非線形弾性地盤に関する基礎的研究

その1 有限変形線形弾性地盤における非線形波動

NONLINEAR WAVE PROPAGATION IN ELASTIC CONTINUA

Part 1 Nonlinear wave propagation in finite linear elastic continuum

和泉正哲*, 薛松濤**

Masanori IZUMI and Song-tao XUE

The aim of this paper is to study the wave behavior of nonlinear ground.

After finishing developing nonlinear constitutive laws for soil ground and deriving the wave front propagating equation in such ground by Singular Surface theory in references 1), 2), 7), we provide a continued study on wave propagation in finite linear ground in this paper. The result can be noted as : the final wave equation for plane wave identifies with the modified K-dV equation in Soliton Theory. Thus a way to study nonlinear soil ground by the famous nonlinear theory the Soliton Theory has been predicated. The theoretical solution in a special case and some calculating examples have also been presented.

Keywords : Nonlinear wave, Soliton, Finite linear, Elastic

1. 序 論

地盤における地震波動伝播を解析的に扱った研究においては、媒体としての地盤を、線形の構成則に従い微小変形の範囲にとどまるいわゆる微小変形線形弾性体と仮定したものが多い。しかしながら、特に変形の大きくなる大地震時を対象とした場合には、このような線形波動では観測現象を十分に説明できないことがある。したがって、地震波動伝播理論に非線形理論を導入し、さらに精密な解析法を確立することが必要と考えられる。

波動が伝播する媒体において、応力度と変形勾配の関係が線形である場合には線形波動、そうでない場合には非線形波動となる。非線形波動となるのは、媒体が弾性でない場合、弾性であっても非線形構成則を持つ場合などが考えられる。本研究では、媒体が弾性体で、さらに応力度とひずみ度の関係を表す構成則が線形であっても、有限変形状態を考慮することにより応力度と変形勾配が非線形関係を持つ場合、いわゆる有限変形線形弾性体 (Finite linear Elastic Continua) を対象とし、このような媒体中を伝播する非線形波動について検討を行う。非線形構成則を持つ弾性体の場合の検討は有限変形を前提とするので、本研究の後に続くものとなる。なお、本研究を含む一連の研究において、非線形弾性地盤とは

地盤を有限変形弾性体 (線形または非線形) として考慮するものである。

有限変形線形弾性理論は以下に示す筆者らの文献1), 2) のほかに, 3), 4), 5), 6) でも特別な例として紹介されている。この理論を用いることの利点は、通常の線形弾性体の Lamé の定数 (または Young 係数と Poisson 比) をそのまま引用できることである^{文1), 2)}。

筆者らは先に、より普遍的な有限変形非線形粘弾性体 (Finite Nonlinear Viscoelastic Continua) の構成方程式を、熱力学の第一、第二法則を用いて理論的に導き^{文1), 2)}、これがすべての材料に対して適用可能な一般式であり、既往の多くの粘弾性体の構成方程式に関する理論をその特殊な場合として包含するものであることを示した。そして、文献7) では、文献1), 2) で導き出した構成則を用いて、Singular Surface 理論に基づく非線形波動の波頭伝播方程式について研究し、Bernoulli 型の微分方程式にしたがう加速度波の波頭伝播式と、さらに複雑な形をとるショック波の波頭伝播式とを導いた。また、文献1), 2) で導出された構成則の特別な場合、つまり有限変形線形弾性体における非線形な縦波の伝播方程式を文献8) で示し、その方程式がソリトン理論中の変形された K-dV 方程式^{文9)~12)}と一致することを明ら

* 東北大学 教授・工博
** 東北大学 大学院生

Professor of Tohoku Univ., Dr. Eng.
Graduate Student of Tohoku Univ.

