フラットスラブのせん断力に関する研究

SHEARING FORCES ANALYSIS OF FLAT SLAB STRUCTURE

松井源吾*, 田中 聡**
Gengo MATSUI and Satoshi TANAKA

This paper discusses an analysis of the shearing forces around the drop panel of a flat slab structure.

In this study, several shapes of the drop panel are investigated in case of an uniformly distributed load.

The analytical solutions of the shearing forces are derived from the analogy between the equation of a slope of the membrane and the equation of a shearing forces of a plate.

The results of the shearing forces among the several shapes are obtained by the experiments in membrane.

Keywords : Flat slab, shearing forces, Moire method, drop panel

まえがき

フラットスラブ構造に関する研究では、曲げに関しては多くの研究があるが、せん断に関する理論的研究はほとんどなされていない。倉庫のように積載荷重が大きい場合、また、柱間隔が大きい場合などでは、支板付近でのせん断力は大きくなる。支板周辺のせん断力の分布は、支板の形で大きく変化する。本論文は、支板の形を種々変化させた場合の、支板周辺の最大せん断力の変化を求めることを目的とする。

一般に等分布荷重をうける板の二方向の曲げモーメントの和は、等分布荷重をうける薄膜のたわみと相似である。板のせん断力は、この二方向の曲げモーメントの微分であるので、膜のたわみの傾斜を求めることにより、板のせん断力を求めることができる。

実験は、ゴムの薄膜に、直交方向に膜のびを一定とする方法で一様張力を加えた後、膜に空気圧を加えて、これを等分布荷重とする。次に、その等高線をモアレ法で求め、その傾斜から板のせん断力を求めている。また、別に四辺支持正方形の膜のたわみを測定し、一編の高さについて検定している。

なお、支板の形が円形の場合は、板の円板解を利用し、正方形の場合は、さらに等角写像を利用して、膜実験の妥当性を証明した。

1. 板のせん断力と薄膜の相似

板の x, y 方向の曲げモーメントは、それぞれ

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

ただし、 w : 板のたわみ

D : 板の曲げ剛性

ν : ポアソン比

で示される¹⁾。

これらの直交する曲げモーメントの和を M とすると、

$$M = M_x + M_y = -D(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

となる。板のたわみの微分方程式は²⁾、

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

ただし、 q : 等分布荷重

この式に前式の M を代入すると、

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -(1 + \nu)q \quad \cdots \cdots (1)$$

となる。これを極座標に変換すると、

$$\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} = -(1 + \nu)q \quad \cdots \cdots (2)$$

板のせん断力は、

* 早稲田大学 教授・工博

** 早稲田大学 大学院生・工修

Professor, Department of Architecture, Waseda Univ., D. Eng.

Graduate Student, Department of Architecture, Waseda Univ., M. Eng.

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

である³⁾。x 軸と α の角度をなす方向を n とすると、

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha$$

$$= -D \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\therefore Q_n = \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial M}{\partial n} \dots \dots \dots (3)$$

一方、一様な張力 S で張られた、等分布荷重 q をうける膜のたわみ z は⁴⁾、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \dots \dots \dots (4)$$

この (4) 式は、(1) 式と相似である。すなわち

$$(1+\nu) = 1/S$$

とおけば、曲げモーメントの和 (M) は、膜のたわみ (z) と同じになる。(3) 式より、曲げモーメントの和 (M) を微分したものが板のせん断力であるから、膜のたわみの傾斜がこれに対応する。

2. 曲げモーメントの和と膜のたわみ

(a) 支板円形の場合

次式を (2) 式の解とする。

$$M = -\frac{(1+\nu)}{4} q a^2 \left\{ C_1 + C_2 \log \left(\frac{a}{r} \right) + \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right\}$$

ただし、 C_1, C_2 : 定数

$r=a$ にて、 $M=0$ より $C_1 = -1$

$r=b$ にて、 $\frac{dM}{dr} = 0$ より $C_2 = 2 \frac{b^2}{a^2}$

ゆえに

図—1

$$M = -\frac{(1+\nu)}{4} q a^2 \left\{ 2 \frac{b^2}{a^2} \log \left(\frac{a}{r} \right) + \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right\} \dots \dots \dots (5)$$

$b=2.5a$ とすると、支板付近は写真—1 の膜実験のモアレ写真のように、等高線は同心円群となる。図—2 は、

写真—1 円形支板の場合のモアレ写真

図—2 円形支板の場合の M ($\theta=0^\circ$)

