高次弾性基本解の有限要素解析

有限要素法による弾性基本解の解析に関する研究 (その3)

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF HIGH-ORDER ELASTIC FUNDAMENTAL SOLUTIONS

Studies on analysis of elastic fundamental solutions by finite element method, Part 3

藤谷 義信*, 藤井 大地**

Yoshinobu FUJITANI and Daiji FUJII

This paper presents a procedure for the finite element analysis of high-order elastic fundamental solutions in two-and three-dimensional bodies.

Three-dimensional fundamental solutions can be expressed by the Fourier's Series expansion with respect to the Coordinate φ . Its Second-order solution correspond to the plane symmetric fundamental solution (Cerruti's solution) and is formulated in this paper by finite element method.

Two-dimensional higher-order fundamental solutions under following load conditions are analysed by finite element method : (1) a couple, (2) equal and opposite moment of couples, acting on the straight boundary of an infinite plane. It is clarified that the usual two-dimensional fundamental solution can be solved by a simultaneous equation, however, the above higher-order two-dimensional fundamental solutions are analysed as eigen-value problem.

By the present finite element method, the numerical fundamental solutions were obtained with good convergence.

Keywords : 弾性基本解, 有限要素法, Cerruti 解, 集中偶力, 集中モーメント

1. 序

弾性基本解は, 境界要素法や境界積分法などの数値構造解析法において重要な役割を果たす。また, 弾性基本解やきれつ先端近傍の固有解などの特異な応力場は, 線形破壊力学の理論構成のための一つの重要な手がかりとなっている。著者の一人は, 本研究の第1報²⁾において, 2次元弾性体中の Kelvin 解, Boussinesq 解および Cerruti 解 (図—1 参照) を 2次元弾性基本解と呼び, これを有限要素法で数値的に求める手法について提案を行った。また, 第2報³⁾では, 3次元弾性体中の Kelvin 解と Boussinesq 解を 3次元線対称基本解と呼び, これも同様に有限要素法で解析する手法を提案した。

これまでの研究において, 前者の2次元弾性基本解の解析問題は, 極座標系 (r, θ) で記述され, 離散化した変位関数 $f(\theta)$, $g(\theta)$ に関する連立方程式を解く問題に帰着されたのに対して, 後者の3次元弾性基本解の問題は, 球座標系 (r, θ, φ) で記述され, 荷重点近傍の変位の特異性の大きさを固有値とし, 離散化した変位 $u_r(\theta)$,

$u_\theta(\theta)$, $u_\varphi(\theta)$ を固有ベクトルとする固有値解析問題となることが分かった。このように2次元と3次元の基本解の解析の形式が異なったのは, 3次元基本解が荷重点近傍で応力・変位ともにべき乗型の特異性をもつものに対して, 2次元基本解では変位が対数型の特異性をもつため, 両者の間に定式化の相違が生じたためである。

しかしながら, 第2報で説明した3次元弾性基本解の解析法は, Kelvin 解や Boussinesq 解のように荷重線に対して線対称 (すなわち軸対称) の応力・変位解をもつ。

図—1 弾性基本解

本稿は文献1) にその一部を発表している。

* 広島大学 教授・工博

** 広島大学 助手・工修

Professor of Hiroshima Univ., Dr. Eng.

Research Associate of Hiroshima Univ., M. Eng.

図—2 3次元 Cerruti 解

場合に対応するものであり、Cerruti 解のように荷重線を含む面に対して対称な問題にはそのままでは適用できない。この 3 次元 Cerruti 解を第 2 報と同様な手法で求めるには、変位・応力の ϕ 方向 (図—2 参照) のフーリエ展開次数を高次化して定式化する必要がある。

また、第 1 報で説明した 2 次元問題における Kelvin 解、Boussinesq 解、Cerruti 解などの弾性基本解は、いずれも最終的に荷重ベクトルを右辺にもつ連立方程式 (剛性方程式) を解くことによって得られるが、さらに集中偶力や集中モーメントが作用する場合も弾性基本解の中に含めるとすると、これらの弾性基本解は r 方向に高次のべき乗型の特異性をもつため、同じ 2 次元問題でありながら、連立方程式を解く問題ではなく、固有値問題となってくる。