かにし、その解析解のいくつかを例示した。

本論文ではそれらに引き続いて、有限変形線形弾性体中を伝播する非線形な平面波を対象としている。最初に連続体力学における平面波の概念を導入し、有限変形線形弾性体を前提とした場合について論じる。そして、横波の伝播についての解析解を求め、その導出した変形勾配についての波動方程式がソリトン理論中の変形された K-dV 方程式と一致することを示す。この結果により、現在既に展開されているソリトン理論を地盤の非線形波動の研究へ応用することが理論的に可能となる。さらに、波動方程式の厳密な理論解を 5 節で導出したうえで、簡単な波を入力した場合の解析例を 6 節で行っている。

2. 平面波

本論文では、図—1 に示す物体 B の変形と運動を考察するために、通常の記号習慣にしたがって、図—1 のような二つの直角座標を設定する。すなわち、大文字 X_i ($i=1, 2, 3$) が物質座標 (Material Coordinate) を表し、小文字 x_i ($i=1, 2, 3$) が空間座標 (Spatial Coordinate) を表す。物体の変形と運動とは各点を物質座標から空間座標に動かすことと考えている。図—1 では物質点 P を空間点 P に動かすことを示している。

連続体力学で定義される平面波とは、波面が平面である波、すなわち、一定方向に垂直平面上で振動の位相が同一な波である。一般性を考慮しつつ、平面波が X_1 軸方向に伝播すると考える。まず、物質座標と空間座標における運動方程式が式 (2.1) で表される。

$$\left. \begin{aligned} x_1(X, t) &= X_1 + u_1(X_1, t) \\ x_2(X, t) &= X_2 + u_2(X_1, t) \\ x_3(X, t) &= X_3 + u_3(X_1, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

ここで、 u_i ($i=1, 2, 3$) は変位ベクトル、 t は時間である。

平面波は図—2 で示されるように、横波の SV 波、SH 波と縦波である P 波の三つに分かれて伝播する。なお、いわゆる Riemann 問題とは式 (2.1) の特殊な場合 ($u_3=0$) である。

平面波運動方程式 (2.1) によって、Green の変形テンソル C と Lagrangian のひずみ度テンソル E は式 (2.2) と式 (2.3) のように書くことができる。

図—1 座標系

図—2 平面波

$$C = \begin{bmatrix} (1+p_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 & p_2 & p_3 \\ p_2 & 1 & 0 \\ p_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.2)$$

$$E = 1/2 \begin{bmatrix} (1+p_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.3)$$

ただし

$$p_i = \partial u_i / \partial X_1 \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots (2.4)$$

式 (2.3) に基づいて、Lagrangian ひずみ度テンソルの第一、第二と第三の三つの不変量は次式のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} I_E &= E_{11} + E_{22} + E_{33} \\ &= 1/2 \cdot [(1+p_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1] \\ II_E &= E_{22}E_{33} + E_{33}E_{11} + E_{11}E_{22} - E_{23}^2 \\ &\quad - E_{31}^2 - E_{12}^2 \\ &= -1/4 \cdot [p_2^2 + p_3^2] \\ III_E &= \det(E) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.5)$$

これら (2.1)~(2.5) 式が平面波の性質と特徴を示すものである。

3. ひずみ度のポテンシャルと構成方程式

通常、線形弾性理論ではひずみ度のポテンシャルは Lagrangian ひずみ度要素の自乗の近似で行われ、次の式を用いて表される。

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_{KL} E_{KL} + 1/2 \Sigma_{KLMN} E_{KL} E_{MN} \dots\dots\dots (3.1)$$

ここに Σ_0 , Σ_{KL} , Σ_{KLMN} は定数である。

このうち、連続体力学理論より、Lagrangian ひずみ度テンソル E_{KL} と Green 変形テンソル C_{KL} と空間座標との関係は次式で示される。

$$2 E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = x_{k,K} x_{k,L} - \delta_{KL} \dots\dots\dots (3.2)$$

(3.1) 式はテンソル記号を用いて示した異方性を有する弾性体のポテンシャルに関する式であるが、本論文では等方弾性体のみを考慮するので、式 (2.5) と不変量理論に基づく、等方体におけるひずみポテンシャルは次のように導出される。

$$\Sigma = \Sigma_0 + \alpha_E I_E + 1/2 (\lambda_E + 2 \mu_E) I_E^2 - 2 \mu_E II_E \dots\dots (3.3)$$

