Bazant, Z. P. and Oh, h. : Deformation of progressively cracking reinforced concrete, J. of ACI, Vol. 81, No. 3, 1984-6
- 7) Ngo, D., Scordelis, A. C. : Finite element analysis of reinforced concrete beams, J. of ACI, Vol. 64, 1967-3
- 8) Nilson, A. H. : Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method, J. of ACI, Vol. 65, 1968-3
- 9) 黒正清治・滝口克己：有限要素法による鉄筋コンクリート部材の二次元非線形解析，建築学会論文報告集，第 189 号，1971-11
- 10) 六車 熙・森田司郎・富田幸次郎：曲げひびわれを生じた鉄筋コンクリートはり材の応力状態と変形に関する研究，建築学会論文報告集，第 200 号，1972-10
- 11) 林 静雄・黒正清治・小山内亭：変動軸力を受ける鉄筋コンクリート柱の曲げ変形性状に関する実験的研究，その 2，建築学会論文報告集，第 321 号，1982-2
- 12) 野口 博：有限要素法による鉄筋コンクリートの非線形解析，第 4 報，建築学会論文報告集，第 262 号，1978-12
- 13) Aldstedt, A., Bergan, P. : Nonlinear time-dependent concrete-frame analysis, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. ST7, 1978-7
- 14) 鬼沢浩志・林 静雄・黒正清治：付着剛性を考慮した鉄筋コンクリート部材の変形解析，建築学会大会学術講演会梗概集，1979-9
- 15) 多田利正・武田寿一：鉄筋コンクリート部材における付着劣化過程の解析的研究，大林組技術研究所報，No. 22, 1981
- 16) 松浦 誠・山本春行：鉄筋コンクリート梁・柱部材の非線形及び時間依存性挙動，建築学会論文報告集第 322 号，1982-12
- 17) 黒正清治・和田 章・坂田弘安：鉄筋コンクリート部材の付着を考慮した曲げ弾塑性解析，建築学会大会学術講演会梗概集，1983-10
- 18) 市之瀬敏勝：付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート骨組の非線形解析法，建築学会論文報告集，第 328 号，1983-6
- 19) 小坂義夫・谷川恭雄・山田和夫：エンドクロニック理論による鉄筋コンクリートの非線形解析，第 1 報，第 2 報，建築学会論文報告集，第 326, 330 号，1983-4, 8
- 20) Sato, R., Aoyagi, Y. : Studies on deformation and crack of reinforced concrete flexural members under low temperature, Proc. of JSCE, No. 329, 1983-2
- 21) Sato, R., Aoyagi, Y., Kanazu, T. : Experimental and theoretical studies on the behaviours of flexurally restrained reinforced concrete members subjected to temperature gradient, Proc. of JSCE, No. 348, 1984-8

- 22) 上田正生・土橋由造：補強筋の滑りを考慮した RC 梁部材の曲げについて，土木学会北海道支部論文報告集，第 41 号，1985-2
- 23) Lenschow, R. : A Yield Criterion for Reinforced Concrete under biaxial Moments and Forces, University of Illinois, 1966
- 24) Cardenas, A. E., R. J. Lenschow and M. A. Sozen : Stiffness of Reinforced Concrete Plates, Proc. ASCE, ST11, Nov., 1972
- 25) Vebo, A. and Amin, G. : Moment curvature relation of reinforced concrete slabs, Proc. of ASCE, ST3, 1977-3
- 26) 角田与史雄・藤田嘉夫：鉄筋コンクリートスラブの曲げモーメント-曲率関係について，土木学会論文報告集，No. 317, 1982-1
- 27) Hand, F. R., Pecknold, D. A. and Schnobrich, W. C. : Nonlinear layered analysis of rc plates and shells, J. of ASCE, Vol. 99, ST7, 1973-7
- 28) Wanchoo, M. K. and May, G. W. : Cracking analysis of reinforced concrete plates, J. of ASCE, Vol. 101, ST1, 1975-1
- 29) 武田寿一・高橋久雄・小柳光生：床スラブの長期たわみに関する研究，コンクリート工学，Vol. 21, No. 9, 1983-9
- 30) 杉野目章・井野 智・土橋由造・山村明義・杉本正人：鉄筋コンクリート床スラブの長期たわみの追跡計算，建築学会北海道支部研究報告集，No. 58, 1985-3
- 31) 上田正生・土橋由造ほか：鉄筋の付着滑りを考慮した RC 床板の弾性解析，建築学会北海道支部研究報告集，No. 57, 1984-3
- 32) 上田正生・土橋由造：補強筋の付着滑りを考慮した鉄筋コンクリート床板の曲げについて，建築学会北海道支部研究報告集，No. 58, 1985-3
- 33) Timoshenko, S. P. and Krieger, S. W. : Theory of Plates and Shells, 2nd edition, McGraw-Hill, p. 119, 1956
- 34) C. L. Dym and I. H. Shames (砂川 恵訳)：材料力学と変分法，ブレイン図書出版，1977

SYNOPSIS

UDC : 69. 025. 22 : 624. 04 : 517. 9 : 693. 554

ANALYSIS OF DEFORMATIONS IN BENDING OF REINFORCED CONCRETE SLABS INCLUDING BOND-SLIP OF REINFORCEMENT

Part 1 : Governing equations in linear region with numerical examples

by **MASAKI UEDA**, Assoc. Prof. of Hokkaido Univ. and
Dr. YOSHIZO DOBASHI, Honor Prof. of Hokkaido Univ., Members of A. I. J.

In this report, (1) a fundamental set of differential equations governing the bending of r. c. slabs subjected to flexure in the linear elastic region is derived in consideration of the bond-slip of reinforcement and (2) a finite element formulation of the problem is implemented; whose subsequent solution in a few cases in point is presented as well as its examined results.