以上のような考察から、本稿では、3 次元弾性基本解については、Cerruti 解のような面对称解も解けるように ϕ 方向のフーリエ展開次数を高次にしたときの解析法について、また、2 次元弾性基本解については、 r 方向に高次のべき乗型の特異性をもつ場合の解析法について説明する。本稿で言う「高次」という言葉は、3 次元問題と 2 次元問題で異なる意味をもつが、本稿でこれらの高次の基本解の解析法をまとめて示すことにより、2 次元および 3 次元の弾性基本解の力学的な特性をより明確にすることができるものと思われる。

2. 3 次元面对称基本解の解析

2.1 仮想仕事方程式の導出

いま、図—2 に示すような半無限弾性体の表面上に集中荷重が作用する、いわゆる 3 次元 Cerruti 問題について考える。解析を行うための座標系は、同図中に示すように荷重点を原点とする球座標系 (r, θ, ϕ) を用いる。ここに、 ϕ は、荷重線と z 軸 ($\theta=0$) を含む平面から

測るものとする。

3 次元弾性論⁷⁾によると、物体力が一定または 0 の場合には、3 個の変位成分はすべて重調和関数である。いま、調和関数を ϕ とすると、球座標系で表された調和方程式は次式で与えられる。

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \bar{p}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{p} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \bar{p}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\bar{p} = \sin \theta$ である。この式を満足する調和関数 $\phi(r, \theta, \phi)$ の形は、以下のようにして決定される。まず、 ϕ を次の形の変数分離形

$$\phi(r, \theta, \phi) = r^\lambda \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi) \quad (2)$$

で表し、これを (1) 式に代入すると次式が得られる。

$$(1-p^2) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - 2p \frac{d\Theta}{d\theta} + \left\{ \lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-p^2} \right\} \Theta = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \mu^2 \Phi = 0 \quad (4)$$

ここに、 $p = \cos \theta$ である。(3) 式はルジャンドル陪方程式であるので、この解 $\Theta(\theta)$ は次式で表される。

$$\Theta(\theta) = A P_\lambda^\mu(p) \quad (5)$$

一方、(4) 式の解 $\Phi(\phi)$ は次式で表される。

$$\Phi(\phi) = B_1 \cos \mu \phi + B_2 \sin \mu \phi \quad (6)$$

以上より、球調和関数 $\phi(r, \theta, \phi)$ は次式のように、ルジャンドル・フーリエ級数で表現される。

$$\phi(r, \theta, \phi) = r^\lambda P_\lambda^\mu(p) (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) \quad (7)$$

半無限弾性体の材質が、 $x-z$ 平面に関して対称であるとすると、 x 軸方向に集中荷重を受けるときの変位解は $x-z$ 平面に関して面对称となる。したがって、3 次元面对称基本解の解析を行う場合は、次式のような形の変位解を仮定して議論を進めていくことができる。

$$\left. \begin{aligned} u_r(r, \theta, \phi) &= r^\lambda u_r^*(\theta)_n \cos n\phi \\ u_\theta(r, \theta, \phi) &= r^\lambda u_\theta^*(\theta)_n \cos n\phi \\ u_\phi(r, \theta, \phi) &= r^\lambda u_\phi^*(\theta)_n \sin n\phi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

この式中の λ は、荷重点 ($r=0$) 近傍の変位の変化特性を示すパラメータであり、本解析においては、以下に説明するように弾性論の基礎式を満足する固有な解 λ を求めようとするものである。(8) 式において、 $n=0$ の場合は、第 2 報ですでに説明した線対称解、すなわち z 軸に対して対称な Boussinesq 解の変位式を与える。したがって、一般的な高次解を求めるには、 $n \geq 1$ の場合について以後の式展開を行えばよい。しかしながら本稿では、式が複雑になるため、以下では、Cerruti 解に対応する $n=1$ の場合についてのみ記述することにする。