ひずみ度のポテンシャルと変量 p_i ($i=1, 2, 3$) との関係が式 (2.5) を式 (3.3) に代入して、次の式のよう

に得られる。

$$\begin{aligned}\Sigma = & \Sigma_0 + 1/2 \cdot \alpha_E [(1+p_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1] \\ & + 1/8 (\lambda_E + 2\mu_E) [(1+p_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1]^2 \\ & + 1/2 \cdot \mu_E [p_2^2 + p_3^2] \dots\dots\dots (3.4)\end{aligned}$$

連続体力学理論^{(1)~(6)}では弾性体における一般的な構成方程式をつぎの式のように表現する。

$$T_{kl} = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{l,k}} \dots\dots\dots (3.5)$$

ここに、 T_{kl} は Piola-Kirchhoff 応力度を表す。

ここでは、平面波のみを考慮するので、式 (2.1) より、式 (3.5) の非零項はつぎのように三項しか残らないことになる。

$$T_{11} = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{1,1}}$$

簡単な記号で方程式を表現するために、前式をつぎの式のように書き換える。

$$T_k = \frac{\partial \Sigma}{\partial p_k} \quad (k=1, 2, 3) \dots\dots\dots (3.6)$$

この結果、次の構成方程式が導出される。図-3 にはこの構成式にある応力度 T_i ($i=1, 2, 3$) の方向と作用面が示されている。すなわち、

$$\begin{aligned}T_1 = T_{11} = & \alpha_E (1+p_1) + 1/2 (\lambda_E + 2\mu_E) (1+p_1) \\ & \cdot [(1+p_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1] \dots\dots\dots (3.7)\end{aligned}$$

ここに、 T_1 は X_1 面に作用する X_1 方向に向く応力度、

$$\begin{aligned}T_2 = T_{12} = & \alpha_E p_2 + 1/2 (\lambda_E + 2\mu_E) \\ & \cdot p_2 [(1+p_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1] + \mu_E p_2 \dots\dots\dots (3.8)\end{aligned}$$

ここに、 T_2 は X_1 面に作用する X_2 方向に向く応力度、

$$\begin{aligned}T_3 = T_{13} = & \alpha_E p_3 + 1/2 (\lambda_E + 2\mu_E) \\ & \cdot p_3 [(1+p_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1] + \mu_E p_3 \dots\dots\dots (3.9)\end{aligned}$$

ここに、 T_3 は X_1 面に作用する X_3 方向に向く応力度である。

もし初期状態ではひずみ度と応力度が共にないと仮定すれば（換言すれば最初は自由物体と考えることになる）、法線方向の構成方程式 (3.8)、(3.9) より、定数 α_E は 0 となるのがわかる。

$$\alpha_E = 0 \dots\dots\dots (3.10)$$

物体の構成方程式を明確にするために、各応力度について考察してみる。応力度 T_2 と T_3 が同じ形で表現さ

れているので、ここでは、 T_2 を対象とする。

もし式 (3.8)、(3.9) に次式の条件を仮定すれば

$$p_2 = p_3 = 0 \dots\dots\dots (3.11)$$

式 (3.7) は次のようになる。

$$\begin{aligned}T_1 = T_{11} = & 1/2 (\lambda_E + 2\mu_E) (1+p_1) [(1+p_1)^2 - 1] \\ = & (\lambda_E + 2\mu_E) p_1 + 1/2 (\lambda_E + 2\mu_E) (3p_1^2 + p_1^3) \\ & \dots\dots\dots (3.12)\end{aligned}$$

もし式 (3.7)、(3.9) に次式の条件を仮定すれば

$$p_1 = p_3 = 0 \dots\dots\dots (3.13)$$

式 (3.8) は次のように書き換えられる。

$$T_2 = T_{12} = \mu_E p_2 + 1/2 (\lambda_E + 2\mu_E) p_2^3 \dots\dots\dots (3.14)$$

構成式 (3.12) と (3.14) から明らかに、構成式は二つの項で成り立つ。右辺第一項は線形項で、第二項は非線形項である。本論文で着目するのは右辺第二項である。

図-4 は応力度 T_i ($i=1, 2$) と変形勾配 p_i ($i=1, 2$) との関係を表している。以上から応力度とひずみ度との関係を線形と仮定しても、応力度と変形勾配が非線形関係を持っていることが明らかとなった。これは、有限変形理論と微小変形理論との相違点である。