図—3

上式の計算値にこの実験値をプロットしたものである。支板からかなり離れたところまで、よく一致している。

(b) 支板が隅をまるめた正方形の場合

この場合は、円の場合に

$$C_n \left(\frac{r}{a} \right)^{-n} \cos n\theta$$

なる項を加える。これは複素関数

$$C_n Z^{-n}$$

の実部であるので、この項を加えても、(2)式は満足される。よって

$$M = -\frac{(1+\nu)}{4} q a^2 \left\{ 2 \frac{b^2}{a^2} \log \left(\frac{a}{r} \right) + \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 + \sum C_n \left(\frac{r}{a} \right)^{-n} \cos n\theta \right\} \dots \dots \dots (6)$$

ここに $C_4=3/4$, $C_8=1/3$, $C_{12}=1/7$

とすると、 $M=0$ は隅をまるめた正方形に近似した形が得られる(図-3の実線)。

写真-2は、これに似た形の正方形の膜実験による等高線である。なお、支板の面積は円の場合と同じにしている。(6)式によって計算して得られる等高線は、図-4のように実験と似ており、支板から離れると等高線

写真-2 隅をまるめた正方形支板の場合のモアレ写真

図-4

は円に近づく。図-5は、 x 軸上の M の値の計算値に実験値をプロットしたもので、よく一致している。

これらの結果は、膜実験のたわみが、曲げモーメントの和(M)とよく一致することを示している。

3. せん断力とその最大値

曲げモーメントの和(M)の微分は、(3)式によりせん断力を表すので、種々の支板の形状について膜実験を行い、その膜のたわみの傾斜からせん断力を求める。

図-5 隅をまるめた正方形支板の場合の M ($\theta=0^\circ$)

写真-3 正方形支板の場合のモアレ写真

写真-4 正六角形支板の場合のモアレ写真

写真—5 正八角形支板の場合のモアレ写真

図—8 せん断力 ($\theta=0^\circ$)

すなわち,

$$Q_r = \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial M}{\partial r}$$

基準として、円形支板の場合の支板位置でのせん断力を用いる。

写真—3, 4, 5 は、支板が正方形、正六角形、正八角形の場合の、モアレ法による膜実験の等高線である。いずれも、支板を離れると等高線は円となる。

せん断力最大となる隅の方向について、膜のたわみの傾斜からせん断力を求めたものが、図—6, 7, 8 である。

Q_0 は、円形の場合の支板位置でのせん断力で、これを基準としている。いずれも支板を離れると減少している。最大せん断力は、正方形で、円形の場合の 2.9 倍、正六角形が 2.2 倍、正八角形が 1.3 倍である。

計算例として、 $2b=900\text{ cm}$ 、 $a=180\text{ cm}$ 、 $q=2800\text{ kg/m}^2$ 、スラブ厚 30 cm とすると、せん断応力度は、円形では 6.7 kg/cm^2 となり、C 210 の長期の許容せん断

図—6 せん断力 ($\theta=0^\circ$)

図—7 せん断力 ($\theta=0^\circ$)

写真—6 先の尖った正方形支板の場合のモアレ写真

応力度は 7 kg/cm^2 なので、許容応力内におさまるが、正八角形では 8.5 kg/cm^2 、正六角形では 14.7 kg/cm^2 、正方形では 19.4 kg/cm^2 となり、円形以外はいずれも許容応力を超えてしまう。

以上、膜実験による、フラットスラブ構造における支板付近のせん断力について考察したが、板のせん断力を膜のたわみの傾斜から求めるこの方法は、一般的に応用範囲が広いと考えられる。

付 記

正方形の膜実験（写真—3）では、隅にわずかなまゐりを持たせているが、まゐりがないものを写真—6 に示

す。隅の局部をのぞいて、ほとんど写真—3 と同じである。

注

- 1) Timoshenko, Woinowsky-Krieger [Theory of Plates and Shells], McGraw-Hill, p. 81 (101) 式, 1959
- 2) 同 p. 82 (103) 式
- 3) 同 p. 82 (106), (107) 式
- 4) Timoshenko, Goodier [Theory of Elasticity] McGraw-Hill, p. 304 (159) 式, 1970

(1990 年 4 月 4 日原稿受理, 1990 年 9 月 8 日採用決定)