(8) 式の変位成分に 3 次元弾性体のひずみ-変位関係

式, および応力-ひずみ関係式を適用すると, 応力成分も, r, θ, φ の変数分離形になり, 形式的に次のような形で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r, \theta, \varphi) &= r^{\lambda-1} \sigma_r^*(\theta) \cos \varphi \\ \sigma_\theta(r, \theta, \varphi) &= r^{\lambda-1} \sigma_\theta^*(\theta) \cos \varphi \\ \sigma_\varphi(r, \theta, \varphi) &= r^{\lambda-1} \sigma_\varphi^*(\theta) \cos \varphi \\ \tau_{r\theta}(r, \theta, \varphi) &= r^{\lambda-1} \tau_{r\theta}^*(\theta) \cos \varphi \\ \tau_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) &= r^{\lambda-1} \tau_{\theta\varphi}^*(\theta) \sin \varphi \\ \tau_{\varphi r}(r, \theta, \varphi) &= r^{\lambda-1} \tau_{\varphi r}^*(\theta) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

r, θ, φ 方向の応力の釣合方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r) + \frac{1}{r \bar{p}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{p} \tau_{r\theta}) \\ + \frac{1}{r \bar{p}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{\varphi r}) - \frac{1}{r} (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) &= 0 \\ \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \bar{p}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{p} \sigma_\theta) \\ + \frac{1}{r \bar{p}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{\theta\varphi}) - \frac{\bar{p}}{r} \sigma_\varphi &= 0 \\ \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{\varphi r}) + \frac{1}{r \bar{p}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{p}^2 \tau_{\theta\varphi}) \\ + \frac{1}{r \bar{p}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_\varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ただし, $p = \cos \theta$, $\bar{p} = \sin \theta$ である。

また, 物体表面上の応力境界条件は, 次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r n_r + \tau_{r\theta} n_\theta + \tau_{\varphi r} n_\varphi &= 0 \\ \tau_{r\theta} n_r + \sigma_\theta n_\theta + \tau_{\theta\varphi} n_\varphi &= 0 \\ \tau_{\varphi r} n_r + \tau_{\theta\varphi} n_\theta + \sigma_\varphi n_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

いま, (10) 式の各式の残差をそれぞれ R_r, R_θ, R_φ とし, また, (11) 式のそれぞれの残差を T_r, T_θ, T_φ とする。これらの残差による仮想仕事方程式を作ると次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^\pi (R_r \delta u_r + R_\theta \delta u_\theta + R_\varphi \delta u_\varphi) r^2 \bar{p} dr d\theta d\varphi \\ + \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi (T_r \delta u_r + T_\theta \delta u_\theta + T_\varphi \delta u_\varphi) r dr d\varphi = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

(12) 式に (10), (11) 式を代入し, 部分積分を施して, 式変形を行っていくと, 最終的に次の方程式が得られる。ただし, ここでは, Cerruti 解をとり扱っているのので, θ の解析領域は, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ であり, また, 表面境界の方向余弦は $n_r = n_\varphi = 0$, $n_\theta = 1$ である。

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^\pi \left[\{(\lambda+1) \bar{p} \sigma_r^* + \tau_{\varphi r}^* - \bar{p} (\sigma_\theta^* + \sigma_\varphi^*)\} \cos^2 \varphi \delta u_r^* \right. \\ \left. - \bar{p} \tau_{r\theta}^* \frac{\partial \delta u_r^*}{\partial \theta} \cos^2 \varphi + \{(\lambda+2) \bar{p} \tau_{r\theta}^* \right. \\ \left. + \tau_{\theta\varphi}^* - p \sigma_\theta^*\} \cos^2 \varphi \delta u_\theta^* - \bar{p} \sigma_\theta^* \frac{\partial \delta u_\theta^*}{\partial \theta} \cos^2 \varphi \right. \\ \left. + \{(\lambda+2) \bar{p} \tau_{\varphi r}^* + \bar{p} \tau_{\theta\varphi}^* - \sigma_\varphi^*\} \sin^2 \varphi \delta u_\varphi^* \right. \\ \left. - \bar{p} \tau_{\theta\varphi}^* \frac{\partial \delta u_\varphi^*}{\partial \theta} \sin^2 \varphi \right] d\theta d\varphi = 0 \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで, $\sin^2 \varphi$ と $\cos^2 \varphi$ は, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ で積分すると

図-3 θ 領域の有限要素分割

π となる。

(13) 式をマトリックスで表現すると次のようになる。

$$\int_0^{\pi/2} \{\sigma^*\}^T [\partial \bar{B}] \{\delta u^*\} d\theta = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \{\sigma^*\}^T &= [\sigma_r^*, \sigma_\theta^*, \sigma_\varphi^*, \tau_{r\theta}^*, \tau_{\theta\varphi}^*, \tau_{\varphi r}^*] \\ \{\delta u^*\}^T &= [\delta u_r^*, \delta u_\theta^*, \delta u_\varphi^*] \end{aligned}$$