4. 波動方程式の導出

古典理論では、Piola-Kirchhoff 応力度の形で表現される平衡方程式は、通常物質座標系の変数で表されることが多い^{(1)~(6)}。本論文でも前節で既に Piola-Kirchhoff 応力度の構成方程式 (3.7)、(3.8)、(3.9) を物質座標系を用いて導出した。このため、以降も便宜上物質座標系の変数を用いることにする。

波動伝播を計算するときには、線形の場合でも、例えば、有限要素法のように、近似的な手法を用いる。しかし、これらの計算の基礎としての平衡方程式は微小要素の平衡を考慮して導出されているので、誤差を生じる。ただし、線形の場合には、変形を微小と仮定するので、このような誤差が非常に小さく無視できるが、本論文では変形を有限として取扱うため、このような誤差を無視することはできない。平衡方程式を有限要素における平衡を考慮して導き、これを基に波動方程式を得るのが、本節の目的である。ここでは二種類の方法を用いる。

なお、既知の古典理論における平衡方程式は次式であ

図-3 応力テンソル

図-4 応力と変形勾配の関係

る。ここで、 ρ_0 は密度、 f は物体力、 v は速度である。

$$T_{kk,k} + \rho_0(f_k - \dot{v}_k) = 0 \quad (4.1)$$

4.1. 波動方程式の導出 (第一の方法)

まず、連続体を図-5のように、有限辺長をもつ立方体として考える。このような要素に Newton の運動の第二法則を適用し、波動方程式を導く。ここでは、波動のみを考慮するので、物体力は考慮していない。

以下、簡単のために、一次元の S 波だけを考慮することにする。このため立方体が図-5のような配列で並ぶものとする。任意の立方体 1 の平衡を考え、次の平衡方程式を得る。

$$\rho_0 S dX_1 \frac{\partial^2 u_2(1)}{\partial t^2} = S [T_2 - T_2(1)] \quad (4.2)$$

ここに

S : 図-5 で示される断面の面積

$T_2(1)$: 1 番目の立方体の左断面上に作用する応力度

T_2 : 1 番目の立方体の右断面上に作用する応力度

$u_2(1)$: 1 番目の立方体の変位

同じく、立方体 2 での平衡をとれば

$$\rho_0 S dX_1 \frac{\partial^2 u_2(2)}{\partial t^2} = S [T_2(2) - T_2] \quad (4.3)$$

ここに

T_2 : 2 番目の立方体の左断面上に作用する応力度

$T_2(2)$: 2 番目の立方体の右断面上に作用する応力度

$u_2(2)$: 2 番目の立方体の変位

応力度 $T_2(1)$, T_2 , $T_2(2)$ の間の関係が Taylor 展開を用いて次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} T_2(2) &= T_2 + dX_1 \frac{\partial T_2}{\partial X_1} + \frac{dX_1^2}{2!} \frac{\partial^2 T_2}{\partial X_1^2} \\ &\quad + \frac{dX_1^3}{3!} \frac{\partial^3 T_2}{\partial X_1^3} + \frac{dX_1^4}{4!} \frac{\partial^4 T_2}{\partial X_1^4} + \dots \\ T_2(1) &= T_2 - dX_1 \frac{\partial T_2}{\partial X_1} + \frac{dX_1^2}{2!} \frac{\partial^2 T_2}{\partial X_1^2} \\ &\quad - \frac{dX_1^3}{3!} \frac{\partial^3 T_2}{\partial X_1^3} + \frac{dX_1^4}{4!} \frac{\partial^4 T_2}{\partial X_1^4} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

図-5 材料の分散

応力度は有限と考えているので、式 (4.4) の右辺の第六項まで考慮すれば、精度は十分であろう。そして、方程式 (4.2), (4.3) と (4.4) から

$$\begin{aligned} \rho_0 dX_1 \frac{\partial^2 [u_2(2) - u_2(1)]}{\partial t^2} &= [T_2(2) + T_2(1) - 2T_2] \\ &= dX_1^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial X_1^2} + \frac{dX_1^4}{12} \frac{\partial^4 T_2}{\partial X_1^4} \\ &\dots \dots \dots (4.5) \end{aligned}$$

を得る。

ここで、線形理論との比較について説明する。線形理論では微小ひずみ理論が用いられているので、 dX_1^4 を零に近似することができる。その結果、式 (4.5) が式 (4.1) と同じ形になる (式 (4.1) で物体力 $f=0$ と仮定)。

そして、式 (2.4) を用いれば式 (4.5) を次式のように表すことができる。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial X_1^2} + \frac{dX_1^2}{12} \frac{\partial^4 T_2}{\partial X_1^4} \quad (4.6)$$

ここで、 dX_1 は有限立方体 (要素) の 1 辺の長さで、簡単のために、 $dX_1=1$ とする (次節の数値計算は、この仮定にしたがって行う)。

通常の習慣にしたがって、材料が初期状態で応力度 0 と仮定すると定数 α_E は 0 であり、そして、式 (3.14) が次のように書き換えられる。

$$T_2 = \mu_E p_2 + 1/2 (\lambda_E + 2\mu_E) p_2^3 \quad (4.7)$$

式 (4.7) を式 (4.6) に代入することにより、つぎの式が導出される。

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} &= \mu_E \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial X_1^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 p_2}{\partial X_1^4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial^2 p_2^3}{\partial X_1^2} \quad (4.8) \end{aligned}$$

これが、求めていた波動方程式である。

波動方程式 (4.8) は、変形勾配 p_2 についての非線形変微分方程式である。その左辺、右辺とも、差分を微分で近似したものである。差分式が微分式となると、解析解の取り扱いが簡単になるという利点がある。これをソリトン理論では連続体近似という^{文9), 10)}。

4.2. 波動方程式の導出 (第二方法)

本項では、物質座標を用いて記述された古典力学の平衡則 (4.1) 式を用いて、波動方程式を導出する。なお、物体力 f は零とする。平面波を考慮するので、(4.1) 式は次のようになる。

$$T_{1k,1} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial X_1} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad (4.10)$$

両辺の X_1 に対する微分をとると

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial X_1^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 p_k}{\partial t^2} \quad (4.11)$$

図-6 材料の分散

前項では、有限な大きさの要素が連結している物体を考えたが、本項では図-6に示したように各要素を点とみなし、その距離を有限と仮定して考察する。このような要素の平衡を考慮すると、きれいな平衡則が得られる。これは原子力学の基礎的な考えかたである。図-6で示されるような要素がごく小さいと仮定し、たとえば分子と考える。そして、 $X_1(n)$ 位置の要素の平衡をとり、(4.1)式を次のような式に書き換えることができる。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 p_k}{\partial t^2} = \lim_{\Delta X_1 \rightarrow 0} \frac{T_k(X_1(n) + \Delta X_1(n)) + T_k(X_1(n) - \Delta X_1(n)) - 2 T_k(X_1(n))}{(\Delta X_1(n))^2} \quad (4.12)$$

ここに、 $\Delta X_1(n)$ は格子の間の距離である。ここでは、前項と対比しながら、 $\Delta X_1(n)=1$ 、つまり格子の間の距離が単位距離とする。そうすると、(4.12)式が次のようになる。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 p_k}{\partial t^2} = T_k(X_1(n+1)) + T_k(X_1(n-1)) - 2 T_k(X_1(n)) \quad (4.13)$$

ここでは、簡単のために、S波だけを考慮することにする。このために、次式の条件を設定する。

$$u_1 = u_3 = 0, \quad u_2 \neq 0 \quad (4.14)$$

本項では以後、 X_1 方向の第 n 番の格子についての横波の伝播を検討するので、記号を簡略化するために、 $T_1(X_1(n+1))$ を $T(X+1)$ と書き換える。そして、(4.7)式を(4.13)式に代入すれば、次の式が得られる。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = \mu_E [p_2(X+1) + p_2(X-1) - 2 p_2(X)] + 1/2 (\lambda_E + 2 \mu_E) (p_2^3(X+1) + p_2^3(X-1) - 2 p_2^3(X)) \quad (4.15)$$