である。また, $[\bar{B}]$ は θ の微分演算等を含む 6×3 の大きさのマトリックスである。

また,

$$\{\sigma^*\} = [D][\partial B]\{u^*\} \dots\dots\dots (15)$$

で表されるから, (14) 式は,

$$\int_0^{\pi/2} \{\delta u^*\}^T [\partial \bar{B}]^T [D][\partial B]\{u^*\} d\theta = 0 \dots\dots\dots (16)$$

となる。

2.2 有限要素法による定式化

第2報と同様にして, 図-3 のように θ 方向の領域を要素に分割して, 次式に示すように1つの要素内の u_r^* , u_θ^* , u_φ^* の分布を最も簡単な線形分布に仮定する。

$$\begin{aligned} \{u^*\} &= \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \{d^*\} \\ &= [N]\{d^*\} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここに, $\xi = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_i - \theta_j}$ であり, $\{d^*\}$ は節点変位ベクトルで,

$$\{\sigma^*\}^T = [u_{ri}^*, u_{\theta i}^*, u_{\varphi i}^*, u_{rj}^*, u_{\theta j}^*, u_{\varphi j}^*] \dots\dots\dots (18)$$

である。

(17) 式を (16) 式に代入すると, 最終的に一つの要素に関する次のような特性方程式が得られる。

$$[k(\lambda)]\{d^*\} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ここに, 要素剛性マトリックス $[k(\lambda)]$ は次式の形をしている。

$$[k(\lambda)] = \int_0^{\pi/2} [\bar{k}]^T [D] [k] d\theta \dots \dots \dots (20)$$

この式の中の核剛性マトリックス $[\bar{k}]$, $[k]$ および応力-ひずみマトリックス $[D]$ の具体的な形を示すと次のようになっている。

$$[\bar{k}]^T = [N]^T [\partial B]^T$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda+1)\bar{p}(1-\xi) & -\bar{p}(1-\xi) & -\bar{p}(1-\xi) \\ 0 & \bar{p}/l & -p(1-\xi) \\ 0 & 0 & -(1-\xi) \\ (\lambda+1)\bar{p}\xi & -\bar{p}\xi & -\bar{p}\xi \\ 0 & -p/l & -p\xi \\ 0 & 0 & -\xi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}/l & 0 & 1-\xi \\ (\lambda+2)\bar{p}(1-\xi) & 1-\xi & 0 \\ 0 & p(1-\xi)+\bar{p}/l & (\lambda+2)\bar{p}(1-\xi) \\ -\bar{p}/l & 0 & \xi \\ (\lambda+2)\bar{p}\xi & \xi & 0 \\ 0 & p\xi-\bar{p}/l & (\lambda+2)\bar{p}\xi \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[k] = [\partial B][N]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda(1-\xi) & 0 & 0 \\ 1-\xi & -1/l & 0 \\ 1-\xi & (p/\bar{p})(1-\xi) & (1-\xi)/\bar{p} \\ -1/l & (\lambda-1)(1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\xi)/\bar{p} & -1/l-(p/\bar{p})(1-\xi) \\ -(1-\xi)/\bar{p} & 0 & (\lambda-1)(1-\xi) \\ \lambda\xi & 0 & 0 \\ \xi & 1/l & 0 \\ \xi & (p/\bar{p})\xi & \xi/\bar{p} \\ 1/l & (\lambda-1)\xi & 0 \\ 0 & -\xi/\bar{p} & 1/l-(p/\bar{p})\xi \\ -\xi/\bar{p} & 0 & (\lambda-1)\xi \end{bmatrix} \dots \dots (21)$$

ここに、 E と ν は物体を構成する材料のヤング率とポアソン比であり、 l は要素角の大きさ ($\theta_j - \theta_i$) である。

(21) 式を全要素について組み合わせ、固有値 λ とそれに対応する全節点変位ベクトル (固有ベクトル) を求める。

2.3 モード倍率の計算法

前節の計算は固有値問題の計算であるので、変位解および応力解は、その相対的な大きさしか求まらない。変

位解、応力解は、ひとまず、最大の大きさを 1 として正規化したモードを表しておく。単位荷重と釣り合う応力解を求めるには、モード解にある倍率 (モード倍率と呼ぶ) を掛ければよい。この倍率を決定するには、前報で説明したように、変位モードから応力モードを計算した後、単位荷重と釣り合うようにすればよい。