第 n 番目の格子の変形勾配と第 $(n \pm 1)$ 番目の格子の変形勾配との関係がTaylor展開を用いて、次のような式に表される。

$$\left. \begin{aligned} p_2(X \pm 1) &= p_2 \pm \frac{p_2'}{1!} + \frac{p_2''}{2!} \pm \frac{p_2'''}{3!} + \frac{p_2''''}{4!} + \dots \\ p_2^3(X \pm 1) &= p_2^3 \pm \frac{(p_2^3)'}{1!} + \frac{(p_2^3)''}{2!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

そして、最後に、波動方程式が次のように得られる。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = \mu_E \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial X^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 p_2}{\partial X^4} \right) + \frac{1}{2} (\lambda_E + 2 \mu_E) \frac{\partial^2 p_2^3}{\partial X^2} \quad (4.17)$$

これが、求めていた波動方程式である。期待されたとおりに、この式は、前項で求めた波動方程式(4.8)と一致する。

5. 波動方程式の理論解

導出された波動方程式(4.8)あるいは(4.17)の係数を簡単にするために新たな係数 C_0^2 と k 、

$$C_0^2 = \frac{\mu_E}{\rho_0}, \quad k = \frac{1}{2} \frac{\lambda_E + 2 \mu_E}{\mu_E} \quad (5.1)$$

を用いて書き換えると、波動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = C_0^2 \left[\frac{\partial^2 p_2}{\partial X^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 p_2}{\partial X^4} + 3k \frac{\partial}{\partial X} \left(p_2^2 \frac{\partial p_2}{\partial X} \right) \right] \quad (5.2)$$

ここに、 C_0 は線形弾性体における波動伝播速度であることは式(5.1)から明らかである。

波動伝播の非線形性を考察するために、次のような移動座標を導入する。線形伝播速度 C_0 で伝播する横座標 ξ を用いて X を、時間 τ を用いて t を置き換える。座標変換方程式は次のようになる

$$\xi = X - C_0 t, \quad \tau = C_0 t \quad (5.3)$$

速度 C_0 で伝播する座標上では、波動の非線形性は小さいと考え、式(5.2)を次のように変換することができる。

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{3}{2} k p^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 p}{\partial \xi^3} = 0 \quad (5.4)$$

式(5.4)は非線形変微分方程式で、ちょうどソリトン理論の変形されたK-dV方程式と一致する。これより、非線形地盤における波動伝播は既に展開されている非線形のソリトン理論に結びつけられる。式(5.4)は線形速度で移動する移動座標上の波動方程式であるから、波動の非線形性の考察には、非常に便利であると考えられる。

さらに、次のような仮定を用いれば

$$p = \frac{v}{\sqrt{6} k}, \quad \tau = 24 T, \quad \xi = Y \quad (5.5)$$

(5.4)式は次のようになる

$$\frac{\partial v}{\partial T} + 6 v^2 v_Y + v_{YYY} = 0 \quad (5.6)$$

これは標準型の変形されたK-dV方程式と呼ばれている。

波動伝播だけを考慮するので、もし C を非線形波動の伝播速度としておけば、波動方程式の理論解が次のように仮定できる。

$$v = f(z), \quad z = Y - CT \quad (5.7)$$

この仮定に基づいて、式 (5.6) が次のように変形できる。

$$-Cf' + 6f^2f' + f''' = 0 \quad (5.8)$$

ここに、' は z に関する微分を表す。

式 (5.8) を z に関する微分で括ると

$$\frac{d}{dz}(-Cf + 2f^3 + f'') = 0 \quad (5.9)$$

となり、(5.9) 式の両辺を積分すると

$$f'' = Cf - 2f^3 + D \quad (5.10)$$

ここに、 D は積分定数

となる。この式の両側に f' を掛けると、次のように変換できる。

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} (f')^2 \right] = \frac{d}{dz} \left[\frac{C}{2} f^2 - \frac{1}{2} f^4 + Df \right] \quad (5.11)$$

したがって

$$\frac{1}{2} (f')^2 = \frac{C}{2} f^2 - \frac{1}{2} f^4 + Df + E \quad (5.12)$$

ここに、 E は積分定数

式 (5.12) の性質を調べるために、式を書き換える。

$$1/2 (f')^2 + U(f) = E \quad (5.13)$$

ここで、 $U(f)$ について整理すると

$$U(f) = 1/2 f^4 - 1/2 Cf^2 - Df \quad (5.14)$$

これより、次のことが分かる。方程式 (5.13) の左辺の第一項を運動エネルギー (z を時間、 f を変位、 f' を速度として考える)、第二項を位置エネルギーとみなすことができ、その運動エネルギーと位置エネルギーの和が一定の定数、つまり総エネルギー E となることである。位置エネルギーは図-7 のように示される。

最後に、変形された K-dV 方程式の一般解は、式 (5.13) を積分して決められる。

$$\int \frac{df}{\sqrt{2E - 2U(f)}} = \int dz \quad (5.15)$$

ここで、定数 D 、 E などは初期条件と境界条件により与えられる。ここでは、特殊な場合として条件 $D=E=0$ の場合を扱う。この時、式 (5.15) は次のような式になる

$$\int \frac{df}{f\sqrt{C-f^2}} = \int dz \quad (5.16)$$

図-7 位置エネルギー

ここで

$$\sqrt{C-f^2} = m \quad (5.17)$$

とおくと

式 (5.16) の左辺

$$= \int \frac{df}{f\sqrt{C-f^2}} = \frac{1}{2\sqrt{C}} \ln \frac{\sqrt{C-m}}{\sqrt{C+m}} \quad (5.18)$$

$$\text{式 (5.16) の右側} = \int dz = z + \delta \quad (5.19)$$

ここに、 δ は積分定数。

m についての解は次のように計算される。

$$m = \sqrt{C} \tanh[\sqrt{C}(z+\delta)] \quad (5.20)$$

最後にこの特殊な場合の理論解は以下の式で求められる。

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{C-m^2} \\ &= \sqrt{C} \operatorname{sech}[\sqrt{C}(z+\delta)] \\ &= \sqrt{C} \operatorname{sech}[\sqrt{C}(Y-CT+\delta)] \end{aligned} \quad (5.21)$$

この特殊な場合の変位式は簡単に求められる。すなわち、

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{x_1} \sqrt{(C/6k)} \operatorname{sech} \left[\sqrt{C} (X_1 - C_0 t \right. \\ &\quad \left. - \frac{CC_0}{24} t + \delta) \right] dX_1 \end{aligned} \quad (5.22)$$

この特殊な解により、次のような二つの結論が与えられる。

- 1) この特殊な理論解が求められる条件は、総エネルギー E が 0 である。これより、もし初期波が (5.21) のような波形であれば、波形がそのまま伝わって行くと予想される。これは、ソリトン理論で、ソリトンと呼ばれている波である^{9), 10)}。
- 2) 非線形波動の伝播速度は一定の定数ではなく振幅に依存し、すなわち振幅が大きければ、伝播速度は大きい。これは、線形波動との相違点である。

6. 波動方程式の数値解析

波動方程式の性質を考察するために、係数 D_1 と D_2 を導入して、(5.4) 式を次式のように書き換える。

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + D_1 p^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial^3 p}{\partial \xi^3} = 0 \quad (6.1)$$

この式の第二項は非線形項、第三項は分散項とソリトン理論では呼ばれている。特殊な場合 $D_1=D_2=0$ が通常の線形力学における波動方程式である。

図-8, 9, 10, 11 は簡単な波を入力した場合の解析結果である。横軸は移動座標 ξ で、縦軸は変形変位 p である。各図の最下の波は初期波で、上の四本の波が時点 $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ の各時点の波形である。

図-8 の A~D は Sine 波を初期波として入力した場合の各時点の波形を表している。図-8-A は長周期の Sine 波を入力した場合、図-8-B は短周期の Sine 波を入力した場合、である。ソリトン理論で示されているの

図-8 Sine 初期波

図-9 Exponential 初期波

図-10 ソリトン初期波

と同様に、時間が経過するに従って、Sine 波がいくつかのソリトンになるのがわかる。 $D_1=0$ 、つまり線形分散の場合の各時点の波形が図-8-C である。 $D_1=D_2=0$ 、つまり通常の線形波動の場合が図-8-D で表され、伝