すなわち、この倍率 K は次式により計算される。

$$1 + K \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sigma_r \sin \theta \cos \varphi + \tau_{r\theta} \cos \theta \cos \varphi - \tau_{\varphi r} \sin \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0 \dots \dots \dots (22)$$

(9) 式を参考にすると、Cerruti 解の応力は次式の形

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r, \theta, \varphi) &= r^{-2} \sigma_r^*(\theta) \cos \varphi \\ \tau_{r\theta}(r, \theta, \varphi) &= r^{-2} \tau_{r\theta}^*(\theta) \cos \varphi \\ \tau_{\varphi r}(r, \theta, \varphi) &= r^{-2} \tau_{\varphi r}^*(\theta) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

で表されるから、これを (22) 式に代入すると、 K を決定するための次の計算式が得られる。

$$K = - \frac{1}{\pi l \sum_{i=1}^n (\sigma_r^* \sin \theta + \tau_{r\theta}^* \cos \theta - \tau_{\varphi r}^*) \sin \theta_i} \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 l は i 番目の有限要素角の大きさ、 Σ は、分割された各要素の中心における値の総和を表す。

2.4 解析結果

(20) 式における積分は、ガウス積分法によって数値積分を行った。ガウスポイント数と要素分割数による解 λ の収束状態を図-4 に示す。縦軸は、 λ の正解値 (-1.0) に対する、本方法による各要素分割時での λ の解の相対誤差である。本解析によって得られた λ の解は正解値に対して良い収束性を示している。図-5 a と図-5 b

図-4 3次元 Cerruti 解の λ の収束性

図—5a 3次元 Cerruti 解の変位モード

図—5b 3次元 Cerruti 解の応力モード

に 3, 6, 9 要素分割, ガウスポイント数 5 で解析した変位モードおよび応力モードを示した。本方法による解は, Cerruti 解 (ただし, モード表現) の正解に良い対応を示している。また, モード倍率 K の厳密解に対する本解析結果の誤差の収束状態を図—6 に示しておいた。図—6 の縦軸は, 十分収束したと考えられる 30 要素分割時の解を正解とみなし, これに対するそれぞれの要素分割時の解との相対誤差を表している。

図—6 3次元 Cerruti 解のモード倍率の誤差

図—7 2次元集中偶力問題

3. 2次元高次基本解の解析

3.1 集中偶力問題の有限要素解析法

いま, 図—7 に示す半無限領域の直線境界上に集中偶力が作用した場合の解⁵⁾を求める問題を考える。ここに 2 つの力の距離 a は非常に小さいものとする。

極座標系 (r, θ) において, 荷重点を中心として任意の半径 r でこの領域を切断すると, 切断線上の応力 σ_r , $\tau_{r\theta}$ は, 力の釣合いから次式を満足しなくてはならない。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta &= 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta &= 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tau_{r\theta} r \cdot r d\theta &= Pa = M \text{ (const.)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

上式の第3式から、 $\tau_{r\theta}$ は r^{-2} の特異性をもたねばならないことが分かる。また、第1, 2式より、 σ_r と $\tau_{r\theta}$ は同じ r のべき乗をもたねばならない。このような考察より、応力成分は、 r^{-2} の特異性をもつことが分かる。したがって、変位は r^{-1} の特異性をもつ。このような変位成分も応力成分とともに r のべき乗型の特異性をもつ解は、文献6)などで著者らが提案した有限要素法を利用した方法で解くことができる。この特異解の数値計算法の概略を以下に示す。

2次元弾性論によると、 r, θ 方向の応力の釣合式は極座標系で次式のような形で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2 \tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

また、応力境界条件は次式で表される。

$$\tau_{r\theta}=0, \quad \sigma_\theta=0 \dots\dots\dots (27)$$

(26) 式の各式の残差をそれぞれ R_r, R_θ として、仮想仕事方程式を作ると次のようになる。

$$\int_0^\infty \int_0^\pi (R_r \delta u_r + R_\theta \delta u_\theta) r dr d\theta + \int_0^\infty (\tau_{r\theta} \delta u_r + \sigma_\theta \delta u_\theta) dr \Big|_0^\infty = 0 \dots\dots\dots (28)$$

いま、荷重点近傍の r のべき乗型の応力特異解を求めるために、変位解を次のように変数分離形に仮定してみることにする。

$$\left. \begin{aligned} u_r(r, \theta) &= r^\lambda u_r^*(\theta) \\ u_\theta(r, \theta) &= r^\lambda u_\theta^*(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

これに対応する応力も次のような変数分離形となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r, \theta) &= r^{\lambda-1} \sigma_r^*(\theta) \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= r^{\lambda-1} \sigma_\theta^*(\theta) \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= r^{\lambda-1} \tau_{r\theta}^*(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

(29), (30) 式を (28) 式に代入し、部分積分を行って整理すると、次式が得られる。

$$\int_0^\pi \left\{ (\lambda \sigma_r^* - \sigma_\theta^*) \delta u_r^* + (\lambda + 1) \tau_{r\theta}^* \delta u_\theta^* - \frac{d \delta u_r^*}{d \theta} \tau_{r\theta}^* - \frac{d \delta u_\theta^*}{d \theta} \sigma_\theta^* \right\} = 0 \dots\dots\dots (31)$$

この式に基づき、 θ 座標を要素分割し、一つの要素内の $u_i^*(\theta)$ を θ の1次式で仮定すると、最終的に次のような要素方程式が得られる。

$$\{\delta u^*\} [k] \{u^*\} = 0 \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $[k]$ は要素剛性マトリックスであり、次式のよ

うな形をしている。

$$[k] = \frac{G}{\kappa - 1}$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{l(\lambda^2-1)(\kappa+1)}{3} - \frac{\kappa-1}{l} & \frac{l(\lambda^2-1)(\kappa+1)}{6} + \frac{\kappa-1}{l} \\ \frac{l(\lambda^2-1)(\kappa+1)}{6} + \frac{\kappa-1}{l} & \frac{l(\lambda^2-1)(\kappa+1)}{3} - \frac{\kappa-1}{l} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2\lambda - \lambda\kappa + 1 & \lambda + \kappa \\ -(\lambda + \kappa) & -(2\lambda - \lambda\kappa + 1) \end{matrix}$$

図—8a 2次元集中偶力問題の変位モード

図—8b 2次元集中偶力問題の応力モード

図-9 2次元集中偶モーメント問題

図-10 2次元集中偶モーメント問題の解 λ の収束性

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{-(2\lambda - \lambda x - 1)}{-(\lambda - x)} & \frac{\lambda - x}{2\lambda - \lambda x - 1} \\ \frac{l(\lambda^2 - 1)(x - 1)}{3} - \frac{x + 1}{l} & \frac{l(\lambda^2 - 1)(x - 1)}{6} + \frac{x + 1}{l} \\ \frac{l(\lambda^2 - 1)(x - 1)}{6} + \frac{x + 1}{l} & \frac{l(\lambda^2 - 1)(x - 1)}{3} - \frac{x + 1}{l} \end{array} \right] \quad (33)$$

G はせん断弾性係数であり, x はポアソン比に関する定数で, $x = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ状態), $x = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (平面応力状態) である。 l は要素角の大きさを表す。また, $\{u^*\}$ は次のような要素両端の節点 i, j における節点変位ベクトルである。

$$\{u^*\}^T = [u_{\theta i}^*, u_{\theta j}^*, u_{r i}^*, u_{r j}^*] \quad (34)$$

したがって, 領域内の全要素に関する要素剛性マトリックス $[k]$ を作成し, これを重ね合わせたものを $[K]$ とす

図-11 a 2次元集中偶モーメント問題の変位モード

図-11 b 2次元集中偶モーメント問題の応力モード

れば, 特異性パラメータ λ の値は, 次式に示すように, マトリックス $[K]$ の行列式が 0 となるような固有値 λ を計算することによって求められる。

$$|[K(\lambda)]| = 0 \quad (35)$$

また, この固有値に対応する節点変位ベクトル $\{U^*\}$ がこの問題の変位モードであり, さらに, 変位-ひずみ-応力の関係より, 応力モードが求められる。

3.2 解析結果

この有限要素法によって図-7の集中偶力問題の解析を行ったところ、要素分割数の増加に伴う固有値 λ の正解-1への収束は良好であった。変位、応力モードの解析結果を図-8a, bに示す。

参考までに、この問題の応力解の正解を示すと次のようになる⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2Pa}{\pi r^2} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{Pa}{\pi r^2} (1 + \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