播しても波形は変わらない (移動座標で考察するため)。

図-9 では一般的な Exponential 波を初期波とした場合の各時点の波形を示す。Exponential 波は (5.21) 式で表されるソリトンと形状が類似しているので、Sine

図-11 異なる二つの振幅を持つソリトン初期波

波よりも早い時点でソリトンになって伝播する (図-9-B)。

図-10では特別な Exponential 波を初期波とした場合である。初期波の波形は (5.21) 式のような形を取る、つまりソリトンである。図-10-A は一つのソリトン、図-10-B は二つの等振幅のソリトンを初期波とした場合の各時点の波形を表している。図-10-A, B とも、初期波の波形がそのまま伝わっていく (線形波と同じ性質を持つ)。

図-11 は振幅の違う二つのソリトンを初期波として入力した場合である。(5.21) 式からわかるようにソリトンの伝播速度はその振幅の大きさに比例するので、図-11-A, B では振幅が大きなソリトンが破壊しないまま振幅が小さなソリトンを追い越して行く。このような性質から、こうした波形はソリトン (Solitary Wave の粒子 (-on)) と名付けられている^{文9), 10)}。

7. 結論と今後の研究

本論文では有限変形線形弾性体を伝播する波の挙動を把握するために、変形勾配についての非線形波動方程式を二つの方法で導出した。興味深いことには、その導出された波動方程式が互いに一致するだけでなく、原子力学における変形された K-dV 方程式とも一致することがわかった。換言すれば、非線形の原子力学理論を地震工学へ応用する一例が示され、また波動方程式の理論解を導出したうえに、いくつかの解析解も示した。

本論文では、簡単な初期波を入力する場合についての解析を行ったが、複雑な地震波についても、そのまま応用できるものである。すなわち、現在線形理論を基礎としている地震波動理論をこの非線形波動理論に置き換えることができる。故に、今後の研究としては、1) 本論文で展開した理論を実際の地震波について応用すること、2) 非線形構成則を持つ有限変形非線形弾性体の場合、さらにより一般的な有限変形非線形粘弾性体の場合につ

いて波動方程式を考察すること、などが挙げられる。

謝 辞

本研究を行うにあたり、種々ご助言を頂いた杉村義広東北大学教授に感謝する。

参考文献

- 1) M. Izumi, S. Kurita, T. Takahashi and S. Xue : Functional Finite Nonlinear Viscoelastic Constitutive Law, 日本建築学会構造系論文報告集第 406 号, pp.45~54, 平成元年 12 月
- 2) M. Izumi, S. Kurita, T. Takahashi and S. Xue : Development and Application of Finite Nonlinear Viscoelastic Constitutive Law, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 407 号, pp.79~85, 平成 2 年 1 月
- 3) A. Cemal Eringen : Continuous Physics, Vol.2, Academic Press, New York San Francisco London, pp.449-521, 1975
- 4) A. Cemal Eringen and Erdogan S. Suhubi : Elastodynamics, Vol.1, Academic Press New York and London, pp.77-131, 1974
- 5) A. Cemal Eringen : Nonlinear Theory of Continuous media, McGraw-Hill Book Company, 1962
- 6) A. Cemal Eringen : Mechanics of Continua, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1980
- 7) M. Izumi and S. Xue : Nonlinear Waves Propagation in Finite Viscoelastic Material, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 401 号, pp.47~57, 平成元年 7 月
- 8) M. Izumi and S. Xue : A Study on Nonlinear Wave Propagating Equation, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.805~806 平成元年 10 月
- 9) 戸田盛和 : 非線形格子力学, 岩波書店, 1987
- 10) 渡辺慎介 : ソリトン物理入門, 培風館, 1985
- 11) G.L. ラム, Jr : ソリトン「理論と応用」, 培風館, 1983
- 12) M. Teymur : Solitons in Diatomic Elastic Continua, Int. J. Eng. Sci. Vol.24, No.6, pp.883~896, 1986

(1989 年 12 月 10 日原稿受理, 1990 年 5 月 28 日採用決定)