また、図-9の集中偶モーメントを受ける場合⁵⁾は、同様の考察から、応力が r^{-3} の特異性をもち、変位が r^{-2} の特異性をもつ。この場合も本節で説明した有限要素法で解析することができる。固有値 λ の正解は-2であり、本解析結果の収束性を図-10に、変位、応力モードを図-11a, bに示しておく。なお、この問題の応力の正解は次式で与えられる⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4Ma}{\pi r^3} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ \sigma_\theta &= -\frac{4Ma}{\pi r^3} \cos^3 \theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{12Ma}{\pi r^3} \cos^2 \theta \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

4. 結 論

本稿では、3次元弾性基本解の変位式を一般的なフーリエ級数展開で表現するとき、 $n=0$ の場合は3次元Kelvin解や3次元Boussinesq解などの線(軸)対称解に、 $n \geq 1$ の場合は、高次の面対称基本解になり、さらに、このうち $n=1$ の場合は3次元Cerruti解になることを示した。本稿では、この3次元Cerruti解を有限要素法で求めるための定式化を行った。解析を行った結果、前報(第2報)と同様に良好な数値解が得られた。

また、半無限2次元弾性体表面に集中偶力または集中偶モーメントを受ける場合の応力、変位の解を求める問題は、この応力、変位がともに r のべき乗型の特異性を有するため、固有値問題となる。この問題に対しては、すでに著者が提案している有限要素法によるクラック先端近傍の特異解析法を適用して解析したところ良好な数値解を得ることができた。

これまでの研究を通して、以下のようなことが明らかになった。①2次元および3次元弾性体において、集中荷重近傍の解(弾性基本解)を有限要素法により解析する場合、一般には固有値解析問題となる。②しかしながら、2次元問題の弾性基本解のうち、通常の集中荷重を

受ける問題(Kelvin解, Boussinesq解, Cerruti解)のみ例外で、この種の問題は、変位が対数型特異性をもつため、固有値解析問題とならず、荷重ベクトルを右辺とする連立方程式を解く問題となる。③有限要素法でKelvin解, Boussinesq解, Cerruti解を解析するとき、2次元問題では、この3つの解の対称性を議論することなく解くことができるが、3次元問題では、Kelvin解とBoussinesq解は軸対称問題として、Cerruti解は面対称問題として、それぞれ区別して解析しなくてはならない。④弾性基本解の応力もクラック先端近傍の応力も、どちらも $r^{\lambda-1}$ の形のべき乗型の特異性をもつが、弾性基本解の場合は、 λ は0または負の整数であるのに対して、クラック先端近傍の応力解は、 λ は $0 < \lambda < 1$ の値をとる。⑤弾性基本解を有限要素法によって解析したところ、2次元問題の場合も3次元問題の場合も、解は非常に良好な収束性をもっている。

なお、本稿に示したような計算法で求められる数値弾性基本解を、境界要素法に組み込んで使用するためには、この種の数値解をデータファイルに記憶させ、補間などの手法を用いて、任意点の任意座標軸方向の単位力に対する任意点の応力、変位の値を取り出せるようにしておかなければならない。このようなデータの入出力の取り扱いについては、これまでの研究でふれていないが、今後検討する必要がある。

謝 辞

本研究をまとめるにあたり、広島大学吉田長行助教授、学生坂田邦宏君(現鈴与建設)の協力を得た。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 藤谷義信：特異応力解(クラック先端近傍の解・弾性基本解等)の解析に関する二・三の考察，日本建築学会中国・九州支部研究報告，第8号1，構造系，pp.445-448，1990.3
- 2) 藤谷義信：3次元弾性基本解(線対称解)の有限要素解析—有限要素法による弾性基本解の解析に関する研究(その2)，日本建築学会構造系論文報告集，第407号，pp.71-77，1990.1
- 3) 藤谷義信：2次元弾性基本解の有限要素解析—有限要素法による弾性基本解の解析に関する研究(その1)日本建築学会構造系論文報告集，第393号，pp.54-61，1988.11
- 4) 田治見宏ほか：地震工学，彰国社，1970
- 5) Timoshenko, S. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1951
- 6) 藤谷義信：有限要素法による2次元クラック先端の応力特異解の解析，構造工学論文集，Vol.31 B，pp.103-114，1985.3
- 7) 宮本 博：3次元弾性論，裳華房，1967

(1990年3月27日原稿受理，1990年10月25日採用決定)